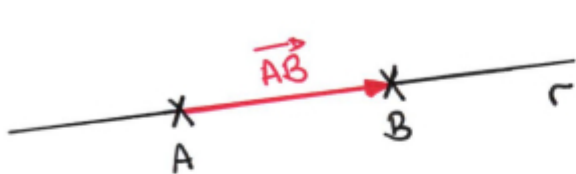


1) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(2,0,5)$ y $B(-1,4,6)$



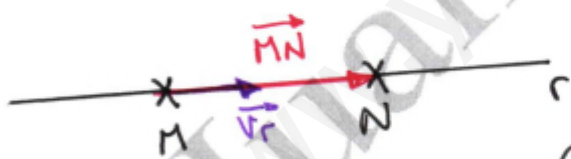
$$\vec{AB} = (-1, 4, 6) - (2, 0, 5) = (-3, 4, 1)$$

Como el vector $\vec{AB}$ está sobre la recta $r \Rightarrow \vec{V}_r = \vec{AB} = (-3, 4, 1)$

Y por tanto, las ecuaciones pedidas:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(2, 0, 5) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (-3, 4, 1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 0 + 4\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

2) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $M(5,1,7)$ y $N(9,-3,-1)$

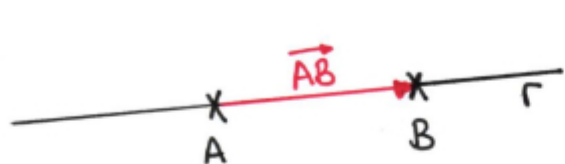


$$\vec{MN} = (9, -3, -1) - (5, 1, 7) = (4, -4, -8)$$

Cuando lo único que nos interesa de un vector es su dirección, puedes simplificarlo. Así:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow M(5, 1, 7) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (1, -1, -2) \end{cases} \Rightarrow r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-7}{-2}$$

3) Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-5, 3, 7)$ y $B(2, -3, 3)$ en todas sus formas



$$\overrightarrow{AB} = (2, -3, 3) - (-5, 3, 7) = (7, -6, -4)$$

Con lo que la recta viene determinada por r : $\begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(-5, 3, 7) \\ \text{Vector director} \rightarrow \overrightarrow{v}_r = (7, -6, -4) \end{cases}$

y por tanto:

$$r: (x, y, z) = (-5, 3, 7) + \lambda \cdot (7, -6, -4) \quad (\text{VECTORIAL})$$

$$r: \begin{cases} x = -5 + 7\lambda \\ y = 3 - 6\lambda \\ z = 7 - 4\lambda \end{cases} \quad (\text{PARAMÉTRICAS}) \rightarrow r: \underbrace{\frac{x+5}{7} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-7}{-4}}_{(\text{CONTINUA})}$$

$$\frac{x+5}{7} = \frac{y-3}{-6} \Rightarrow -6x - 30 = 7y - 21 \Rightarrow 6x + 7y + 9 = 0$$

$$\frac{y-3}{-6} = \frac{z-7}{-4} \Rightarrow -4y + 12 = -6z + 42 \Rightarrow 4y - 6z + 30 = 0$$

↓ simplifica
 $2y - 3z + 15 = 0$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} 6x + 7y + 9 = 0 \\ 2y - 3z + 15 = 0 \end{cases} \quad (\text{IMPLÍCITAS})$$

4) Calcular un punto y un vector director de cada una de las rectas dadas por:

$$r: x+1 = \frac{y-2}{4} = -z \quad ; \quad s: \frac{2x+4}{3} = \frac{1-y}{3} = \frac{z+7}{5}$$

$$r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-1} \Rightarrow r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(-1, 2, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_r = (1, 4, -1) \end{cases}$$

$$s: \frac{\frac{2x+4}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1-y}{-1}}{\frac{-1}{2}} = \frac{z+7}{5} \Rightarrow s: \frac{x+2}{3/2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+7}{5}$$

$$\Rightarrow s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(-2, 1, -7) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_s = \left(\frac{3}{2}, -3, 5\right) \end{cases}$$

5) Calcular las ecuaciones implícitas de la recta de ecuación $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4} = z+3$

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4} = z+3$$

$$\frac{y+5}{4} = z+3 \Rightarrow y+5 = 4z+12 \Rightarrow y-4z-7=0$$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4} \Rightarrow 4x-8 = 3y+15 \Rightarrow 4x-3y-23=0$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} y-4z-7=0 \\ 4x-3y-23=0 \end{cases}$$

6) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta dada por sus ecuaciones implícitas $r: \begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$

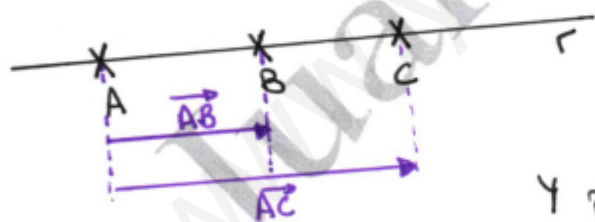
$$\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \xrightarrow{x(-1)} \begin{cases} -x-y+z=-3 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \xrightarrow{E_1+E_2} \begin{cases} x+2z=-3 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$$

$\rightarrow y = 3+z-x$
 $y = 3+\lambda+3+2\lambda = 6+3\lambda$

$z = \lambda$
 $x = -3-2\lambda$

Y por tanto, las ecuaciones pedidas $r: \begin{cases} x = -3-2\lambda \\ y = 6+3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

7) ¿Existe alguna recta que pase por los puntos $A(3,1,0)$, $B(0,-5,1)$ y $C(6,-5,1)$?



Para que exista la recta r $A, B,$ y C deben estar alineados.

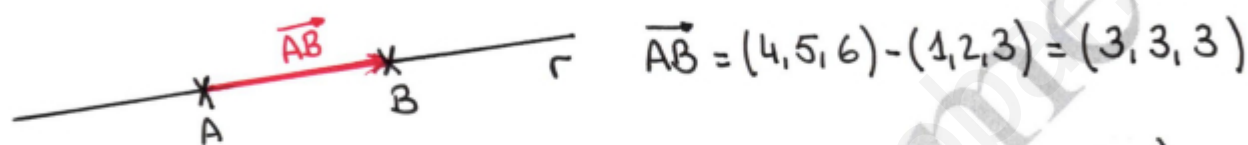
Y para ello, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

deben ser paralelos. Veámoslo:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (0, -5, 1) - (3, 1, 0) = (-3, -6, 1) \\ \overrightarrow{AC} &= (6, -5, 1) - (3, 1, 0) = (3, -6, 1) \end{aligned} \right\} \frac{-3}{3} \neq \frac{-6}{-6} = \frac{1}{1}$$

Como $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ no son paralelos, no existe la recta r .

8) Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1,2,3)$ y $B(4,5,6)$. De todos los puntos $P(x,y,z)$ de esta recta, ¿cuál es el que tiene nula su segunda coordenada? Calcula "m" y "n" para que el punto $C(0,m,n)$ pertenezca a la recta.



Por tanto, $r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(1,2,3) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

Los puntos de r por tanto:

$$P \in r: (1+\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda)$$

Si la segunda coordenada es nula $\Rightarrow 2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-2$

y así:

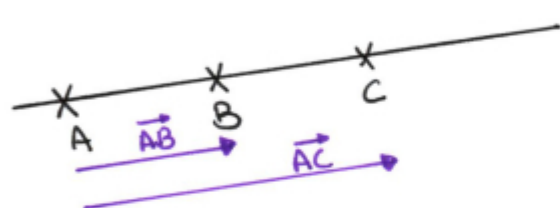
$$P(1+\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda) \xRightarrow{\lambda=-2} P(-1, 0, 1)$$

Para que $C(0,m,n)$ pertenezca a r , debe cumplir su ecuación

$$\begin{cases} 0 = 1 + \lambda \rightarrow \lambda = -1 \\ m = 2 + \lambda \rightarrow m = 2 - 1 \Rightarrow m = 1 \\ n = 3 + \lambda \rightarrow n = 3 - 1 \Rightarrow n = 2 \end{cases}$$

9) Calcula a y b para que los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(3, 0, -2)$ y $C(4, a, b)$ estén alineados y expresa la ecuación de la recta que pasa por ellos con sus ecuaciones implícitas

A , B y C estarán alineados si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos:



$$\overrightarrow{AB} = (3, 0, -2) - (1, 2, -1) = (2, -2, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4, a, b) - (1, 2, -1) = (3, a-2, b+1)$$

$$\frac{3}{2} = \frac{a-2}{-2} = \frac{b+1}{-1} \begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{a-2}{-2} \rightarrow -3 = a-2 \Rightarrow a = -1 \\ \frac{3}{2} = \frac{b+1}{-1} \rightarrow b = -\frac{3}{2} - 1 \Rightarrow b = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Por tanto:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(1, 2, -1) \\ \text{Vector} \\ \text{director} \rightarrow \overrightarrow{V_r} = (2, -2, -1) \end{cases} \Rightarrow$$

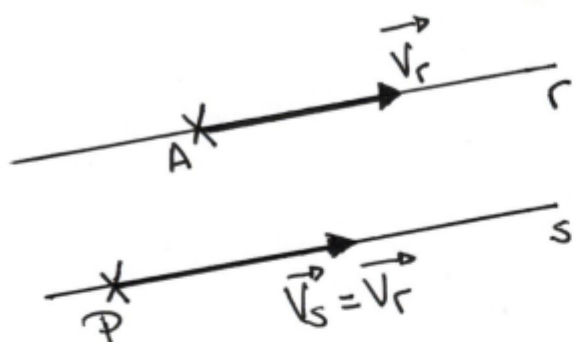
$$\Rightarrow r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$$

$$\frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow -y+2 = -2z-2 \Rightarrow -y+2z+4=0$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} \Rightarrow -x+1 = y-2 \Rightarrow x+y-3=0$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} -y+2z+4=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$$

- 10) Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, -3, 0)$ y es paralela a $r: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{5} = z$



De la ecuación de r leemos:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(0, 3, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (2, 5, 1) \end{cases}$$

Como la recta s que buscamos es paralela a la recta r , un vector director de s será el propio $\vec{V}_r$. Así:

$$s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow P(1, -3, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_s = (2, 5, 1) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- 11) Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y es paralela al vector $\vec{u} \times \vec{v}$, siendo los vectores $\vec{u} = (1, -1, 2)$ y $\vec{v} = (2, 0, 0)$

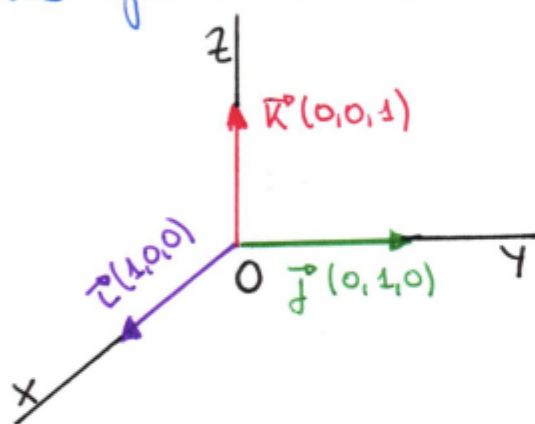
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 4, 2)$$

Como $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{V}_r$ son paralelos tomamos $\vec{V}_r = (0, 2, 1)$

Por tanto:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow P(1, 2, 3) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (0, 2, 1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

12) Escribe las ecuaciones paramétricas de cada uno de los ejes coordenados.



$$X: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad Y: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$Z: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

13) Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-4, 2, 5)$ y es paralela al eje Y .

Acabamos de ver como el vector $\vec{j} = (0, 1, 0)$ está sobre el eje Y y por tanto:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(-4, 2, 5) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = \vec{j} = (0, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 \end{cases}$$

14) ¿Existe algún valor de k para que el punto $P(k, k, k)$ pertenezca a la recta $r: \frac{x-5}{-3} = y-1 = \frac{z+1}{3}$? ¿Y a la recta $s: x-1 = \frac{y+2}{-2} = z$?

Un punto pertenece a una recta si verifica su ecuación

$$\frac{k-5}{-3} = k-1 = \frac{k+1}{3} \Rightarrow k-5 = -3k+3$$
$$4k = 8$$
$$k = 2$$

Y veamos si se verifica:

$$\frac{2-5}{-3} = 2-1 = \frac{2+1}{3} \Rightarrow 1 = 1 = 1 \rightarrow \text{El punto } P(k, k, k)$$

pertenece a la recta r si $k=2$.

Veamos qué sucede con la recta s :

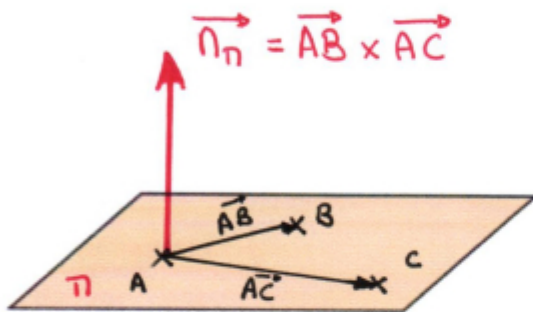
$$k-1 = \frac{k+2}{-2} = k \Rightarrow -2k+2 = k+2$$
$$-3k = 0$$
$$k = 0$$

Y veamos si se verifica:

$$0-1 = \frac{0+2}{-2} = 0 \Rightarrow -1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{No hay ningún}$$

valor de k para que $P(k, k, k)$ pertenezca a la recta s .

15) Halla las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(1,7,-2)$, $B(4,5,0)$ y $C(6,3,8)$. Calcula "K" para que el punto $P(1,k,5)$ pertenezca a dicho plano.



$$\vec{AB} = (4,5,0) - (1,7,-2) = (3,-2,2)$$

$$\vec{AC} = (6,3,8) - (1,7,-2) = (5,-4,10)$$

El vector normal del plano $\vec{n}_n$ es

perpendicular tanto a $\vec{AB}$ como a $\vec{AC}$ y por tanto:

$$\vec{n}_n = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 10 \end{vmatrix} = (-12, -20, -2)$$

Con lo que $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_n = (-12, -20, -2) \Rightarrow \pi: -12x - 20y - 2z + D = 0$$

$$A(1,7,-2) \in \pi \Rightarrow -12 \cdot 1 - 20 \cdot 7 - 2 \cdot (-2) + D = 0 \Rightarrow D = 148$$

$$\Rightarrow \pi: -12x - 20y - 2z + 148 = 0$$

$$\text{Y simplificando } \Rightarrow \pi: 6x + 10y + z - 74 = 0$$

El punto $P(1, k, 5)$ pertenecerá al plano π si verifica su ecuación. Así:

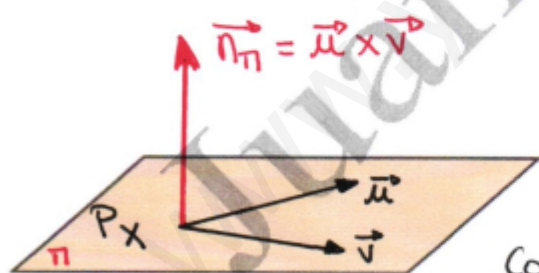
$$P(1, k, 5) \in \pi \Rightarrow 6 \cdot 1 + 10 \cdot k + 5 - 74 = 0 \Rightarrow k = \frac{63}{10}$$

las ecuaciones paramétricas del plano π :

$$\pi: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(1, 7, -2) \\ \text{Vectores directores} \rightarrow \begin{cases} \vec{AB} = (3, -2, 2) \\ \vec{AC} = (5, -4, 10) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda + 5\mu \\ y = 7 - 2\lambda - 4\mu \\ z = -2 + 2\lambda + 10\mu \end{cases}$$

16) Calcula la ecuación implícita del plano que contiene el punto $P(2, 1, 1)$ y cuyos vectores directores son

$$\vec{u} = (1, 0, 1) \text{ y } \vec{v} = (-2, 1, 0)$$



$$\vec{n}_\pi = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -2, 1)$$

Con lo que $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

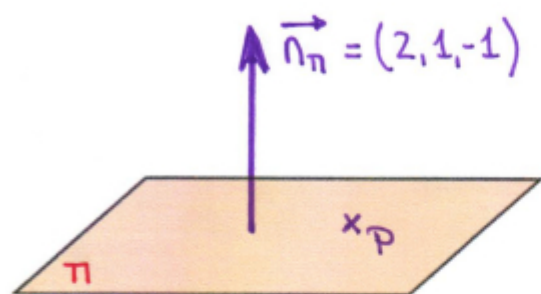
$$\vec{n}_\pi = (-1, -2, 1) \Rightarrow \pi: -x - 2y + z + D = 0$$

$$P(2, 1, 1) \in \pi \Rightarrow -2 - 2 \cdot 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = +3$$

$$\Rightarrow \pi: -x + 2y + z + 3 = 0$$

17) Determina las ecuaciones paramétricas del plano que contiene al punto $P(-3, 3, 1)$ y cuyo vector normal es

$$\vec{n}_\pi = (2, 1, -1)$$



$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\vec{n}_\pi = (2, 1, -1) \Rightarrow \pi: 2x + y - z + D = 0$$

$$P(-3, 3, 1) \in \pi \Rightarrow 2 \cdot (-3) + 3 - 1 + D = 0$$

$$\Rightarrow D = 4$$

$$\Rightarrow \pi: 2x + y - z + 4 = 0$$

Para expresarlo en paramétricas:

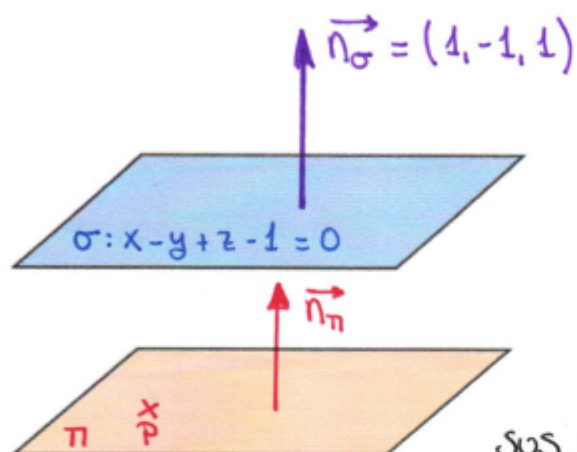
$$\pi: 2x + y - z + 4 = 0 \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 4 + 2\lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 4 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$

18) Calcula "k" para que el plano $\pi: kx + 3y - 2z + 4 = 0$ contenga al punto $P(1, -2, 1)$

Un punto pertenece a un plano cuando verifica su ecuación. Así:

$$P(1, -2, 1) \in \pi \Rightarrow k \cdot 1 + 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 + 4 = 0 \Rightarrow k = 4$$

- 19) Determina la ecuación del plano π que contiene al punto $P(3,3,2)$ y es paralelo al plano $\sigma: x-y+z-1=0$



De la ecuación del plano σ podemos leer:

$$\vec{n}_{\sigma} = (1, -1, 1)$$

Cuando dos planos son paralelos sus vectores normales son paralelos y

por tanto, un vector normal de π será el propio $\vec{n}_{\sigma}$. Así:

$$\pi: Ax+By+Cz+D=0$$

$$\vec{n}_{\pi} = \vec{n}_{\sigma} = (1, -1, 1) \Rightarrow \pi: x-y+z+D=0$$

$$P(3,3,2) \in \pi \Rightarrow 3-3+2+D=0 \Rightarrow D=-2$$

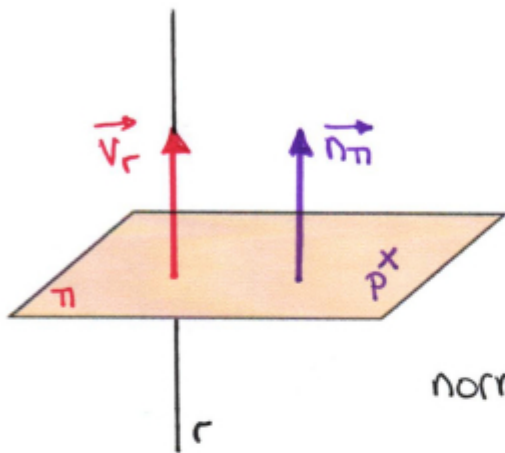
$$\Rightarrow \pi: x-y+z-2=0$$

- 20) Determina la ecuación del plano π que contiene al punto $P(2,-4,2)$ y es perpendicular a la recta de ecuación

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

De la ecuación de la recta podemos leer:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(0,0,0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (1, 1, 1) \end{cases}$$



Quando una recta es perpendicular a un plano, el vector director de la recta y el normal del plano son paralelos. Por tanto, un vector normal de π será el propio $\vec{V}_r$. Así:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

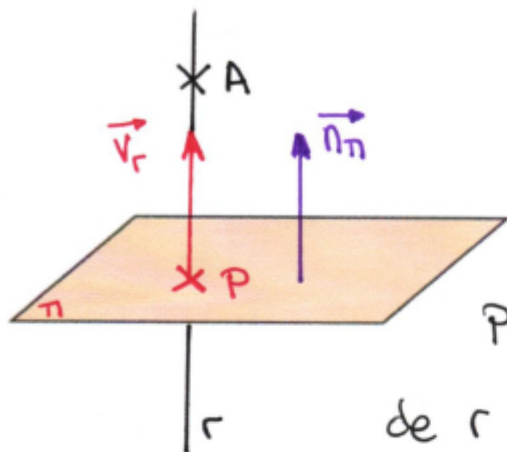
$$\vec{n}_\pi = \vec{V}_r = (1, 1, 1) \Rightarrow \pi: x + y + z + D = 0$$

$$P(2, -4, 2) \in \pi \Rightarrow 2 - 4 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\Rightarrow \pi: x + y + z = 0$$

21) Determina la ecuación de la recta r que pasando por el punto $A(1, 2, 3)$ es perpendicular al plano de ecuación $\pi: 2x + y + 3z = 0$. ¿Cuál es el punto de corte entre el plano π dado y la recta r calculada?

De la ecuación del plano podemos leer $\vec{n}_\pi = (2, 1, 3)$



Cuando una recta es perpendicular a un plano, el vector director de la recta y el normal del plano son paralelos. Por tanto, un vector director de r será el propio $\vec{n}_\pi$. Así:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(1, 2, 3) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (2, 1, 3) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$$

Para determinar el punto P de corte entre r y π :

$$\left. \begin{array}{l} P \in r: (1+2\lambda, 2+\lambda, 3+3\lambda) \\ \pi: 2x + y + 3z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2(1+2\lambda) + 2 + \lambda + 3(3+3\lambda) = 0 \\ 2 + 4\lambda + 2 + \lambda + 9 + 9\lambda = 0 \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow 14\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{13}{14}$$

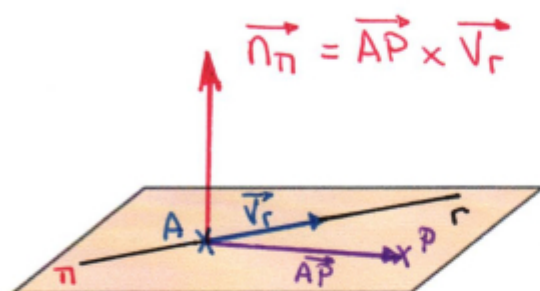
Y por tanto:

$$P(1+2\lambda, 2+\lambda, 3+3\lambda) \xrightarrow{\lambda = -\frac{13}{14}} P\left(-\frac{6}{7}, \frac{15}{14}, \frac{3}{14}\right)$$

22) Determina la ecuación del plano que contiene al punto $P(2, 1, 2)$ y a la recta $r: x-2 = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$

De la ecuación de la recta, leemos la información

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(2, 3, 4) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (1, -1, -3) \end{cases}$$



$$\vec{n}_\pi = \vec{AP} \times \vec{V}_r$$

$$\vec{AP} = (2, 1, 2) - (2, 3, 4) = (0, -2, -2)$$

$$\vec{n}_\pi = \vec{AP} \times \vec{V}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (4, -2, 2)$$

Con lo que $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_\pi = (4, -2, 2) \Rightarrow \pi: 4x - 2y + 2z + D = 0$$

$$A(2, 3, 4) \in \pi \Rightarrow 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + D = 0 \Rightarrow D = -10$$

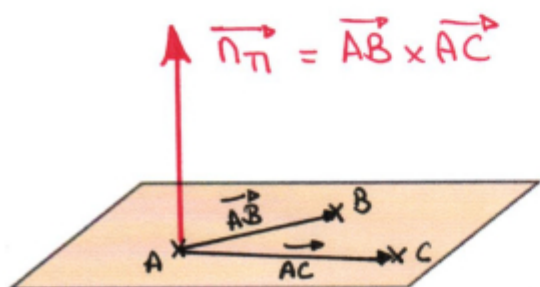
$$\Rightarrow \pi: 4x - 2y + 2z - 10 = 0$$

y simplificando $\Rightarrow \pi: 2x - y + z - 5 = 0$

23) Dados los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$ y $C(0, -1, -1)$:

a) Calcula la ecuación del plano π que los contiene

b) Averigua k para que $D(k, 0, 0)$ pertenezca a π .



$$\vec{n}_\pi = \vec{AB} \times \vec{AC}$$

$$\vec{AB} = (1, 1, 2) - (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$$

$$\vec{AC} = (0, -1, -1) - (0, 0, 1) = (0, -1, -2)$$

$$\vec{n}_\pi = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1)$$

Con lo que $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_\pi = (-1, 2, -1) \Rightarrow \pi: -x + 2y - z + D = 0$$

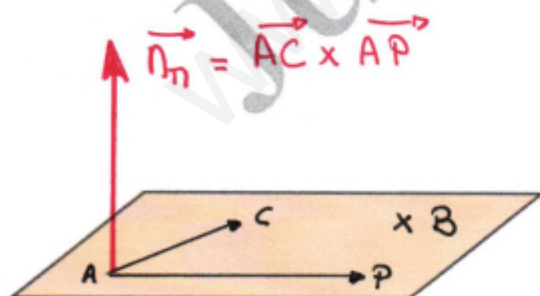
$$A(0, 0, 1) \in \pi \Rightarrow -1 + D = 0 \Rightarrow D = 1$$

$$\Rightarrow \pi: -x + 2y - z + 1 = 0$$

El punto $D(k, 0, 0)$ pertenecerá a π si verifica su ecuación:

$$D(k, 0, 0) \in \pi \Rightarrow -k + 1 = 0 \Rightarrow k = 1$$

24) Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, k)$ y $C(4, 0, 0)$ averigua "k" para que los tres puntos determinen un plano que pase por el punto $P(2, 0, 1)$



$$\vec{AC} = (4, 0, 0) - (1, 1, 1) = (0, -1, -1)$$

$$\vec{AP} = (2, 0, 1) - (1, 1, 1) = (1, -1, 0)$$

$$\vec{n}_\pi = \vec{AC} \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1)$$

Por tanto $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_\pi = (-1, -1, 1) \Rightarrow \pi: -x - y + z + D = 0$$

$$A(1, 1, 1) \in \pi \Rightarrow -1 - 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1$$

$$\Rightarrow \pi: -x - y + z + 1 = 0$$

Si el punto $B(2, 2, k)$ tiene que estar en el plano:

$$B(2, 2, k) \in \pi \Rightarrow -2 - 2 + k + 1 = 0 \Rightarrow k = 3$$

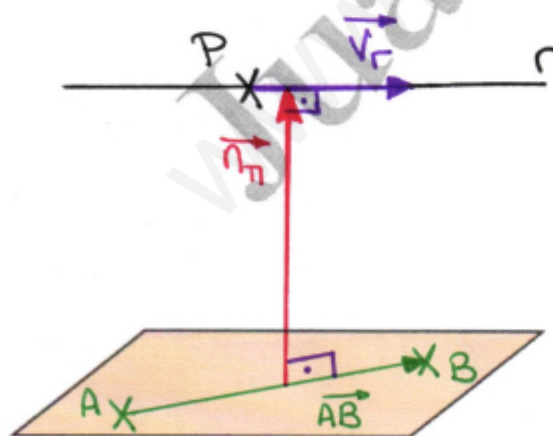
25) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos

$A(1, 3, 2)$ y $B(-2, 5, 0)$ y es paralelo a la recta de ecuación

$$r: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases}$$

De la ecuación de la recta leemos:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow P(3, 2, -2) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (-1, 1, -3) \end{cases}$$



$$\vec{AB} = (-2, 5, 0) - (1, 3, 2) = (-3, 2, -2)$$

Como ves, el vector $\vec{n}_\pi$ es perpendicular tanto a $\vec{AB}$ como a $\vec{V}_r$ y por tanto:

$$\vec{n}_\pi = \vec{AB} \times \vec{V}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-4, -7, -1)$$

Por tanto $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_\pi = (-4, -7, -1) \Rightarrow \pi: -4x - 7y - z + D = 0$$

$$A(1, 3, 2) \in \pi \Rightarrow -4 \cdot 1 - 7 \cdot 3 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = 27$$

$$\Rightarrow \pi: -4x - 7y - z + 27 = 0$$

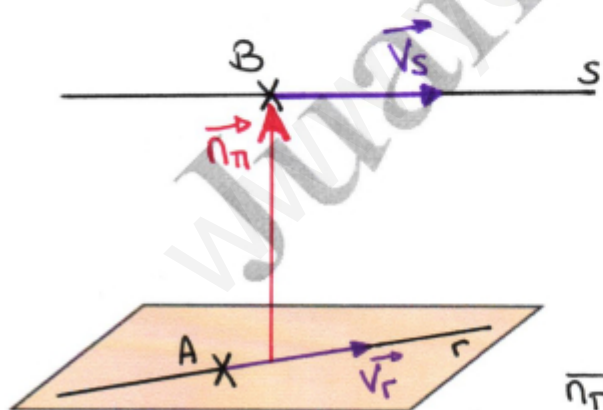
26) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ y es paralelo a la recta } s: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

De la ecuación de las rectas leemos:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(2, -1, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (3, -1, 1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(3, -1, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_s = (5, 2, -3) \end{cases}$$



Como vemos, el vector normal $\vec{n}_\pi$ es perpendicular tanto a $\vec{V}_r$ como a $\vec{V}_s$ y por tanto:

$$\vec{n}_\pi = \vec{V}_r \times \vec{V}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (1, 14, 11)$$

Por tanto $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_\pi = (1, 14, 11) \Rightarrow \pi: x + 14y + 11z + D = 0$$

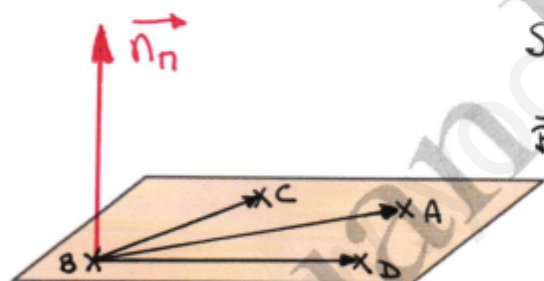
$$A(2, -1, 0) \in \pi \Rightarrow 2 + 14(-1) + D = 0 \Rightarrow D = 12$$

$$\Rightarrow \pi: x + 14y + 11z + 12 = 0$$

27) Calcula el valor de "m" para que los puntos $A(m, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $C(1, 2, 3)$ y $D(7, 2, 1)$ estén en un mismo plano.

¿Cuál es la ecuación de dicho plano?

Los cuatro puntos están en el mismo plano si los tres vectores que definen son coplanarios:



Si A, B, C , y D son coplanarios entonces

$\vec{BA}, \vec{BC}$ y $\vec{BD}$ son coplanarios $\Rightarrow [\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}] = 0$

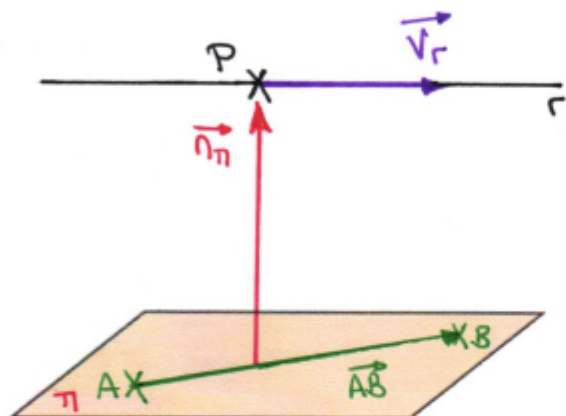
$$\vec{BA} = (m, 0, 1) - (0, 1, 2) = (m, -1, -1)$$

$$\vec{BC} = (1, 2, 3) - (0, 1, 2) = (1, 1, 1)$$

$$\vec{BD} = (7, 2, 1) - (0, 1, 2) = (7, 1, -1)$$

$$[\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \lambda \\ y = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow P\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 0\right) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = \left(-1, -\frac{3}{2}, 1\right) \end{cases}$$



$$\vec{AB} = (0, 1, 1) - (1, -3, 2) = (-1, 4, -1)$$

$$\vec{n}_\pi = \vec{AB} \times \vec{V}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{2}, 2, \frac{11}{2}\right)$$

Por tanto $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_\pi = \left(\frac{5}{2}, 2, \frac{11}{2}\right) \Rightarrow \pi: \frac{5}{2}x + 2y + \frac{11}{2}z + D = 0$$

$$A(1, -3, 2) \in \pi \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + \frac{11}{2} \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = -\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \pi: \frac{5}{2}x + 2y + \frac{11}{2}z - \frac{15}{2} = 0$$

Y simplificando $\Rightarrow \pi: 5x + 4y + 11z - 15 = 0$

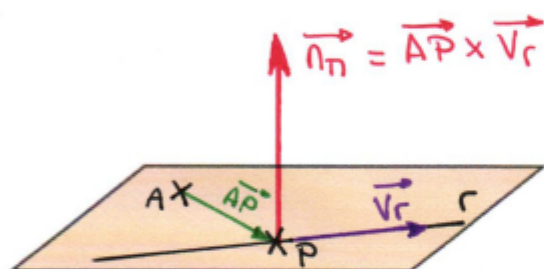
30) Calcular la ecuación del plano π que determinan el punto $A(1, 0, 1)$ y la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$

Pasamos la recta a paramétricas:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{E_1 + E_2} 3x + z + 1 = 0 \begin{cases} x = \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{green}} y = 2x + 2z = 2\lambda + 2(-1 - 3\lambda) = -2 - 4\lambda$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 - 4\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} \quad ; \quad r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow P(0, -2, -1) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (1, -4, -3) \end{cases}$$



$$\vec{AP} = (0, -2, -1) - (1, 0, 1) = (-1, -2, -2)$$

$$\vec{n}_n = \vec{AP} \times \vec{V}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = (-2, -5, 6)$$

Con lo que $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

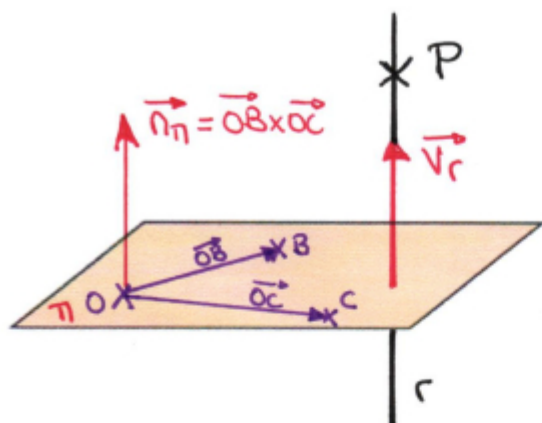
$$\vec{n}_n = (-2, -5, 6) \Rightarrow \pi: -2x - 5y + 6z + D = 0$$

$$A(1, 0, 1) \in \pi \Rightarrow -2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = -4$$

$$\Rightarrow \pi: -2x - 5y + 6z - 4 = 0$$

$$\text{Simplificando} \Rightarrow \pi: 2x + 5y - 6z + 4 = 0$$

31) Halla la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano π que pasa por el origen de coordenadas y por los puntos $B(1, 1, 1)$ y $C(1, 2, 1)$



$$\vec{OB} = (1, 1, 1) - (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$$

$$\vec{OC} = (1, 2, 1) - (0, 0, 0) = (1, 2, 1)$$

$$\vec{n}_\pi = \vec{OB} \times \vec{OC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)$$

Al ser r perpendicular a π , un vector director de r será el propio $\vec{n}_\pi$ y por tanto:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow P(1, 2, 3) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (-1, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

32) Halla la ecuación de la recta t paralela a la recta

$$r: \begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + 3z = 5 \end{cases} \text{ y que pase por el punto de intersección de}$$

$$\text{la recta } s: \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3} \text{ con el plano } \pi: x - y + z = 7$$

Empezamos calculando el punto de corte P entre la recta s y el plano π :

$$\left. \begin{array}{l} P \text{ es } P(1+4\lambda, -3+2\lambda, -2+3\lambda) \\ \pi: x - y + z = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1+4\lambda - (-3+2\lambda) + (-2+3\lambda) = 7 \\ 1+4\lambda + 3 - 2\lambda - 2 + 3\lambda = 7 \\ 5\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = 1 \end{array}$$

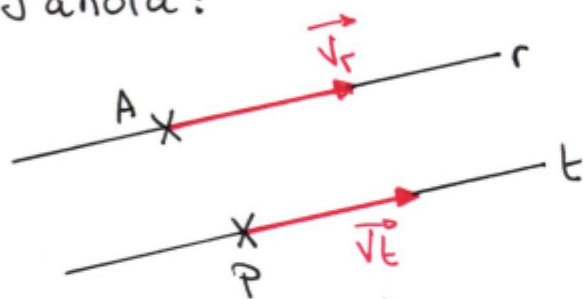
$$\text{y por tanto: } P(1+4\lambda, -3+2\lambda, -2+3\lambda) \xrightarrow{\lambda=1} P(5, -1, 1)$$

Ahora pasamos la recta r a paramétricas:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2z = 5 \\ y + 3z = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow x = 5 - 2\alpha \\ z = \alpha \\ \longrightarrow y = 5 - 3\alpha \end{array} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 5 - 2\alpha \\ y = 5 - 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

y de la ecuación extraemos $r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(5, 5, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (-2, -3, 1) \end{cases}$

y ahora:



Al ser r y t rectas paralelas un vector $\vec{V}_t$ será el propio $\vec{V}_r$

y por tanto:

$$t: \begin{cases} x = 5 - 2\beta \\ y = -1 - 3\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases}$$

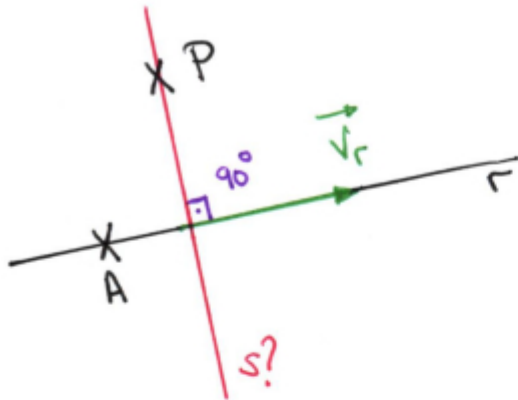
33) Calcula la ecuación de la recta s que pasando por

$P(1, 2, 3)$ corta perpendicularmente a $r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4 - 2\lambda \end{cases}$

De la ecuación de la recta extraemos la información:

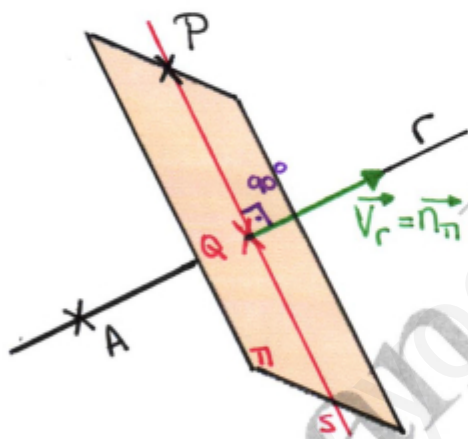
$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(2, 3, 4) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (0, 1, -2) \end{cases}$$

Planteamos el ejercicio:



Queremos la recta s de la que ya conocemos el punto P . Sin embargo no tenemos $\vec{v}_s$ y tampoco podemos hallarlo a partir del $\vec{v}_r$ que tenemos. Es por eso por

lo que vamos a construir un plano π que pasa por P y sea perpendicular a r , según:



Como π es perpendicular a r , un vector $\vec{n}_\pi$ es el propio $\vec{v}_r$. Así:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\vec{n}_\pi = (0, 1, -2) \Rightarrow \pi: y - 2z + D = 0$$

$$P(1, 2, 3) \in \pi \Rightarrow 2 - 2 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow D = 4$$

$$\Rightarrow \pi: y - 2z + 4 = 0$$

Determinamos el punto de corte Q entre la recta r y el plano π :

$$\left. \begin{array}{l} Q \in r: (2, 3 + \lambda, 4 - 2\lambda) \\ \pi: y - 2z + 4 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 + \lambda - 2(4 - 2\lambda) + 4 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 + \lambda - 8 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/5 \end{array}$$

y por tanto:

$$Q(2, 3 + \lambda, 4 - 2\lambda) \xrightarrow{\lambda = 1/5} Q\left(2, \frac{16}{5}, \frac{18}{5}\right)$$

La recta s que buscamos es la que pasa por P y Q :

$$\overrightarrow{PQ} = \left(2, \frac{16}{5}, \frac{18}{5}\right) - (1, 2, 3) = \left(1, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

y por tanto, s :

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \frac{6}{5}\alpha \\ z = 3 + \frac{3}{5}\alpha \end{cases}$$

34) Dados la recta r : $\begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x + 2y + 3z = 1$

halla la ecuación de una recta s contenida en el plano π , que pase por $P(2, 1, -1)$ y sea perpendicular a r .

Escribamos la recta r en paramétricas:

$$\begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{z = \lambda} \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

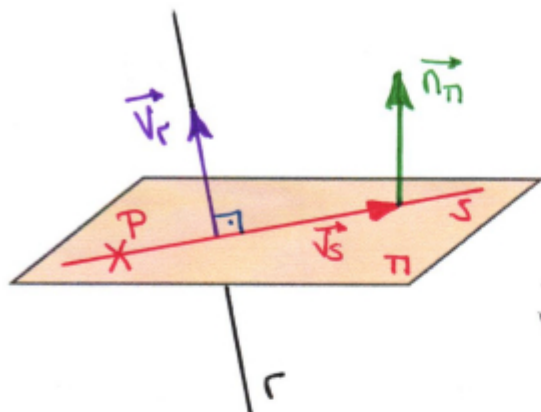
De las ecuaciones dadas leemos:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(-3, 4, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (2, 1, 1) \end{cases} \quad \pi: \vec{n}_\pi = (1, 2, 3)$$

Aunque el ejercicio no lo pide, voy a estudiar la posición relativa de r y π para poder hacer una representación del ejercicio a resolver:

$$\vec{V}_r \cdot \vec{n}_\pi = (2, 1, 1) \cdot (1, 2, 3) = 2 + 2 + 3 = 7 \neq 0 \Rightarrow \text{Se cortan}$$

La representación aproximada por tanto:



Como ves, el vector $\vec{V}_s$ es perpendicular tanto a $\vec{V}_r$ como a $\vec{n}_n$ y por tanto:

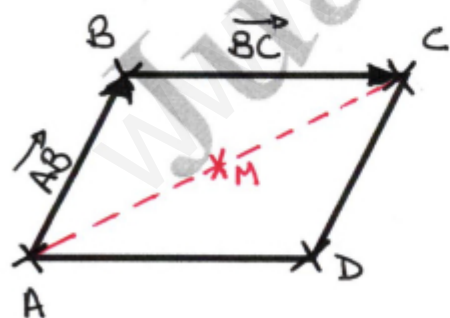
$$\vec{V}_s = \vec{V}_r \times \vec{n}_n = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (1, -5, 3)$$

Y así, la recta pedida es:

$$S: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow P(2, 1, -1) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_s = (1, -5, 3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S: \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 - 5\alpha \\ z = -1 + 3\alpha \end{cases}$$

35) Los puntos $A(1, 3, -1)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(4, -1, -3)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. Calcula el cuarto vértice D , el centro M , y su área.



$$\vec{BC} = (4, -1, -3) - (2, 0, 2) = (2, -1, -5)$$

$$\vec{OA} + \vec{BC} = \vec{OD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{OD} = (1, 3, -1) + (2, -1, -5) = (3, 2, -6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(3, 2, -6)$$

El centro M será el punto medio del segmento $\overline{AC}$:

$$M = \left(\frac{a_x + c_x}{2}, \frac{a_y + c_y}{2}, \frac{a_z + c_z}{2} \right) = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{-1-3}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, 1, -2 \right)$$

El área del paralelogramo viene dada por:

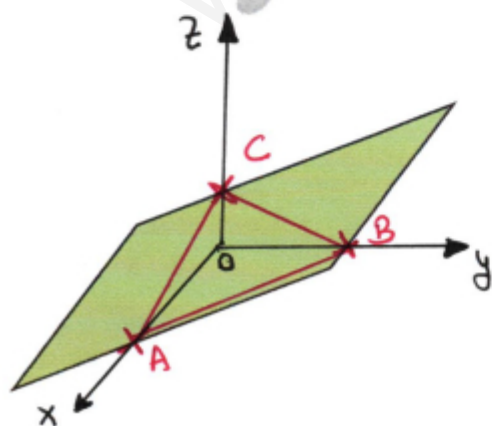
$$\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{BC}|$$

$$\vec{AB} = (2, 0, 2) - (1, 3, -1) = (1, -3, 3)$$

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (18, 11, 5)$$

$$\Rightarrow \text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{BC}| = \sqrt{18^2 + 11^2 + 5^2} = \sqrt{470} \approx 21.68 \text{ u}^2$$

36) El plano $\pi: 2x + 3y + 6z - 18 = 0$ corta a cada uno de los ejes x, y, z en los puntos $A, B, y C$ respectivamente. Se pide el área del triángulo $\triangle ABC$, sus ángulos y su perímetro. Los puntos A, B, C y el origen O determinan un tetraedro del que se pide su volumen.

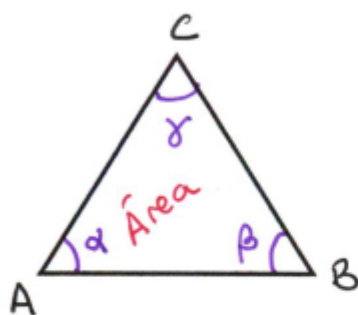


$$A \begin{cases} \pi: 2x + 3y + 6z = 18 \\ x: y = z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 18 \Rightarrow x = 9 \\ \Rightarrow A(9, 0, 0) \end{cases}$$

$$B \begin{cases} \pi: 2x + 3y + 6z = 18 \\ y: x = z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y = 18 \Rightarrow y = 6 \\ \Rightarrow B(0, 6, 0) \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} \pi: 2x + 3y + 6z = 18 \\ \ell: x = y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6z = 18 \Rightarrow z = 3 \\ \Rightarrow C(0, 0, 3) \end{cases}$$

Una vez determinados los puntos:



$$\vec{AB} = (0, 6, 0) - (9, 0, 0) = (-9, 6, 0)$$

$$\vec{AC} = (0, 0, 3) - (9, 0, 0) = (-9, 0, 3)$$

$$\vec{BC} = (0, 0, 3) - (0, 6, 0) = (0, -6, 3)$$

$$P = |\vec{AB}| + |\vec{AC}| + |\vec{BC}| = \sqrt{117} + \sqrt{90} + \sqrt{45} = 27'01 \mu.$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|; \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -9 & 6 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (18, 27, 54)$$

$$\Rightarrow \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18^2 + 27^2 + 54^2} = \frac{1}{2} \cdot 63 = 31'5 \mu^2$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{(-9, 6, 0) \cdot (-9, 0, 3)}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{90}} = \frac{81}{\sqrt{10530}} = 0'789$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos(0'789) = 37'87^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{-\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{-(-9, 6, 0) \cdot (0, -6, 3)}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{45}} = \frac{36}{\sqrt{5265}} = 0'496$$

$$\Rightarrow \beta = \arccos(0'496) = 60'25^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 81'88^\circ$$

→ Si se cortan, calcula el punto P de corte y la ecuación del plano que las contiene.

→ Si se cruzan, la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

$$a) \quad r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{3} = z-3 ; \quad s: x-2 = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-4}{-2}$$

De la ecuación de cada recta, extraemos punto y vector:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(2, -2, 3) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (-1, 3, 1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(2, -4, 4) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_s = (1, -1, -2) \end{cases}$$

Obtenemos el vector $\vec{AB}$:

$$\vec{AB} = (2, -4, 4) - (2, -2, 3) = (0, -2, 1)$$

Construimos las matrices M y M* y calculamos sus rangos:

$$M^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Rango}(M):$$

$$|-1| = -1 \neq 0 ; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

$$\text{Rango}(M^*):$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 2$$

Como $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow$ Las rectas r y s se cortan.

Para determinar el punto de corte P:

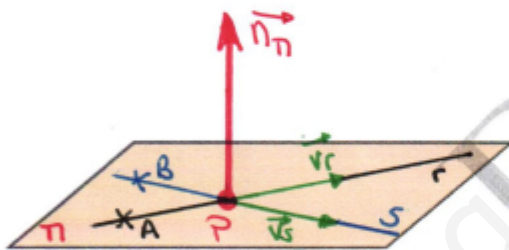
$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = -4 - \alpha \\ z = 4 - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - \lambda = 2 + \alpha \\ -2 + 3\lambda = -4 - \alpha \\ 3 + \lambda = 4 - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1 + E_2 \rightarrow 2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -1$$

Y por tanto, el punto P pedido:

$$P \in r: (2 - \lambda, -2 + 3\lambda, 3 + \lambda) \xRightarrow{\lambda = -1} P(3, -5, 2)$$

Para determinar el plano π que contiene a ambas rectas:



Como ves, $\vec{n}_\pi$ es perpendicular tanto a $\vec{V}_r$ como a $\vec{V}_s$ y por tanto:

$$\vec{n}_\pi = \vec{V}_r \times \vec{V}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-5, -1, -2)$$

Y por tanto: $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_\pi = (-5, -1, -2) \Rightarrow \pi: -5x - y - 2z + D = 0$$

$$A(2, -2, 3) \in \pi \Rightarrow -5 \cdot 2 - (-2) - 2 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow D = 14$$

$$\Rightarrow \pi: -5x - y - 2z + 14 = 0$$

$$0 \text{ bien } \Rightarrow \pi: 5x + y + 2z - 14 = 0$$

$$b) \quad r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1} = z+4 \quad ; \quad s: \frac{x+1}{-4} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}$$

De la ecuación de cada recta extraemos punto y vector:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(3, 2, -4) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_r = (2, -1, 1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(-1, 5, -1) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_s = (-4, 2, -2) \end{cases}$$

Obtenemos el vector $\vec{AB}$:

$$\vec{AB} = (-1, 5, -1) - (3, 2, -4) = (-4, 3, 3)$$

Construimos las matrices M y M^* y calculamos sus rangos:

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Rango}(M): \\ |2 \ 1| = 2 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \end{array}$$

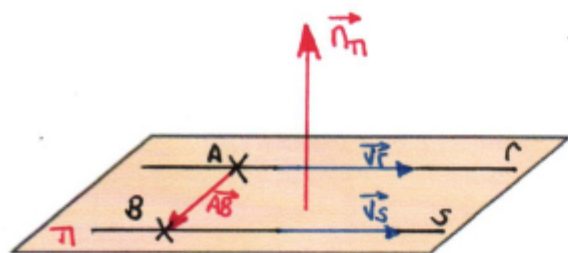
$$\Rightarrow \text{rg}(M) = 1$$

$$\text{Rango}(M^*):$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 2$$

Como $\text{rg}(M) = 1$ y $\text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow$ Las rectas r y s son paralelas

Para determinar el plano π que contiene a ambas rectas:



$$\vec{n}_\pi = \vec{AB} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} 2 & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (6, 10, -2)$$

Construimos las matrices M y M^* y calculamos sus rangos:

$$M^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & -24 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{Rango}(M):$$

$$|-1| = -1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

$$\text{Rango}(M^*):$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & -24 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 2$$

Como $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow$ las rectas r y s se cortan.

Para determinar el punto de corte P :

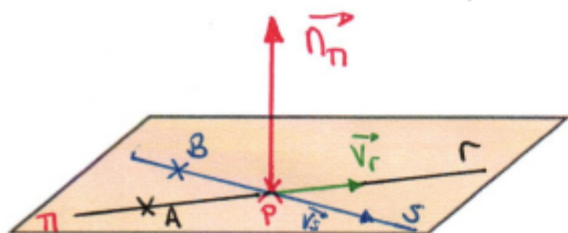
$$r: \begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -26 + 8\lambda \\ z = 10 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - \alpha = \lambda \\ -2 + 2\alpha = -26 + 8\lambda \\ 1 + 3\alpha = 10 - 3\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2E_1 + E_2 \rightarrow 4 = -26 + 10\lambda \Rightarrow 10\lambda = 30 \Rightarrow \lambda = 3$$

y por tanto, el punto P de corte:

$$P \in s: (\lambda, -26 + 8\lambda, 10 - 3\lambda) \xrightarrow{\lambda=3} P(3, -2, 1)$$

Para determinar el plano π que contiene a ambas rectas:



$$\vec{n}_n = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \end{vmatrix} = (-30, 0, -10)$$

Y por tanto: $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_\pi = (-30, 0, -10) \Rightarrow \pi: -30x - 10z + D = 0$$

$$A(3, -2, 1) \Rightarrow -30 \cdot 3 - 10 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = 100$$

$$\Rightarrow \pi: -30x - 10z + 100 = 0$$

y simplificando $\Rightarrow \pi: 3x + z - 10 = 0$

$$d) \quad r: \begin{cases} 2x + z = 4 \\ x + 3y + z = 4 \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} x + y - z = 8 \\ 3x - y + 3z = 18 \end{cases}$$

Construimos las matrices M y M^* y calculamos sus rangos:

Rango (M):

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 3 & 18 \end{array} \right) \quad \begin{aligned} &|2| = 2 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \\ &\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10 \Rightarrow \text{rg}(M) = 3 \end{aligned}$$

Rango (M^*):

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 3 & 18 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{F}_2 + \text{F}_3]{\text{F}_1 + \text{F}_3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 12 \\ -1 & -1 & -1 & -8 \\ 6 & 2 & 0 & 42 \end{vmatrix} \xrightarrow[3\text{F}_3 + \text{F}_4]{\text{F}_2 + \text{F}_3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 12 \\ 6 & 2 & 42 & -180 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & 42 \end{vmatrix} = -180$$

Como $\text{rg}(M) = 3$ y $\text{rg}(M^*) = 4 \Rightarrow$ Las rectas r y s se cruzan.

Pasamos las rectas a paramétricas:

$$\begin{cases} 2x + z = 4 \\ x + 3y + z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \Rightarrow z = 4 - 2\lambda \\ \lambda + 3y + 4 - 2\lambda = 4 \Rightarrow y = \lambda/3 \end{cases}$$

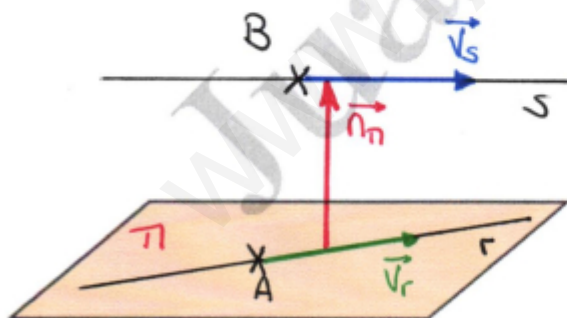
$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda/3 \\ z = 4 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(0, 0, 4) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_r = (1, 1/3, -2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 8 \\ 3x - y + 3z = 18 \end{cases} \xrightarrow{E_1 + E_2} \begin{cases} 4x + 2z = 26 \Rightarrow 2x + z = 13 \\ x = \alpha \\ z = 13 - 2\alpha \end{cases}$$

$$\rightarrow y = 8 + z - x = 8 + 13 - 2\alpha - \alpha = 21 - 3\alpha$$

$$\Rightarrow s: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 21 - 3\alpha \\ z = 13 - 2\alpha \end{cases} ; s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(0, 21, 13) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_s = (1, -3, -2) \end{cases}$$

Buscamos el plano π que contiene a r y es paralelo a s :



$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1/3 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \left(-\frac{20}{3}, 0, -\frac{10}{3}\right)$$

Con lo que $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_\pi = \left(-\frac{20}{3}, 0, -\frac{10}{3}\right) \Rightarrow \pi: -\frac{20}{3}x - \frac{10}{3}z + D = 0$$

$$A = (0, 0, 4) \in \pi \Rightarrow -\frac{10}{3} \cdot 4 + D = 0 \Rightarrow D = \frac{40}{3}$$

Rango (M^*):

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0; \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 1$$

Como $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 1 \Rightarrow$ Las rectas r y s coinciden.

38) Comprueba que las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = y = z-2; \quad s: \begin{cases} x-2z = 5 \\ x-2y = 11 \end{cases}$$

son paralelas y halla la ecuación del plano que las contiene

Pasamos la recta s a paramétricas:

$$\begin{cases} x-2z = 5 \\ x-2y = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \lambda \rightarrow x = 5+2\lambda \\ 2y = x-11 \Rightarrow 2y = -6+2\lambda \\ y = -3+\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = -3+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

De la ecuación de cada recta, extraemos punto y vector:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(1, 0, 2) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (2, 1, 1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(5, -3, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_s = (2, 1, 1) \end{cases}$$

Obtenemos el vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (5, -3, 0) - (1, 0, 2) = (4, -3, -2)$$

Construimos las matrices M y M^* y calculamos sus rangos:

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & | & 4 \\ 1 & 1 & | & -3 \\ 1 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Rango}(M):$$

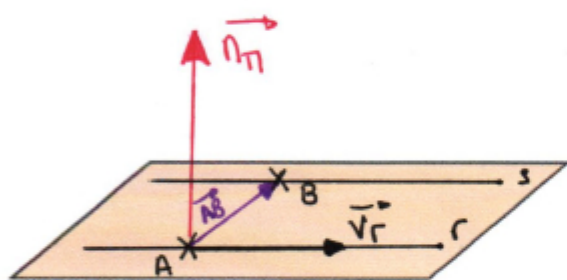
$$|2| = 2 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 1$$

$$\text{Rango}(M^*):$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 2$$

Como $\text{rg}(M) = 1$ y $\text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow$ Las rectas r y s son paralelas.

Para determinar el plano que las contiene:



$$\vec{n}_\pi = \vec{AB} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -8, 10)$$

Con lo que $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_\pi = (-1, -8, 10) \Rightarrow \pi: -x - 8y + 10z + D = 0$$

$$A(1, 0, 2) \in \pi \Rightarrow -1 + 10 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = -19$$

$$\Rightarrow \pi: -x - 8y + 10z - 19 = 0$$

39) ¿Se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre las rectas r y s ?

$$r: \frac{x-1}{2} = y = z+1; \quad s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Empezamos estudiando la posición relativa entre ambas rectas. De cada recta extraemos punto y vector:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(1, 0, -1) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (2, 1, 1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(0, -1, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_s = (2, 1, 1) \end{cases}$$

Obtenemos el vector $\vec{AB}$:

$$\vec{AB} = (0, -1, 0) - (1, 0, -1) = (-1, -1, 1)$$

Construimos las matrices M y M^* y calculamos sus rangos:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Rango}(M): \\ |2| = 2 \neq 0 ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 1 \end{array}$$

$$\text{Rango}(M^*): \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 2$$

Como $\text{rg}(M) = 1$ y $\text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow$ Las rectas son paralelas

Dado que un triángulo no tiene lados paralelos, no se puede construir uno que tenga dos de sus lados sobre las rectas dadas

40) Calcula "b" para que las rectas r y s se corten. ¿Cuál es el punto de corte?

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+1}{2} ; \quad s: \frac{x}{4} = \frac{y-b}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

De cada recta extraemos punto y vector:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(1, -5, -1) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (2, -3, 2) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(0, b, 1) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_s = (4, -1, 2) \end{cases}$$

Determinamos el vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (0, b, 1) - (1, -5, -1) = (-1, b+5, 2)$$

Construimos las matrices M y M^* :

$$M^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & b+5 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Para que dos rectas se corten, debe verificarse que:

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 2$$

Rango(M):

$$|2| = 2 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

Rango(M*):

Para que sea $\text{rg}(M^*) = 2$ se tendrá que verificar que $\det(M^*) = 0$

$$\text{rg}(M^*) = 2 \iff \det(M^*) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & b+5 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4b + 44 = 0 \Rightarrow b = -11$$

$\Rightarrow$ las rectas se cortan cuando $b = -11$

Para determinar el punto de corte:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 - 3\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} x = 4\alpha \\ y = -11 - \alpha \\ z = 1 + 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda = 4\alpha \\ -5 - 3\lambda = -11 - \alpha \\ -1 + 2\lambda = 1 + 2\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1 + 4E_2 \rightarrow -19 - 10\lambda = -44 \Rightarrow -10\lambda = -25 \Rightarrow \lambda = 5/2$$

Y así, el punto de corte:

$$P \in r: (1 + 2\lambda, -5 - 3\lambda, -1 + 2\lambda) \xRightarrow{\lambda = 5/2} P(6, -\frac{25}{2}, 4)$$

41) Determina el valor de "a" para que las rectas r y s sean coplanarias:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-a}{1} = \frac{z}{0} \quad ; \quad s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Calcula en ese caso, la ecuación del plano π que las contiene.

De cada recta extraemos punto y vector:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(0, a, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 0) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(1, 1, -1) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_s = (1, -1, 1) \end{cases}$$

Determinamos el vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1) - (0, a, 0) = (1, 1-a, -1)$$

Construimos las matrices M y M^* :

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & | & 1-a \\ 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Rango}(M):$$

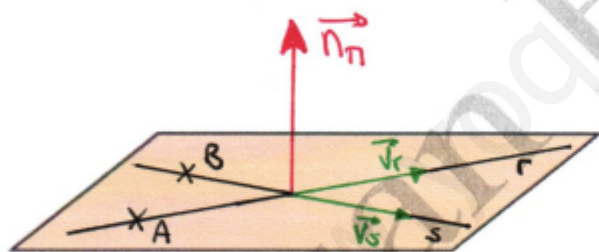
$$|1| = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

Para que las rectas sea coplanarias, las rectas no pueden cruzarse. Para que no se crucen, tiene que ser $\text{rg}(M^*) < 3$, y para ello, tiene que ser $\det(M^*) = 0$.

Así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1-a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a+2=0 \Rightarrow a=-2$$

Para determinar el plano que las contiene:



$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -2)$$

Con lo que $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_\pi = (1, -1, -2) \Rightarrow \pi: x - y - 2z + D = 0$$

$$B(1, 1, -1) \in \pi \Rightarrow 1 - 1 - 2(-1) + D = 0 \Rightarrow D = -2$$

$$\Rightarrow \pi: x - y - 2z - 2 = 0$$

42) Estudiar en función de "k" la posición relativa entre las rectas:

$$r: \begin{cases} x+y+z+3=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases} \quad ; \quad s: \frac{x+1}{2} = y+1 = \frac{z+m}{-2}$$

En el caso de que se corten, calcular el punto de corte.

Pasamos la recta r a paramétricas:

$$\begin{cases} x+y+z+3=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases} \xrightarrow{E_1+E_2} 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow -1+y+z+3=0 \\ &\quad y+z=-2 \end{aligned} \begin{cases} z=\lambda \\ y=-2-\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=-1 \\ y=-2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

De cada recta extraemos punto y vector:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(-1, -2, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (0, -1, 1) \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(-1, -1, -m) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_s = (2, 1, -2) \end{cases}$$

Determinamos el vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -m) - (-1, -2, 0) = (0, 1, -m)$$

Construimos las matrices M y M^* y estudiamos los rangos:

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \vdots & 0 \\ -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -2 & \vdots & -m \end{pmatrix} \quad \text{Rango}(M):$$

$$|-1| = -1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

Rango (M^*):

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -m \end{vmatrix} = -2m + 2 \Rightarrow -2m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1$$

$\Rightarrow$ Si $m \neq 1$:

$rg(M) = 2$ y $rg(M^*) = 3 \Rightarrow$ Las rectas r y s se cruzan

$\Rightarrow$ Si $m = 1$:

$rg(M) = 2$ y $rg(M^*) = 2 \Rightarrow$ Las rectas se cortan.

Para determinar el punto de corte:

$$r: \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = -1 - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = -1 + 2\alpha \\ -2 - \lambda = -1 + \alpha \\ \lambda = -1 - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1 \rightarrow -1 = -1 + 2\alpha \Rightarrow \alpha = 0$$

Y por tanto, el punto de corte:

$$P \in s: (-1 + 2\alpha, -1 + \alpha, -1 - 2\alpha) \xrightarrow{\alpha=0} P(-1, -1, -1)$$

43) Calcula el valor de "m" para que las rectas:

$$r: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{m^2} = \frac{z-m}{-4} \quad ; \quad s: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

sean paralelas y determina la ecuación del plano π que las contiene.

De la ecuación de cada recta extraemos punto y vector:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(1, -1, m) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (4, m^2, -4) \end{cases} ; \quad s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(2, 0, 1) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_s = (1, 1, -1) \end{cases}$$

Determinamos el vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0, 1) - (1, -1, m) = (1, 1, 1-m)$$

Construimos las matrices M y M^* :

$$M^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 & : & 1 \\ m^2 & 1 & : & 1 \\ -4 & -1 & : & 1-m \end{pmatrix} \quad \text{Cuando dos rectas son paralelas se verifica:}$$

$$\text{rg}(M) = 1 \text{ y } \text{rg}(M^*) = 2$$

Rango (M):

$$|4| = 4 \neq 0$$

$$\text{rg}(M) = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ m^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 4 - m^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\text{rg}(M) = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Si $m = -2$

Rango (M*):

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 2$$

las rectas son paralelas

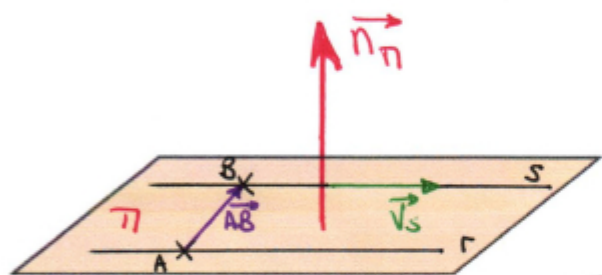
$\Rightarrow$ Si $m=2$

Rango (M^*):

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 1$$

Las rectas coinciden.

Por tanto, las rectas r y s son paralelas cuando $m=-2$
y en ese caso, el plano que las contiene:



$$\vec{n}_\pi = \vec{AB} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4, 4, 0)$$

Con lo que $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_\pi = (-4, 4, 0) \Rightarrow \pi: -4x + 4y + D = 0$$

$$B(2, 0, 1) \in \pi \Rightarrow -4 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = 8$$

$$\Rightarrow \pi: -4x + 4y + 8 = 0$$

$$\text{y simplificando} \Rightarrow \pi: x - y - 2 = 0$$

44) Determina la recta perpendicular común a las rectas:

$$a) \quad r: \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

Empezamos pasando cada recta dada a paramétricas

$$\left. \begin{array}{l} x+y=z+4 \\ x+2y=7 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} z=x+y-4=7-2\lambda+\lambda-4=3-\lambda \\ y=\lambda \longrightarrow x=7-2\lambda \end{array}$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x=7-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases} \quad ; \quad r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(7,0,3) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (-2, 1, -1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x-2=0 \\ y+3=0 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ y=-3 \end{array} \Rightarrow z=\alpha$$

$$\Rightarrow s: \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=\alpha \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(2,-3,0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_s = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Determinamos el vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (2, -3, 0) - (7, 0, 3) = (-5, -3, -3)$$

Construimos las matrices M y M^* y estudiamos sus rangos:

$$M^* = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{array} \right) \quad \text{Rango}(M):$$

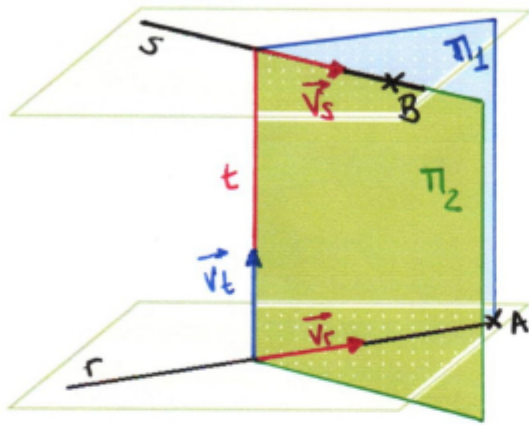
$$|-2| = -2 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

Rango(M^*):

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 3$$

$\Rightarrow$ Como $\text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow$ las rectas r y s se cruzan

Dado que las rectas se cruzan, calcularemos la recta t perpendicular común según:



Calculamos el vector $\vec{v}_t$ teniendo en cuenta que es perpendicular tanto a $\vec{v}_r$ como a $\vec{v}_s$:

$$\vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, 0)$$

Calculamos la ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r y a la perpendicular común t :

$$\vec{n}_{\pi_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2, -1, -5)$$

con lo que $\pi_1: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_{\pi_1} = (2, -1, -5) \Rightarrow \pi_1: 2x - y - 5z + D = 0$$

$$A(7, 0, 3) \in \pi_1 \Rightarrow 2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow D = 1$$

$$\Rightarrow \pi_1: 2x - y - 5z + 1 = 0$$

Calculamos la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta s y a la perpendicular común t :

$$\vec{n}_{\pi_2} = \vec{v}_s \times \vec{v}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 1, 0)$$

Con lo que $\pi_2: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_{\pi_2} = (-2, 1, 0) \Rightarrow \pi_2: -2x + y + D = 0$$

$$B(2, -3, 0) \in \pi_2 \Rightarrow -2 \cdot 2 + (-3) + D = 0 \Rightarrow D = 7$$

$$\Rightarrow \pi_2: -2x + y + 7 = 0$$

La recta t pedida es la intersección entre los planos π_1 y π_2 :

$$t: \begin{cases} 2x - y - 5z + 1 = 0 \\ -2x + y + 7 = 0 \end{cases}$$

Y si quieres, puedes expresarla en paramétricas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - 5z + 1 = 0 \\ -2x + y + 7 = 0 \end{cases} \xrightarrow{E_1 + E_2} -5z + 8 = 0 \rightarrow z = 8/5$$

$$\xrightarrow{x = \beta} x = \beta \Rightarrow y = -7 + 2\beta \Rightarrow t: \begin{cases} x = \beta \\ y = -7 + 2\beta \\ z = 8/5 \end{cases}$$

$$b) \quad r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}; \quad s: \frac{x-4}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$$

De la ecuación de cada recta extraemos punto y vector:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(1, 1, 2) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_r = (-1, 2, 1) \end{cases}; \quad s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(4, 4, 5) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_s = (4, 1, 2) \end{cases}$$

Determinamos el vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (4, 4, 5) - (1, 1, 2) = (3, 3, 3)$$

Construimos las matrices M y M^* y estudiamos sus rangos:

$$M^* = \begin{pmatrix} -1 & 4 & : & 3 \\ 2 & 1 & : & 3 \\ 1 & 2 & : & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Rango}(M):$$

$$|-1| = -1 \neq 0;$$

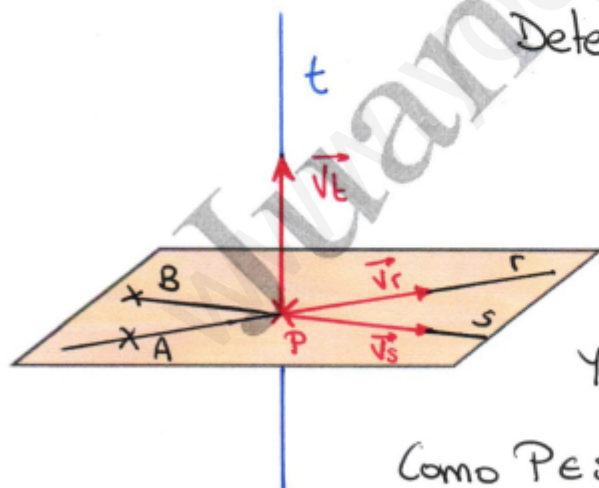
$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

$$\text{Rango}(M^*):$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 2$$

$\Rightarrow$ Como $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow$ las rectas r y s se cortan.

Dado que r y s se cortan, calculamos la recta t perpendicular común según:



Determinamos el punto de corte P :

$$\begin{cases} 1 - \lambda = 4 + 4\alpha \\ 1 + 2\lambda = 4 + \alpha \\ 2 + \lambda = 5 + 2\alpha \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_1 + E_3 \rightarrow 3 = 9 + 6\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow -6 = 6\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha = -1 \end{array} \right.$$

y así:

$$\text{Como } P \text{ es: } (4 + 4\alpha, 4 + \alpha, 5 + 2\alpha) \xRightarrow{\alpha = -1} P(0, 3, 3)$$

Por otro lado:

$$\overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3, 6, -9) \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (1, 2, -3) \quad (\text{Simplificando})$$

Y por tanto, la recta pedida es $t: \begin{cases} x = \beta \\ y = 3 + 2\beta \\ z = 3 - 3\beta \end{cases}$

45) Halla la ecuación de la recta "s" que pasando por el punto $P(2, 0, -1)$ corta a las rectas:

$$r_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} \quad ; \quad r_2: \begin{cases} x+y+4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases}$$

Primero pasamos la recta r_2 a paramétricas:

$$\begin{cases} x+y+4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x=4-y=7-3\lambda \\ y=-3+3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r_2: \begin{cases} x=7-3\lambda \\ y=-3+3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

De cada recta extraemos punto y vector:

$$r_1: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(2, 2, -1) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_{r_1} = (2, -1, 1) \end{cases} \quad ; \quad r_2: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(7, -3, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_{r_2} = (-3, 3, 1) \end{cases}$$

Determinamos el vector $\vec{AB}$:

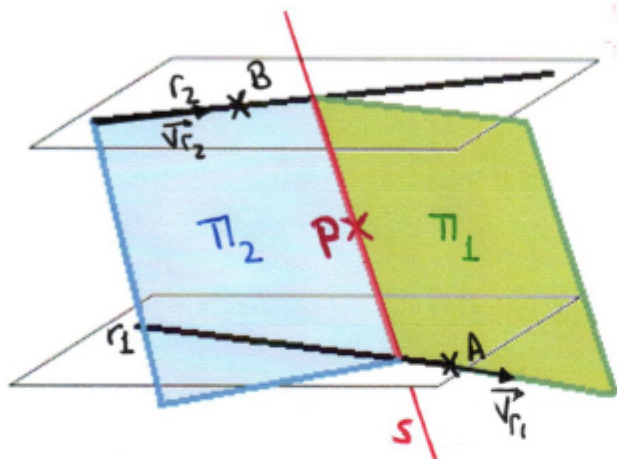
$$\vec{AB} = (7, -3, 0) - (2, 2, -1) = (5, -5, 1)$$

Construimos las matrices M y M^* y calculamos sus rangos:

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Rango}(M): \\ |2| = 2 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 2 \end{array}$$

$$\quad \begin{array}{l} \text{Rango}(M^*): \\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 3 \end{array}$$

Como $\text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow$ las rectas r_1 y r_2 se cruzan y por tanto determinamos la recta s que pasando por P corta a ambas rectas r_1 y r_2 según:



Determinamos la ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r_1 y al punto P :

$$\overrightarrow{AP} = (2, 0, -1) - (2, 2, -1) = (0, -2, 0)$$

$$\vec{n}_{\pi_1} = \overrightarrow{AP} \times \vec{v}_{r_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 0, 4)$$

Con lo que $\pi_1: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_{\pi_1} = (-2, 0, 4) \Rightarrow \pi_1: -2x + 4z + D = 0$$

$$P(2, 0, -1) \in \pi_1 \Rightarrow -2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + D = 0 \Rightarrow D = 8$$

$$\Rightarrow \pi_1: -2x + 4z + 8 = 0$$

$$\text{Y simplificando} \Rightarrow \pi_1: x - 2z - 4 = 0$$

Ahora determinamos la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r_2 y al punto P :

$$\overrightarrow{BP} = (2, 0, -1) - (7, -3, 0) = (-5, 3, -1)$$

$$\vec{n}_{\pi_2} = \vec{BP} \times \vec{v}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (6, 8, -6)$$

Con lo que $\pi_2: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_{\pi_2} = (6, 8, -6) \Rightarrow \pi_2: 6x + 8y - 6z + D = 0$$

$$P(2, 0, -1) \in \pi_2 \Rightarrow 6 \cdot 2 - 6 \cdot (-1) + D = 0 \Rightarrow D = -18$$

$$\Rightarrow \pi_2: 6x + 8y - 6z - 18 = 0$$

$$\text{Y simplificando} \Rightarrow \pi_2: 3x + 4y - 3z - 9 = 0$$

La recta s pedida es la intersección entre los planos π_1 y π_2 :

$$s: \begin{cases} x - 2z - 4 = 0 \\ 3x + 4y - 3z - 9 = 0 \end{cases}$$

Y, si quieres, puedes expresarla en paramétricas resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2z - 4 = 0 \\ 3x + 4y - 3z - 9 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow z = \beta \Rightarrow x = 4 + 2\beta \\ \rightarrow 3(4 + 2\beta) + 4y - 3\beta - 9 = 0 \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow 12 + 6\beta + 4y - 3\beta - 9 = 0 \Rightarrow 4y = -3 - 3\beta \Rightarrow y = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\beta$$

$$\Rightarrow s: \begin{cases} x = 4 + 2\beta \\ y = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\beta \\ z = \beta \end{cases}$$

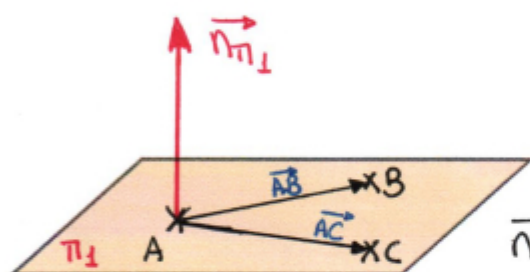
46) Estudia la posición relativa de los planos:

$\pi_1 \equiv$ determinado por $A(0,0,0)$, $B(2,2,0)$ y $C(1,1,2)$

$\pi_2 \equiv$ perpendicular a $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ y que pasa por el punto $P(1,0,1)$

Determinemos la ecuación de cada uno de los planos:

Plano π_1 :



$$\overrightarrow{AB} = (2,2,0) - (0,0,0) = (2,2,0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1,1,2) - (0,0,0) = (1,1,2)$$

$$\vec{n}_{\pi_1} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4, -4, 0)$$

Con lo que $\pi_1: Ax + By + Cz + D = 0$

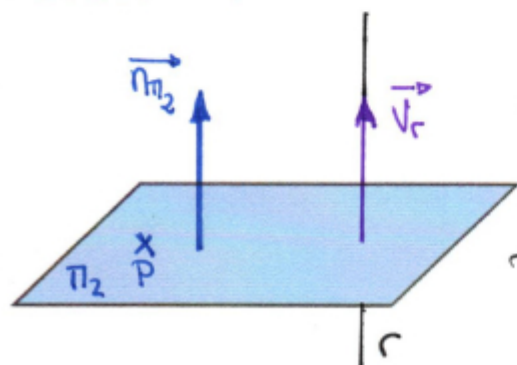
$$\vec{n}_{\pi_1} = (4, -4, 0) \Rightarrow \pi_1: 4x - 4y + D = 0$$

$$A(0,0,0) \in \pi_1 \Rightarrow D = 0$$

$$\Rightarrow \pi_1: 4x - 4y = 0$$

$$\text{Simplificando} \Rightarrow \pi_1: x - y = 0$$

Plano π_2 :



$$\pi_2: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\text{Como } r \perp \pi_2 \Rightarrow \vec{n}_{\pi_2} = \vec{v}_r = (2, -1, 3)$$

$$\Rightarrow \pi_2: 2x - y + 3z + D = 0$$

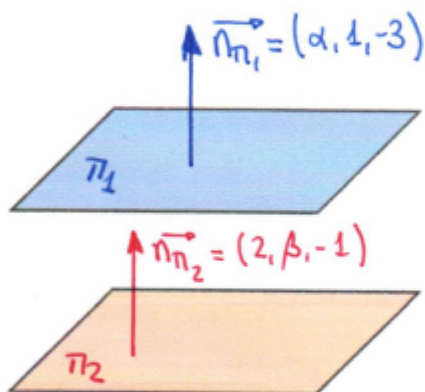
$$P(1,0,1) \in \pi_2 \Rightarrow 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -5$$

$$\Rightarrow \pi_2: 2x - y + 3z - 5 = 0$$

Y ahora estudiamos la posición relativa evaluando la proporcionalidad entre los coeficientes de las ecuaciones:

$$\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{3} \rightarrow \text{los planos } \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ se cortan.}$$

47) Calcula α y β para que los planos $\pi_1: \alpha x + y - 3z - 1 = 0$ y $\pi_2: 2x + \beta y - z - 3 = 0$ sean paralelos. ¿Pueden ser coincidentes?



Cuando dos planos son paralelos también son paralelos sus vectores normales y por tanto:

$$\vec{n}_{\pi_1} \parallel \vec{n}_{\pi_2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\beta} = \frac{-3}{-1}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 3 \rightarrow \alpha = 6$$

$$\frac{1}{\beta} = 3 \rightarrow \beta = \frac{1}{3}$$

Si $\alpha = 6$ y $\beta = \frac{1}{3}$:

$$\frac{6}{2} = \frac{1}{1/3} = \frac{-3}{-1} \neq \frac{-1}{-3} \Rightarrow$$

Los planos son paralelos y no son coincidentes

48) Estudia la posición relativa entre las rectas y planos siguientes:

$$a) r: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases} ; \pi: 2x - 3y + z - 2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Per: } (3-\lambda, 2, -1+3\lambda) \\ \pi: 2x-3y+z-2=0 \end{array} \right\} 2 \cdot (3-\lambda) - 3 \cdot 2 - 1 + 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{6} - 2\lambda - \cancel{6} - 1 + 3\lambda - 2 = 0$$

$\lambda = 3 \Rightarrow$ **SOLUCIÓN ÚNICA** $\Rightarrow$ la recta y el plano se cortan

Para determinar el punto de corte:

$$P(3-\lambda, 2, -1+3\lambda) \xRightarrow{\lambda=3} P(0, 2, 8)$$

$$b) \ r: \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -1+3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} ; \pi: 2x - y + 3z - 8 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Per: } (2+3\lambda, -1+3\lambda, -\lambda) \\ \pi: 2x - y + 3z - 8 = 0 \end{array} \right\} 2(2+3\lambda) + 1 - 3\lambda - 3\lambda - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 6\lambda - 7 - 6\lambda = 0$$

$0\lambda = 3 \Rightarrow$ **SIN SOLUCIÓN** $\nexists \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Recta y plano paralelos

$$c) \ r: \begin{cases} 2x + y - 3z + 3 = 0 \\ 5x + 5y - 7z + 1 = 0 \end{cases} ; \pi: x + 3y - z - 5 = 0$$

Construimos las matrices M y M^* y calculamos sus rangos:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -3 \\ 5 & 5 & -7 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \end{array} \right)$$

Rango(M):

$$|2| = 2 \neq 0 ; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

Rango (M^*):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -50 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 3$$

Como $\text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow$ Recta y plano paralelos

49) Estudia en función de "a" la posición relativa de la recta $r: \begin{cases} 3x + ay + z = 1 \\ 2x + 6y - 2z = 6 \end{cases}$ y el plano $\pi: x + y + z = 1$

Construimos las matrices M y M^* y estudiamos sus rangos:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \det(M) = \begin{vmatrix} 3 & a & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4a + 20$$

$$\det(M) = 0 \rightarrow -4a + 20 = 0 \Rightarrow a = 5$$

Si $a = 5$ $\rightarrow \det(M) = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) < 3$

Rango (M):

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad |3| = 3 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

$$\rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

Rango (M^*):

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 3$$

Como $\text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow$ Recta y plano paralelos.

Si $a \neq 5$ $\rightarrow \det(M) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(M) = 3 \Rightarrow \operatorname{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Recta y plano secantes.

50) Estudia la posición relativa de $\pi: x + ay - z = 1$ y

$$r: \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases} \text{ según los valores de "a".}$$

Construimos las matrices M y M^* y estudiamos sus rangos:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a-1 \end{array} \right); \det(M) = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + a + 2$$

$$\det(M) = 0 \rightarrow -a^2 + a + 2 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

Si $a = 2$ $\rightarrow \det(M) = 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(M) < 3$

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Rango(M):

$$|11| = 1 \neq 0; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(M) = 2$$

Rango(M*):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(M^*) = 2$$

Como $\operatorname{rg}(M) = 2$ y $\operatorname{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow$ Recta contenida en el plano

Si $a = -1 \rightarrow \det(M) = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) < 3$

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Rango}(M): \\ |1| = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \\ \rightarrow \text{rg}(M) = 2 \end{array}$$

Rango(M^*):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 3$$

Como $\text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow$ Recta y plano paralelos

Si $a \neq 2 \wedge a \neq -1 \rightarrow \det(M) \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 3 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 3$

$\Rightarrow$ Recta y plano secantes.

51) Dada la recta $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$ y el plano $\pi: ax - y + 4z - 2 = 0$

a) Calcula el valor de "a" para que r sea paralela al plano π

b) ¿Existe algún valor de "a" para el que la recta sea perpendicular al plano π ?

Estudiamos la posición relativa y luego contestaremos las preguntas:

$$\left. \begin{array}{l} P \in r: (\lambda, 3+5\lambda, 3+2\lambda) \\ \pi: ax - y + 4z - 2 = 0 \end{array} \right\} a\lambda - 3 - 5\lambda + 4(3+2\lambda) - 2 = 0 \Rightarrow$$

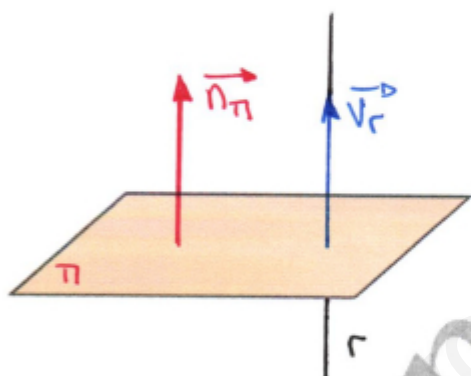
$$\Rightarrow a\lambda - 5\lambda + 8\lambda - 3 + 12 - 2 = 0$$

$$(a+3)\lambda = -7 \rightarrow a+3=0 \Rightarrow a=-3$$

(Si $a = -3$) $\Rightarrow 0\lambda = -7 \Rightarrow$ SIN SOLUCIÓN $\nexists \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Recta y plano paralelos

(Si $a \neq -3$) $\Rightarrow \lambda = \frac{-7}{a+3} \Rightarrow$ SOLUCIÓN ÚNICA $\Rightarrow$ Recta y plano secantes

Veamos si hay algún valor $a \neq -3$ para el que además de cortarse, lo hacen perpendicularmente:



Como ves, cuando la recta esté perpendicular al plano, los vectores $\vec{n}_\pi$ y $\vec{v}_r$ serán paralelos. De las ecuaciones dadas, extraemos dichos vectores:

$$\vec{v}_r = (1, 5, 2) ; \vec{n}_\pi = (a, -1, 4)$$

y como vemos:

$$\frac{1}{a} = \frac{5}{-1} \neq \frac{2}{4} \rightarrow \text{No hay ningún valor de "a" para}$$

que $\vec{v}_r$ sea paralelo a $\vec{n}_\pi$ y por tanto, la recta y el plano nunca estarán perpendiculares.

52) Estudia en función de k la posición relativa entre la recta $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ y el plano $\pi: x + ky - z - 6 = 0$

$$\text{Per: } \left. \begin{matrix} (\lambda, 1 - \lambda, -1 - \lambda) \\ \pi: x + ky - z - 6 = 0 \end{matrix} \right\} \lambda + k \cdot (1 - \lambda) - (-1 - \lambda) - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda + k - k\lambda + 1 + \lambda - 6 = 0$$

$$2\lambda - k\lambda = 5 - k$$

$$(2 - k) \cdot \lambda = 5 - k \Rightarrow 2 - k = 0 \Rightarrow k = 2$$

Si $k = 2$

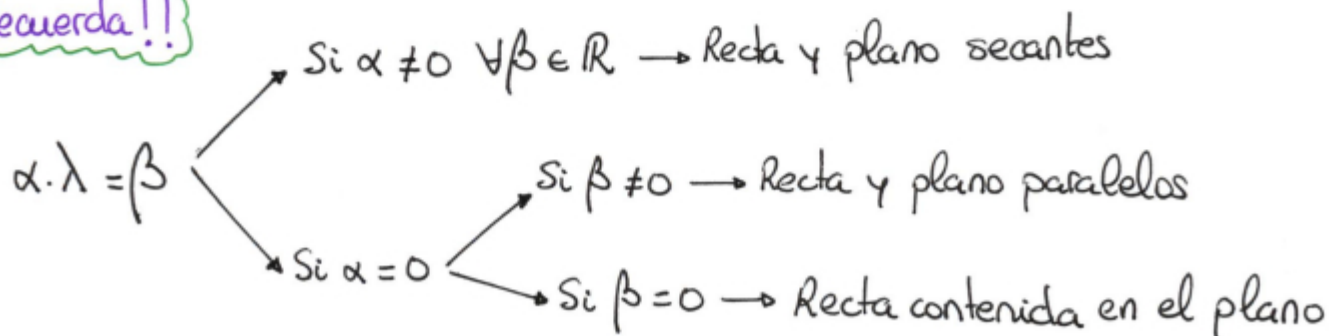
$$0\lambda = 3 \Rightarrow \text{NO EXISTE SOLUCIÓN } \nexists \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Recta y plano paralelos}$$

Si $k \neq 2$

$$(2 - k) \cdot \lambda = 5 - k$$

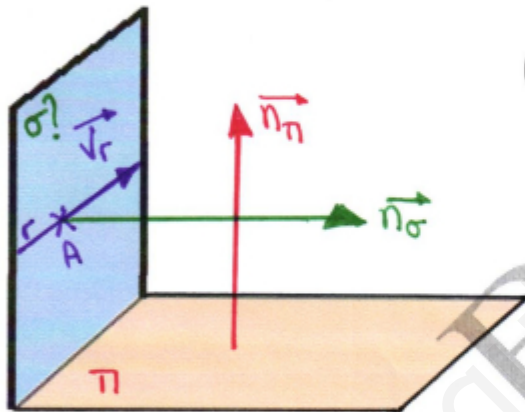
$$\lambda = \frac{5 - k}{2 - k} \Rightarrow \text{SOLUCIÓN ÚNICA} \Rightarrow \text{Recta y plano secantes}$$

Recuerda!!



53) Dados el plano $\pi: 2x - y + mz - 4 = 0$ y la recta $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2}$, calcula la ecuación del plano σ perpendicular a π que contenga a r , sabiendo que π y r son paralelos.

Hacemos una representación aproximada para que entiendas el ejercicio:



De las ecuaciones dadas extraemos la información:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(1, -2, 1) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (3, 2, 2) \end{cases}$$

$$\pi \rightarrow \vec{n}_\pi = (2, -1, m)$$

Como nos dicen que π y r son paralelos, los vectores $\vec{V}_r$ y $\vec{n}_\pi$ serán perpendiculares y por tanto:

$$\text{Si } \pi \parallel r \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{V}_r \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{V}_r = 0$$

$$(2, -1, m) \cdot (3, 2, 2) = 0 \Rightarrow 6 - 2 + 2m = 0 \Rightarrow m = -2$$

Por otro lado, el vector normal $\vec{n}_\sigma$ es perpendicular tanto a $\vec{V}_r$ como a $\vec{n}_\pi$ y por ello:

$$\vec{n}_\sigma = \vec{V}_r \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-2, 10, -7)$$

Por tanto, $\sigma: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_\sigma = (-2, 10, -7) \Rightarrow \sigma: -2x + 10y - 7z + D = 0$$

$$A(1, -2, 1) \in \sigma \Rightarrow -2 \cdot 1 + 10 \cdot (-2) - 7 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = 29$$

$$\Rightarrow \sigma: -2x + 10y - 7z + 29 = 0$$

54) Dados el plano $\pi: ax + 2y - 4z - b = 0$ y la recta $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$, estudia su posición relativa en función del valor de los parámetros a y b .

$$\left. \begin{array}{l} P \in r: (3+4\lambda, 1-4\lambda, -3+\lambda) \\ \pi: ax + 2y - 4z - b = 0 \end{array} \right\} a(3+4\lambda) + 2(1-4\lambda) - 4(-3+\lambda) - b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a + 4a\lambda + 2 - 8\lambda + 12 - 4\lambda - b = 0$$

$$4a\lambda - 12\lambda = b - 3a - 14$$

$$(4a - 12) \cdot \lambda = b - 3a - 14 \Rightarrow 4a - 12 = 0 \Rightarrow a = 3$$

Si $a \neq 3 \forall b \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ Recta y plano secantes

Si $a = 3$ $\rightarrow b - 23 = 0 \Rightarrow b = 23$

$\hookrightarrow a = 3 \wedge b \neq 23 \rightarrow$ Recta y plano paralelos.

$\hookrightarrow a = 3 \wedge b = 23 \rightarrow$ Recta contenida en el plano.

55) Dados los planos $\pi_1: mx+2y-3z-1=0$ y $\pi_2: 2x-4y+6z+5=0$ calcula si es posible el valor de m para que sean:

a) Paralelos

b) Perpendiculares

Dos planos paralelos tiene vectores normales paralelos:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_{\pi_1} = (m, 2, -3) \\ \vec{n}_{\pi_2} = (2, -4, 6) \end{array} \right\} \pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow \vec{n}_{\pi_1} \parallel \vec{n}_{\pi_2} \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = -1$$

Dos planos perpendiculares tiene vectores normales perpendiculares:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \Rightarrow \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m, 2, -3) \cdot (2, -4, 6) = 0 \Rightarrow 2m - 8 - 18 = 0 \Rightarrow m = 13$$

56) Halla el valor de k para que las rectas

$$r: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2} ; s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-k}{k-1} = \frac{z-3}{3}$$

se corten perpendicularmente. Calcula además el punto P de intersección, la ecuación del plano que las contiene y la recta perpendicular común a ambas.

De cada recta extraemos punto y vector:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \text{Punto} \rightarrow A(0, 1, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_r = (4, -2, 2) \end{array} \right. ; s: \left\{ \begin{array}{l} \text{Punto} \rightarrow B(1, k, 3) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_s = (1, k-1, 3) \end{array} \right.$$

Cuando dos rectas son perpendiculares, también son perpendiculares sus vectores directores:

$$\text{Si } r \perp s \Rightarrow \vec{V}_r \perp \vec{V}_s \Rightarrow \vec{V}_r \cdot \vec{V}_s = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4, -2, 2) \cdot (1, k-1, 3) = 0 \Rightarrow 4 - 2k + 2 + 6 = 0 \Rightarrow k = 6$$

Ahora verificaremos que para $k=6$ las rectas efectivamente se cortan estudiando su posición relativa.

Determinamos el vector $\vec{AB}$:

$$\vec{AB} = (1, 6, 3) - (0, 1, 0) = (1, 5, 3)$$

Construimos las matrices M y M^* y estudiamos los rangos:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \quad \text{Rango}(M):$$

$$|4| = 4 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

Rango(M^*):

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 2$$

Como $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow$ las rectas se cortan

$\Rightarrow$ Si $k=6$, las rectas se cortan perpendicularmente.

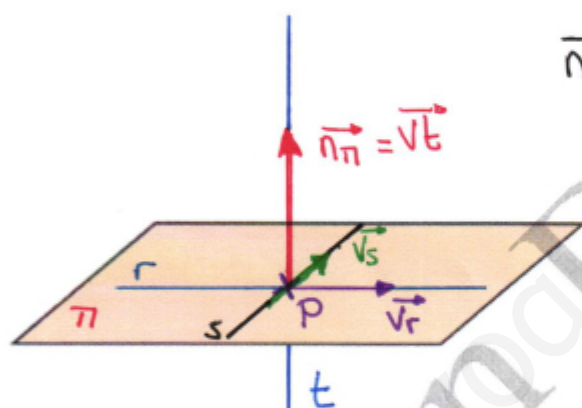
Determinamos el punto de corte:

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 6 + 5\alpha \\ z = 3 + 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda = 1 + \alpha \\ 1 - 2\lambda = 6 + 5\alpha \\ 2\lambda = 3 + 3\alpha \end{cases} \Rightarrow E_2 + E_3$$

$$\rightarrow 1 = 9 + 8\alpha \Rightarrow \alpha = -1$$

$$\text{Y como } P \in s: (1 + \alpha, 6 + 5\alpha, 3 + 3\alpha) \Rightarrow P(0, 1, 0) \quad \alpha = -1$$

Para determinar la ecuación del plano que las contiene y la perpendicular común:



$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-16, -10, 22)$$

$$\text{Simplificando} \Rightarrow \vec{n}_\pi = (8, 5, -11)$$

$$\text{Por tanto, } \pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\vec{n}_\pi = (8, 5, -11) \Rightarrow \pi: 8x + 5y - 11z + D = 0$$

$$P(0, 1, 0) \Rightarrow 5 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = -5$$

$$\Rightarrow \pi: 8x + 5y - 11z - 5 = 0$$

Y la recta perpendicular común pedida:

$$t: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow P(0, 1, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_t = (8, 5, -11) \end{cases} \Rightarrow t: \begin{cases} x = 8\beta \\ y = 1 + 5\beta \\ z = -11\beta \end{cases}$$

57) Estudia la posición relativa de los tres planos:

a) $\pi_1: 2x - y + 3z = 8$; $\pi_2: x + 3y - z = 5$; $\pi_3: 2x + 6y - 2z = 5$

Construimos las matrices M y M^* y estudiamos sus rangos:

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 8 \\ 1 & 3 & -1 & | & 5 \\ 2 & 6 & -2 & | & 5 \end{pmatrix} \quad \text{Rango}(M):$$

$$|2| = 2 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

Rango(M^*):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -35 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 3$$

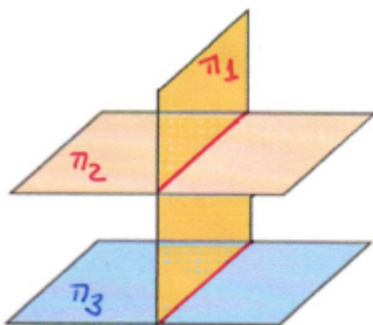
Como $\text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M^*) = 3$ tenemos dos opciones posibles.

Deduciremos la posición estudiando la posición relativa de los planos por parejas:

$$\pi_1 \text{ y } \pi_2 \rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{3} \Rightarrow \text{Se cortan}$$

$$\pi_1 \text{ y } \pi_3 \rightarrow \frac{2}{2} \neq \frac{-1}{6} \Rightarrow \text{Se cortan}$$

$$\pi_2 \text{ y } \pi_3 \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{5}{5} \Rightarrow \text{Paralelos}$$



Tenemos dos planos paralelos y un tercer plano que los corta determinando dos rectas paralelas.

$$b) \pi_1: x+2y-z-3=0; \pi_2: 3y+2z-1=0; \pi_3: x+y+z-2=0$$

Construimos las matrices M y M^* y estudiamos sus rangos:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \text{Rango}(M):$$

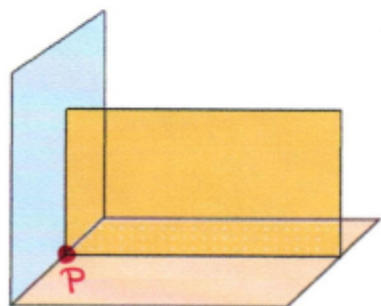
$$|11| = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 3$$

Como $\text{rg}(M) = 3 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow$ los tres planos se cortan en un punto P que determinamos resolviendo el sistema de ecuaciones anterior por la regla de Cramer (ya que al ser $\text{rg}(M) = 3$ el teorema de Rouché nos asegura que se trata de un sistema compatible determinado):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$



los tres planos se cortan en el punto $P\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$$c) \pi_1: 2x - y + z - 3 = 0; \pi_2: x - y + z - 2 = 0; \pi_3: 3x - y + z - 4 = 0$$

Construimos las matrices M y M^* y estudiamos sus rangos:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad \text{Rango}(M):$$

$$|2| = 2 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

Rango(M^*):

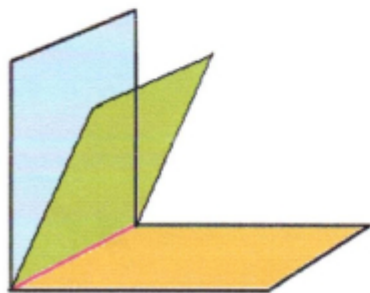
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 2$$

Como $\text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M^*) = 2$ tenemos dos opciones posibles. Deduiremos la posición estudiando la posición relativa de los planos por parejas:

$$\pi_1 \text{ y } \pi_2 \rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-1} \rightarrow \text{Se cortan}$$

$$\pi_1 \text{ y } \pi_3 \rightarrow \frac{2}{3} \neq \frac{-1}{-1} \rightarrow \text{Se cortan}$$

$$\pi_2 \text{ y } \pi_3 \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{-1}{-1} \rightarrow \text{Se cortan}$$



Los tres planos se cortan entre sí a lo largo de la misma recta.

$$d) \pi_1: x-y+z=1; \pi_2: 3x+y-2z=0; \pi_3: 2x+2y-3z+4=0$$

Construimos las matrices M y M^* y estudiamos sus rangos:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -4 \end{array} \right) \quad \text{Rango}(M):$$

$$|1| = 1 \neq 0; \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{array} \right| = 4 \neq 0$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{array} \right| = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

Rango(M^*):

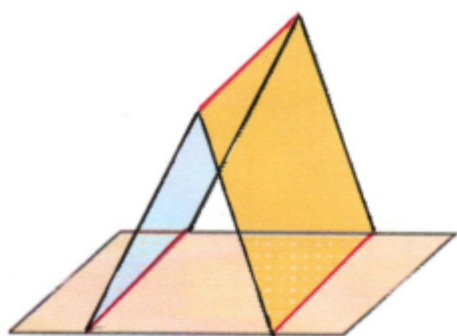
$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{array} \right| = -12 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 3$$

Como $\text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M^*) = 3$ tendremos dos opciones posibles. Deduciremos la posición estudiando la posición relativa de los planos por parejas:

$$\pi_1 \text{ y } \pi_2 \rightarrow \frac{1}{3} \neq -\frac{1}{1} \rightarrow \text{Se cortan}$$

$$\pi_1 \text{ y } \pi_3 \rightarrow \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} \rightarrow \text{Se cortan}$$

$$\pi_2 \text{ y } \pi_3 \rightarrow \frac{3}{2} \neq \frac{1}{2} \rightarrow \text{Se cortan}$$



Los tres planos se cortan dos a dos según tres rectas paralelas.

58) Estudia en función de los valores de "k" la posición relativa de los tres planos de ecuación:

a) $\pi_1: 2x - ky + 4z = 0$; $\pi_2: x + y + 7z = 0$; $\pi_3: kx - y + 13z = 0$

Construimos las matrices M y M^* y estudiamos sus rangos:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -k & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ k & -1 & 13 & 0 \end{array} \right); \det(M) = \begin{vmatrix} 2 & -k & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ k & -1 & 13 \end{vmatrix} = -7k^2 + 9k + 36$$

$$\det(M) = 0 \rightarrow -7k^2 + 9k + 36 = 0 \begin{cases} k = 3 \\ k = -\frac{12}{7} \end{cases}$$

Si $k \neq 3 \wedge k \neq -\frac{12}{7} \rightarrow \det(M) \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 3 \Rightarrow \text{rg}(M^*) \Rightarrow$ los tres planos se cortan en un punto.

Si $k = 3 \rightarrow \det(M) = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) < 3$

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 13 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Rango}(M): \\ |2| = 2 \neq 0; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \\ \Rightarrow \text{rg}(M) = 2 \end{array}$$

$\text{rg}(M) = 2 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow$ tenemos dos opciones:

↑
Homogéneo

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \text{ y } \pi_2 \rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-3}{1} \rightarrow \text{se cortan} \\ \pi_1 \text{ y } \pi_3 \rightarrow \frac{2}{3} \neq \frac{-3}{-1} \rightarrow \text{se cortan} \\ \pi_2 \text{ y } \pi_3 \rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{1}{-1} \rightarrow \text{se cortan} \end{array} \right\}$$

los tres planos se cortan entre sí a lo largo de la misma recta.

Si $k = -12/7 \rightarrow \det(M) = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) < 3$

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 12/7 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ -12/7 & -1 & 13 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Rango}(M): \\ |2| = 2 \neq 0; \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 12/7 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = \frac{2}{7} \neq 0 \\ \Rightarrow \text{rg}(M) = 2 \end{array}$$

$\text{rg}(M) = 2 \xRightarrow{\text{Homogéneo}} \text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow$ tenemos dos opciones:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \text{ y } \pi_2 \rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{12/7}{1} \rightarrow \text{Se cortan} \\ \pi_1 \text{ y } \pi_3 \rightarrow \frac{2}{-12/7} \neq \frac{12/7}{-1} \rightarrow \text{Se cortan} \\ \pi_2 \text{ y } \pi_3 \rightarrow \frac{1}{-12/7} \neq \frac{1}{-1} \rightarrow \text{Se cortan} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Los tres planos se cortan} \\ \text{entre sí a lo largo de} \\ \text{la misma recta.} \end{array}$$

b) $\pi_1: x - y = a$; $\pi_2: x + a^2z = 2a + 1$; $\pi_3: x - y + (a^2 - a)z = 2a$
 Construimos las matrices M y M^* y estudiamos sus rangos:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & a^2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & a^2-a & 2a \end{array} \right); \quad \det(M) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a^2-a \end{vmatrix} = a^2 - a$$

$$\det(M) = 0 \rightarrow a^2 - a = 0 \rightarrow a(a-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Si $a = 0 \rightarrow \det(M) = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) < 3$

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Rango}(M): \\ |1| = 1 \neq 0; \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \\ \Rightarrow \text{rg}(M) = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Rango}(M^*): \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right| = 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 2 \end{array}$$

Como $\text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow$ Tenemos dos opciones posibles:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_2 \text{ y } \pi_1 \rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1} \rightarrow \text{Se cortan} \\ \pi_2 \text{ y } \pi_3 \rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1} \rightarrow \text{Se cortan} \\ \pi_1 \text{ y } \pi_3 \rightarrow \text{Coinciden} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Dos planos coinciden y} \\ \text{un tercero los corta a lo} \\ \text{largo de una recta.} \end{array}$$

Si $a = 1$ $\rightarrow \det(M) = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) < 3$

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Rango}(M): \\ |1| = 1 \neq 0; \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \\ \Rightarrow \text{rg}(M) = 2 \end{array}$$

Rango(M^*):

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 3$$

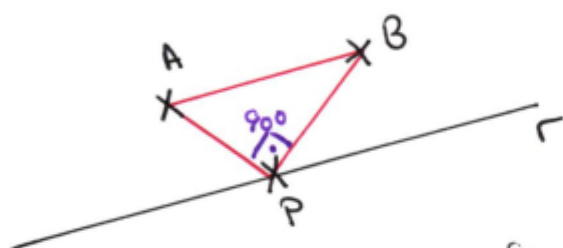
Como $\text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow$ Tenemos dos opciones posibles:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_2 \text{ y } \pi_1 \rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1} \rightarrow \text{se cortan} \\ \pi_2 \text{ y } \pi_3 \rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1} \rightarrow \text{se cortan} \\ \pi_1 \text{ y } \pi_3 \rightarrow \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} = \left[\frac{0}{0} \right] \neq \frac{1}{2} \rightarrow \text{Paralelos} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Dos planos paralelos} \\ \text{y un tercero los corta} \\ \text{determinando dos rectas} \\ \text{paralelas.} \end{array}$$

Si $a \neq 0 \wedge a \neq 1$ $\Rightarrow \det(M) \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 3 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ los tres planos se cortan en un punto.

59) Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$ y los puntos $A(2, 1, 1)$

y $B(-3, 4, 3)$, determina el punto $P \in r$ que hace que el triángulo $\triangle ABP$ sea un triángulo rectángulo en P .



Por pertenecer el punto P a la recta r , P será de la forma:

$$P \in r: (1, 1 + \lambda, 3 + 2\lambda)$$

Si el triángulo $\triangle ABP$ es rectángulo en P , los vectores $\vec{PA}$ y $\vec{PB}$ serán perpendiculares. Por tanto:

$$\vec{PA} = (2, 1, 1) - (1, 1 + \lambda, 3 + 2\lambda) = (1, -\lambda, -2 - 2\lambda)$$

$$\vec{PB} = (-3, 4, 3) - (1, 1 + \lambda, 3 + 2\lambda) = (-4, 3 - \lambda, -2\lambda)$$

$$\text{Si } \vec{PA} \perp \vec{PB} \Rightarrow \vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$$

$$(1, -\lambda, -2 - 2\lambda) \cdot (-4, 3 - \lambda, -2\lambda) = 0$$

$$-4 - 3\lambda + \lambda^2 + 4\lambda + 4\lambda^2 = 0$$

$$5\lambda^2 + \lambda - 4 = 0 \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 4/5 \end{cases}$$

Así, los puntos pedidos son:

$$P(1, 1 + \lambda, 3 + 2\lambda) \begin{cases} \lambda = -1 \rightarrow P(1, 0, 1) \\ \lambda = 4/5 \rightarrow P'(1, 9/5, 23/5) \end{cases}$$

60) Consideremos la recta $r: 2x-2 = y+2 = \frac{z+1}{4}$ y el punto $P(3,5,-1)$. Halla un punto $Q \in r$ tal que la recta s que pasa por P y Q sea paralela al plano $\pi: 3x-2y+z=-13$

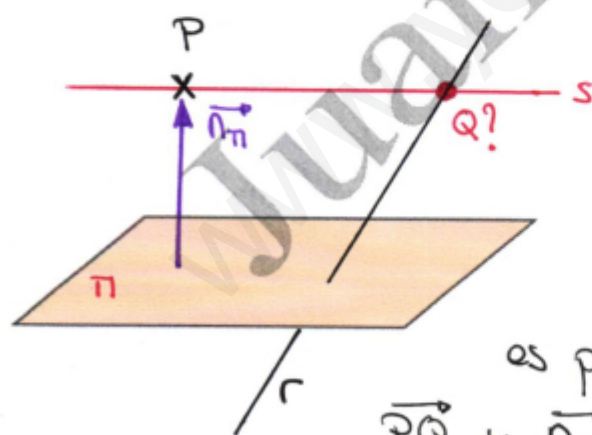
$$r: 2x-2 = y+2 = \frac{z+1}{4} \Rightarrow r: \frac{2x-2}{\frac{1}{2}} = y+2 = \frac{z+1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \frac{x-1}{\frac{1}{2}} = y+2 = \frac{z+1}{4} \Rightarrow r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(1, -2, -1) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_r = \left(\frac{1}{2}, 1, 4\right) \end{cases}$$

Solo para que entiendas bien el ejercicio, voy a estudiar la posición relativa entre r y π para así hacer una representación aproximada.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = \left(\frac{1}{2}, 1, 4\right) \cdot (3, -2, 1) = \frac{3}{2} - 2 + 4 = \frac{7}{2} \neq 0 \rightarrow \text{Se cortan}$$

Ahora representamos:



1ª Forma:

Sea el punto $Q \in r$ de la forma:

$$Q \in r: \left(1 + \frac{1}{2}\lambda, -2 + \lambda, -1 + 4\lambda\right)$$

Si la recta que pasa por P y Q es paralela al plano π , los vectores

$\vec{PQ}$ y $\vec{n}_\pi$ serán perpendiculares. Así:

$$\vec{PQ} = \left(1 + \frac{1}{2}\lambda, -2 + \lambda, -1 + 4\lambda\right) - (3, 5, -1) = \left(-2 + \frac{1}{2}\lambda, -7 + \lambda, 4\lambda\right)$$

$$\text{Si } s \parallel \pi \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Rightarrow$$

$$\left(-2 + \frac{1}{2}\lambda, -7 + \lambda, 4\lambda\right) \cdot (3, -2, 1) = 0 \Rightarrow$$

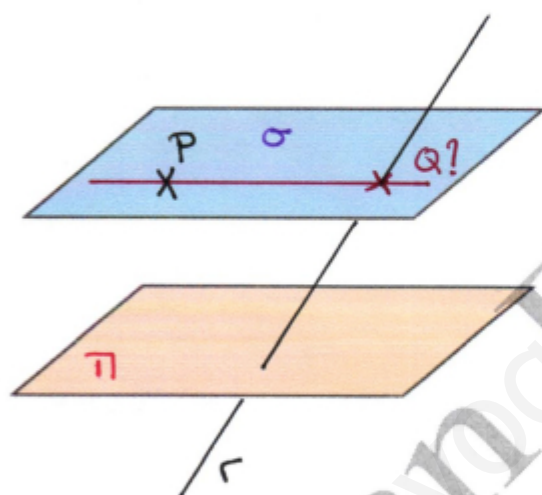
$$\Rightarrow -6 + \frac{3}{2}\lambda + 14 - 2\lambda + 4\lambda = 0 \Rightarrow \frac{7}{2}\lambda = -8 \Rightarrow \lambda = -\frac{16}{7}$$

Y por tanto:

$$Q\left(1 + \frac{1}{2}\lambda, -2 + \lambda, -1 + 4\lambda\right) \Rightarrow Q\left(-\frac{1}{7}, -\frac{30}{7}, -\frac{71}{7}\right)$$

$\lambda = -\frac{16}{7}$

2ª Forma:



Calculamos un plano σ que pasando por P sea paralelo a π :

$$\sigma: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\vec{n}_\sigma = \vec{n}_\pi = (3, -2, 1) \Rightarrow \sigma: 3x - 2y + z + D = 0$$

$$P(3, 5, -1) \in \sigma \Rightarrow 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 2$$

$$\Rightarrow \sigma: 3x - 2y + z + 2 = 0$$

El punto Q que buscamos es el punto de corte entre r y σ :

$$Q \in r: \left(1 + \frac{1}{2}\lambda, -2 + \lambda, -1 + 4\lambda\right) \left\{ \begin{array}{l} 3\left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right) - 2(-2 + \lambda) - 1 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \\ \sigma: 3x - 2y + z + 2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 3 + \frac{3}{2}\lambda + 4 - 2\lambda - 1 + 4\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \frac{7}{2}\lambda = -8 \Rightarrow \lambda = -\frac{16}{7}$$

Y así:

$$Q\left(1 + \frac{1}{2}\lambda, -2 + \lambda, -1 + 4\lambda\right) \Rightarrow Q\left(-\frac{1}{7}, -\frac{30}{7}, -\frac{71}{7}\right)$$

$\lambda = -\frac{16}{7}$

61) Demuestra que las rectas $r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = -5 - \alpha \\ y = 3 + 3\alpha \\ z = 2 + m\alpha \end{cases}$

se cortan en un punto independientemente del valor de m .

Calcula dicho punto, la recta t perpendicular común a las rectas r y s y la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s .

De cada recta, extraemos punto y vector:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(-1, 1, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (2, -1, -1) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(-5, 3, 2) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_s = (-1, 3, m) \end{cases}$$

Determinamos el vector $\vec{AB}$:

$$\vec{AB} = (-5, 3, 2) - (-1, 1, 0) = (-4, 2, 2)$$

Construimos las matrices M y M^* y veamos sus rangos:

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & m & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Rango}(M):$$

$$|2| = 2 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

Rango(M^*):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & m & 2 \end{vmatrix} = 12 + 2 + 4m - 12 - 4m - 2 = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 2$$

$\Rightarrow \text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M^*) = 2 \quad \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Las rectas se cortan $\forall m \in \mathbb{R}$

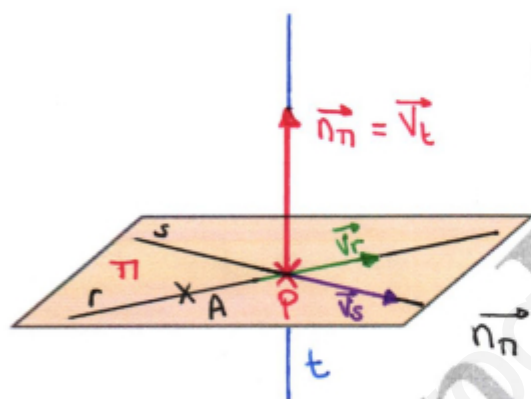
El punto de corte será:

$$\left. \begin{array}{l} -1+2\lambda = -5-\alpha \\ 1-\lambda = 3+3\alpha \\ -\lambda = 2+m\alpha \end{array} \right\} E_1+2E_2 \rightarrow 1 = 1+5\alpha \Rightarrow \alpha = 0$$

y así:

$$P \in s: (-5-\alpha, 3+3\alpha, 2+m\alpha) \xRightarrow{\alpha=0} P(-5, 3, 2)$$

Para determinar la ecuación del plano que las contiene y la perpendicular común:



$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & m \end{vmatrix} = (-m+3, 1-2m, 5)$$

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\vec{n}_\pi = (3-m, 1-2m, 5) \Rightarrow \pi: (3-m)x + (1-2m)y + 5z + D = 0$$

$$P(-5, 3, 2) \in \pi \Rightarrow (3-m)(-5) + (1-2m) \cdot 3 + 5 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -15 + 5m + 3 - 6m + 10 + D = 0 \Rightarrow D = +m + 2$$

$$\Rightarrow \pi: (3-m)x + (1-2m)y + 5z + (m+2) = 0$$

y la perpendicular común:

$$t: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow P(-5, 3, 2) \\ \text{Vector} \\ \text{director} \rightarrow \vec{v}_t = (3-m, 1-2m, 5) \end{cases}$$

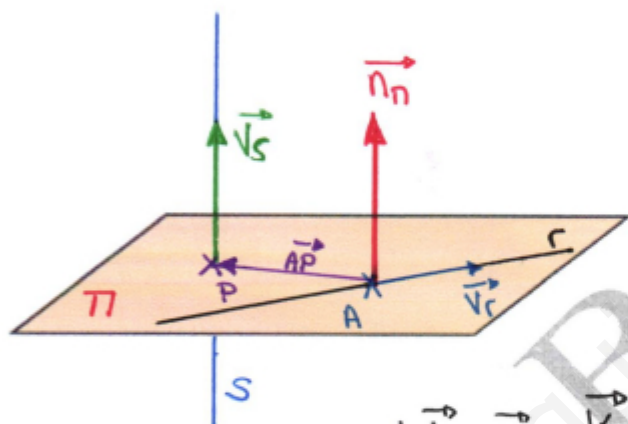
$$\Rightarrow t: \begin{cases} x = -5 + (3-m)\beta \\ y = 3 + (1-2m)\beta \\ z = 2 + 5\beta \end{cases}$$

62) Se dan el punto $P(3, -1, 1)$ y la recta $r: \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$
y se pide:

a) la ecuación del plano π que contiene al punto y a la recta.

b) la ecuación de la recta s que pasando por P corta perpendicularmente a π .

Representemos el ejercicio:



De la ecuación de la recta r :

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(-2, 0, 1) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (3, -1, -2) \end{cases}$$

$$\vec{AP} = (3, -1, 1) - (-2, 0, 1) = (5, -1, 0)$$

$$\vec{n}_\pi = \vec{AP} \times \vec{V}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (2, 10, -2) \Rightarrow \vec{n}_\pi = (1, 5, -1) \quad \text{Simplifica}$$

Con lo que $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_\pi = (1, 5, -1) \Rightarrow \pi: x + 5y - z + D = 0$$

$$A(-2, 0, 1) \in \pi \rightarrow -2 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 3$$

$$\Rightarrow \pi: x + 5y - z + 3 = 0$$

y la recta s :

$$s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow P(3, -1, 1) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_s = \vec{n}_\pi = (1, 5, -1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow s: \begin{cases} x = 3 + \beta \\ y = -1 + 5\beta \\ z = 1 - \beta \end{cases}$$

63) Considera las rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ z - y = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = a \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ se pide:

- Estudia la posición relativa de las rectas r y s en función de " a "
- Para $a = 1$, determina la recta perpendicular común a r y a s .
- Para $a = 0$, determina la recta perpendicular común a r y a s mediante 3 procedimientos distintos y demuestra que las tres rectas obtenidas son exactamente la misma recta.

Pasamos la recta r a paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 \\ z - y = 1 \end{cases} \rightarrow y = \beta \rightarrow z = 1 + \beta \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 \\ y = \beta \\ z = 1 + \beta \end{cases}$$

De cada recta extraemos punto y vector:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(1, 0, 1) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (0, 1, 1) \end{cases} ; s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(0, a, 1) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_s = (1, 0, 1) \end{cases}$$

Determinamos el vector $\vec{AB}$:

$$\vec{AB} = (0, a, 1) - (1, 0, 1) = (-1, a, 0)$$

Construimos las matrices M y M^* para estudiar sus rangos:

$$M^* = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{Rango}(M):$$

$$|1| = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

Rango(M^*):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a - 1; \quad a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

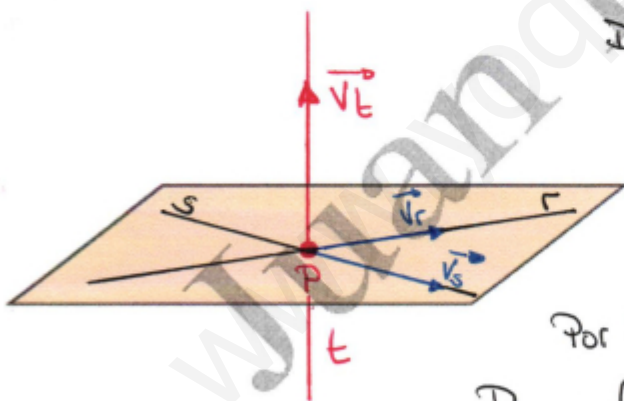
(Si $a = 1$)

$\text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow$ las rectas se cortan

(Si $a \neq 1$)

$\text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow$ las rectas se cruzan

b) Si $a = 1$, la recta perpendicular común será:



Determinamos el punto de corte:

$$\left. \begin{array}{l} 1 = \lambda \\ \beta = 1 \\ 1 + \beta = 1 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = 1; \beta = 1$$

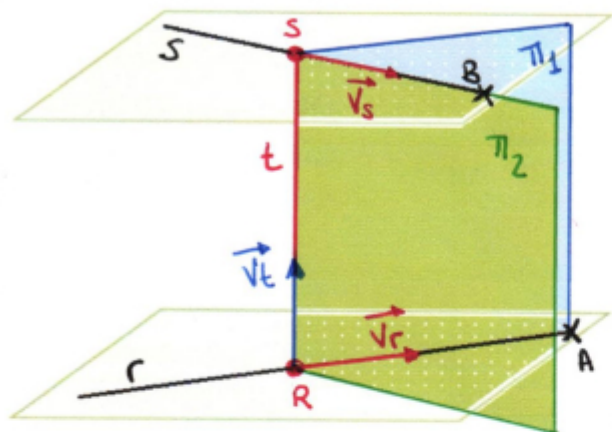
Por tanto:

$$P \in r: (1, \beta, 1 + \beta) \xRightarrow{\beta = 1} P(1, 1, 2)$$

Por otro lado:

$$\vec{V}_t = \vec{V}_r \times \vec{V}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, -1) \Rightarrow t: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$$

c) Si $a=0$, las rectas se cruzan y por tanto, la recta perpendicular común:



* Método 1:

$$\vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, -1)$$

Calculamos la ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r

y a la perpendicular común t :

$$\vec{n}_{\pi_1} = \vec{v}_r \times \vec{v}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, -1)$$

Con lo que $\pi_1: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_{\pi_1} = (-2, 1, -1) \Rightarrow \pi_1: -2x + y - z + D = 0$$

$$A(1, 0, 1) \in \pi_1 \Rightarrow -2 \cdot 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 3$$

$$\Rightarrow \pi_1: -2x + y - z + 3 = 0$$

Calculamos la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta s y a la perpendicular común t :

$$\vec{n}_{\pi_2} = \vec{v}_s \times \vec{v}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, 1)$$

y por tanto, $\pi_2: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_{\pi_2} = (-1, 2, 1) \Rightarrow \pi_2: -x + 2y + z + D = 0$$

$$B(0,0,1) \Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1$$

$$\Rightarrow \pi_2: -x + 2y + z - 1 = 0$$

la recta t pedida es la intersección entre los planos

π_1 y π_2 :

$$t_1: \begin{cases} -2x + y - z + 3 = 0 \\ -x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad E_1 + E_2 \rightarrow -3x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x + 3y = -2 \Rightarrow 3(-x + y) = -2 \Rightarrow -x + y = -\frac{2}{3} \quad \begin{matrix} \nearrow x = \mu \\ \searrow y = -\frac{2}{3} + \mu \end{matrix}$$

$$\rightarrow z = 1 + x - 2y$$

$$z = 1 + \mu + \frac{4}{3} - 2\mu = \frac{7}{3} - \mu$$

$$\text{y por tanto, } t_1: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\frac{2}{3} + \mu \\ z = \frac{7}{3} - \mu \end{cases}$$

* Metodo 2:

Un punto de r es $R(1, \beta, 1+\beta)$

Un punto de s es $S(\lambda, 0, 1+\lambda)$

El vector $\overrightarrow{RS}$ viene dado por:

$$\overrightarrow{RS} = (\lambda, 0, 1+\lambda) - (1, \beta, 1+\beta) = (\lambda-1, -\beta, \lambda-\beta)$$

El vector $\overrightarrow{RS}$ debe ser perpendicular a $\overrightarrow{V_r}$:

$$\overrightarrow{RS} \perp \overrightarrow{V_r} \Rightarrow \overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{V_r} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1, -\beta, \lambda - \beta) \cdot (0, 1, 1) = 0$$

$$-\beta + \lambda - \beta = 0 \rightarrow \lambda - 2\beta = 0 \text{ (Ecuación 1)}$$

El vector $\overrightarrow{RS}$ debe ser perpendicular a $\overrightarrow{V_S}$:

$$\overrightarrow{RS} \perp \overrightarrow{V_S} \Rightarrow \overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{V_S} = 0$$

$$(\lambda - 1, -\beta, \lambda - \beta) \cdot (1, 0, 1) = 0$$

$$\lambda - 1 + \lambda - \beta = 0 \rightarrow 2\lambda - \beta = 1 \text{ (Ecuación 2)}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda - 2\beta = 0 \\ 2\lambda - \beta = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \lambda = 2\beta \rightarrow 4\beta - \beta = 1 \rightarrow \beta = 1/3 \Rightarrow \lambda = 2/3$$

Los puntos R y S son por tanto:

$$R(1, \beta, 1 + \beta) \xRightarrow{\beta = 1/3} R(1, 1/3, 4/3)$$

$$S(\lambda, 0, 1 + \lambda) \xRightarrow{\lambda = 2/3} S(2/3, 0, 5/3)$$

La recta t pedida es la que pasa por R y S:

$$\overrightarrow{RS} = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{5}{3} \right) - \left(1, \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$\text{Y por tanto, } t_2: \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{3}\gamma \\ y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\gamma \\ z = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\gamma \end{cases}$$

* Método 3:

$$\vec{V}_t = \vec{V}_r \times \vec{V}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, -1)$$

Calculamos la ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r y a la perpendicular común t :

$$\vec{n}_{\pi_1} = \vec{V}_r \times \vec{V}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, -1)$$

con lo que $\pi_1: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_{\pi_1} = (-2, 1, -1) \Rightarrow \pi_1: -2x + y - z + D = 0$$

$$A(1, 0, 1) \in \pi_1 \Rightarrow -2 \cdot 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 3$$

$$\Rightarrow \pi_1: -2x + y - z + 3 = 0$$

Calculamos el punto S como punto de corte entre s y π_1 :

$$\left. \begin{array}{l} S \in s: (\lambda, 0, 1+\lambda) \\ \pi_1: -2x + y - z + 3 = 0 \end{array} \right\} -2\lambda - 1 - \lambda + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = 2/3 \Rightarrow S(\lambda, 0, 1+\lambda) \Rightarrow S\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{5}{3}\right)$$

y por tanto, la recta t pedida:

$$t: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow S\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{5}{3}\right) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_t = (1, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow t_3: \begin{cases} x = \frac{2}{3} + \sigma \\ y = \sigma \\ z = \frac{5}{3} - \sigma \end{cases}$$

Hemos obtenido la perpendicular común t mediante 3 métodos distintos, y el resultado ha sido:

$$t_1: \begin{cases} x = \mu \\ y = -2/3 + \mu \\ z = 7/3 - \mu \end{cases} \quad ; \quad t_2: \begin{cases} x = 1 - 1/3 \gamma \\ y = 1/3 - 1/3 \gamma \\ z = 4/3 + 1/3 \gamma \end{cases} \quad ; \quad t_3: \begin{cases} x = 2/3 + \delta \\ y = \delta \\ z = 5/3 - \delta \end{cases}$$

Ahora demostraremos que las tres rectas son la misma estudiando la posición relativa

• Rectas t_1 y t_2 :

$$t_1: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow C(0, -2/3, 7/3) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_{t_1} = (1, 1, -1) \end{cases} \quad t_2: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow D(1, 1/3, 4/3) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_{t_2} = (-1/3, -1/3, 1/3) \end{cases}$$

Determinamos el vector $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{CD} = (1, 1/3, 4/3) - (0, -2/3, 7/3) = (1, 1, -1)$$

Construimos las matrices M y M^* y estudiamos sus rangos:

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1 \\ 1 & -1/3 & 1 \\ -1 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Rango}(M): \quad |1 \ 1| = 1 \neq 0 ; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1/3 \\ 1 & -1/3 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1/3 \\ -1 & 1/3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \text{rg}(M) = 1$$

Rango(M^*):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 1$$

Como $\text{rg}(M) = 1$ y $\text{rg}(M^*) = 1 \Rightarrow$ las rectas t_1 y t_2 son la misma recta.

• Rectas t_1 y t_3 :

$$t_1: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow C(0, -2/3, 7/3) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_{t_1} = (1, 1, -1) \end{cases}$$

$$t_3: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow E(2/3, 0, 5/3) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_{t_3} = (1, 1, -1) \end{cases}$$

Determinamos el vector $\vec{CE}$:

$$\vec{CE} = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{5}{3}\right) - \left(0, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Construimos las matrices M y M^* y estudiamos sus rangos:

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2/3 \\ 1 & 1 & 2/3 \\ -1 & -1 & -2/3 \end{pmatrix} \quad \text{Rango}(M):$$

$$|1 \ 1| = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \text{rg}(M) = 1$$

Rango(M^*):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2/3 \\ -1 & -2/3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2/3 \\ 1 & 2/3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 1$$

Como $\text{rg}(M) = 1$ y $\text{rg}(M^*) = 1 \Rightarrow$ Las rectas t_1 y t_3 son la misma recta

Por tanto, las tres rectas obtenidas son exactamente la misma recta, tal y como queríamos demostrar.

64) Se dan el punto $P(0, 1, 0)$ y las rectas de ecuación

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-2}{2} = y = \frac{z}{-3}. \quad \text{Determina la recta que}$$

pasando por P corta a ambas rectas r y s utilizando

2 procedimientos distintos. Demuestra que las dos rectas obtenidas son la misma recta.

Estudiamos primero la posición relativa. De la ecuación de cada recta extraemos punto y vector:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow A(1, 0, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_r = (1, 1, -1) \end{cases} ; \quad s: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow B(2, 0, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{V}_s = (2, 1, -3) \end{cases}$$

Determinamos el vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0, 0) - (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

Construimos las matrices M y M^* y estudiamos sus rangos:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rango}(M):$$

$$|1 \ 1| = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

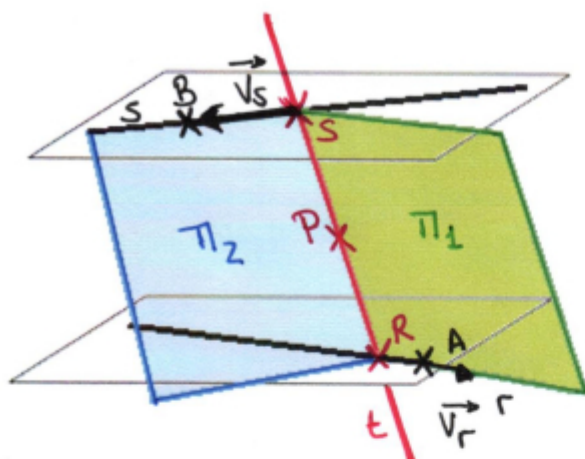
$$\Rightarrow \text{rg}(M) = 2$$

Rango(M^*):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 3$$

Como $\text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow$ Las rectas se cruzan

Dado que las rectas r y s se cruzan, la recta t que pasando por P corte a ambas rectas r y s será:



* Método 1:

Determinamos la ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r y al punto P :

$$\vec{AP} = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$$

$$\vec{n}_{\pi_1} = \vec{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -2)$$

Y así, $\pi_1: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_{\pi_1} = (-1, -1, -2) \Rightarrow \pi_1: -x - y - 2z + D = 0$$

$$A(1, 0, 0) \in \pi_1 \rightarrow -1 + D = 0 \Rightarrow D = 1$$

$$\Rightarrow \pi_1: -x - y - 2z + 1 = 0$$

Determinamos la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta s y al punto P :

$$\vec{BP} = (0, 1, 0) - (2, 0, 0) = (-2, 1, 0)$$

$$\vec{n}_{\pi_2} = \vec{BP} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-3, -6, -4)$$

con lo que $\pi_2: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\vec{n}_{\pi_2} = (-3, -6, -4) \Rightarrow \pi_2: -3x - 6y - 4z + D = 0$$

$$B(2, 0, 0) \in \pi_2 \Rightarrow -3 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = 6$$

$$\Rightarrow \pi_2: -3x - 6y - 4z + 6 = 0$$

la recta t pedida es la intersección de los planos π_1 y π_2 :

$$t_1: \begin{cases} -x - y - 2z + 1 = 0 \\ -3x - 6y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \xrightarrow{x(-2)} \begin{cases} 2x + 2y + 4z - 2 = 0 \\ -3x - 6y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \xrightarrow{E_1 + E_2} \begin{cases} 2x + 2y + 4z - 2 = 0 \\ -3x - 6y - 4z + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow -x - 4y + 4 = 0 \begin{cases} \rightarrow y = \alpha \\ \rightarrow x = 4 - 4\alpha \end{cases} \xrightarrow{z = \frac{1-x-y}{2}} z = \frac{1 - (4 - 4\alpha) - \alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{1 - 4 + 4\alpha - \alpha}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\alpha \Rightarrow t_1: \begin{cases} x = 4 - 4\alpha \\ y = \alpha \\ z = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\alpha \end{cases}$$

* Método 2:

Determinamos la ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r y al punto P :

Está hecho en la
página anterior

$$\rightarrow \pi_1: -x - y - 2z + 1 = 0$$

Calculamos el punto de corte S entre la recta s y π_1 :

$$\begin{cases} S \in s: (2 + 2\beta, \beta, -3\beta) \\ \pi_1: -x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow -2 - 2\beta - \beta + 6\beta + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\beta = 1 \Rightarrow \beta = 1/3$$

y por tanto:

$$S \in s: (2 + 2\beta, \beta, -3\beta) \xrightarrow{\beta = 1/3} S\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, -1\right)$$

La recta t pedida es la que pasa por P y S :

$$\overrightarrow{PS} = \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, -1 \right) - (0, 1, 0) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, -1 \right)$$

$$t_2: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow P(0, 1, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_{t_2} = \overrightarrow{PS} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, -1 \right) \end{cases} \Rightarrow t_2: \begin{cases} x = \frac{8}{3}\gamma \\ y = 1 - \frac{2}{3}\gamma \\ z = -\gamma \end{cases}$$

Ahora demostraremos que las rectas t_1 y t_2 son la misma recta estudiando su posición relativa:

$$t_1: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow C(4, 0, -3/2) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_{t_1} = (-4, 1, 3/2) \end{cases} \quad t_2: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow P(0, 1, 0) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_{t_2} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, -1 \right) \end{cases}$$

Determinamos el vector $\overrightarrow{CP}$:

$$\overrightarrow{CP} = (0, 1, 0) - (4, 0, -3/2) = (-4, 1, 3/2)$$

Construimos las matrices M y M^* y calculamos sus rangos:

$$M^* = \begin{pmatrix} -4 & 8/3 & 1 & -4 \\ 1 & -2/3 & 1 & 1 \\ 3/2 & -1 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \quad \text{Rango}(M):$$

$$|-4| = -4 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} -4 & 8/3 \\ 1 & -2/3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -4 & 8/3 \\ 3/2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \text{rg}(M) = 1$$

Rango(M^*):

$$\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 3/2 & 3/2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M^*) = 1$$

Como $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 1 \Rightarrow$ las dos rectas t_1 y t_2 son la misma recta como queríamos demostrar.

65) Determina los extremos de un segmento $\overline{AB}$ sabiendo que el punto A pertenece al plano $2x+y+z=0$, el punto B pertenece a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$, y el punto medio del segmento es el origen $(0,0,0)$.

Fijate que el punto $(0,0,0)$ cumple la ecuación del plano.

Por otro lado:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3} \Rightarrow r: \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=3\lambda \end{cases}, \text{ y estudiamos la}$$

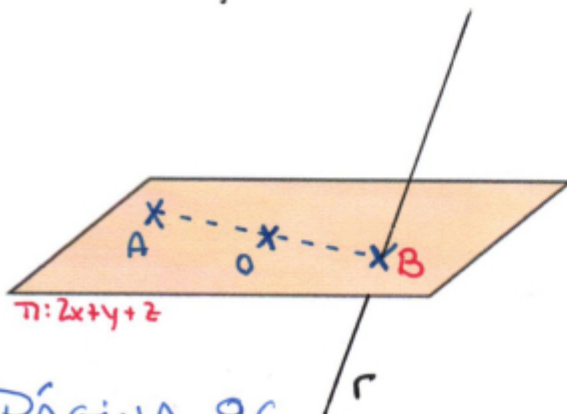
posición relativa de r y π :

$$\begin{aligned} P \in r: (1+2\lambda, 2-\lambda, 3\lambda) & \left\{ \begin{aligned} 2(1+2\lambda) + 2 - \lambda + 3\lambda &= 0 \Rightarrow \\ \pi: 2x + y + z &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow 2 + 4\lambda + 2 - \lambda + 3\lambda &= 0 \\ & \Rightarrow 6\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

La recta r y el plano π se cortan en:

$$P(1+2\lambda, 2-\lambda, 3\lambda) \xrightarrow{\lambda = -2/3} P(-1/3, 8/3, -2)$$

Ahora representamos el ejercicio:



Si tanto el punto A como el punto O pertenecen al plano π es obvio que el punto B también debe estar en el plano. Por eso podemos asegurar que el punto

B que buscamos es el punto P calculado $\Rightarrow B(-1/3, 8/3, -2)$

El punto A será el simétrico de B respecto a O según:

Basta razonar que como el punto O es el punto medio

$$\begin{array}{ccc} \times & \text{---} & \times \\ A(x, y, z) & O(0,0,0) & B(-1/3, 8/3, -2) \end{array}$$

del segmento $\overline{AB}$:

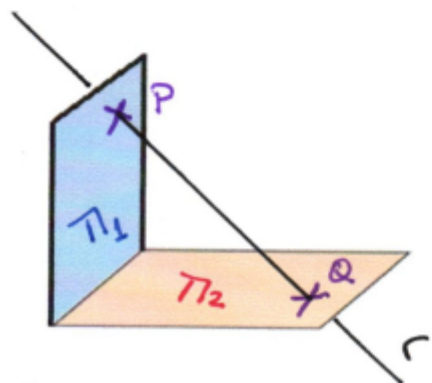
$$(0, 0, 0) = \left(\frac{x - 1/3}{2}, \frac{y + 8/3}{2}, \frac{z - 2}{2} \right) \Rightarrow A\left(\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, 2\right)$$

66) Calcular la longitud del segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1 y π_2 siendo:

$$r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}; \pi_1: 3x + z = 5; \pi_2: x - y - z = 0$$

Escribamos la recta dada en paramétricas:

$$r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} y = 2x \\ \xrightarrow{\quad} z = x \end{array} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$



Ahora calcularemos los puntos de corte P y Q de la recta r con cada uno de los planos π_1 y π_2 dados según:

$$\left. \begin{array}{l} P \in r: (\lambda, 2\lambda, \lambda) \\ \pi_1: 3x + z = 5 \end{array} \right\} 3\lambda + \lambda = 5 \Rightarrow 4\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{4}$$

Con lo que:

$$P(\lambda, 2\lambda, \lambda) \xRightarrow{\lambda = 5/4} P\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

Para el punto Q:

$$\left. \begin{array}{l} Q \in r: (\lambda, 2\lambda, \lambda) \\ \pi_2: x - y - z = 0 \end{array} \right\} \lambda - 2\lambda - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Con lo que:

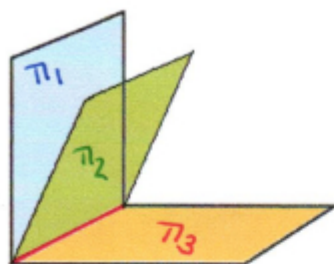
$$Q(\lambda, 2\lambda, \lambda) \xRightarrow{\lambda = 0} Q(0, 0, 0)$$

La longitud del segmento pedido es:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} &= \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right) \Rightarrow d(Q, P) = |\overrightarrow{QP}| = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\overrightarrow{QP}| = \sqrt{\frac{75}{8}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{6} \text{ m} \end{aligned}$$

67) Determina m y n para que los planos $\pi_1: x + 2y - z = 1$, $\pi_2: 2x + y + mz = 0$ y $\pi_3: 3x + 3y - 2z = n$ pertenezcan al mismo haz de planos.

Los tres planos π_1, π_2 , y π_3 pertenecerán al mismo haz si se cortan a lo largo de una misma recta (que será la arista del haz de planos). Es decir:



La posición relativa de los tres planos será la representada si:

$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(M^*) = 2$$

Construimos las matrices M y M^* :

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & m & 0 \\ 3 & 3 & -2 & n \end{array} \right)$$

Como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{rg}(M) > 2 \\ \operatorname{rg}(M^*) > 2 \end{cases}$$

Para que $\operatorname{rg}(M)$ sea 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & m \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3m + 3 = 0 \Rightarrow m = -1$$

Para que $\operatorname{rg}(M^*)$ sea 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3n + 3 = 0 \Rightarrow n = 1$$

68) Considera el plano $\pi: \alpha x + y + z + 1 = 0$ y las rectas:

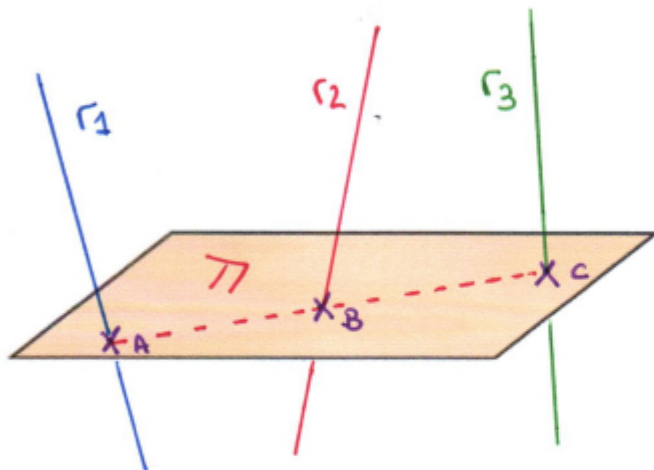
$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \quad ; \quad r_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2z \end{cases} \quad ; \quad r_3: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3z \end{cases}$$

calcula el valor de α para que los puntos de corte del plano con cada una de las rectas estén alineados.

Escribimos las rectas en paramétricas:

$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad ; \quad r_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2\mu \\ z = \mu \end{cases} \quad ; \quad r_3: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3\beta \\ z = \beta \end{cases}$$

Veamos lo que queremos:



Vamos a determinar los puntos de corte A, B, y C de cada una de las rectas r_1 , r_2 y r_3 con el plano π :

Punto A:

$$\left. \begin{array}{l} A \in r_1: (1, \lambda, \lambda) \\ \pi: \alpha x + y + z + 1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha \cdot 1 + \lambda + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow 2\lambda = -1 - \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda = -\frac{1 - \alpha}{2} \end{array}$$

Con lo que:

$$A(1, \lambda, \lambda) \xrightarrow{\lambda = -\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}} A\left(1, -\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Punto B:

$$\left. \begin{array}{l} B \in r_2: (2, 2\mu, \mu) \\ \pi: \alpha x + y + z + 1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha \cdot 2 + 2\mu + \mu + 1 = 0 \Rightarrow 3\mu = -1 - 2\alpha \\ \Rightarrow \mu = -\frac{1}{3} - \frac{2\alpha}{3} \end{array}$$

Con lo que:

$$B(2, 2\mu, \mu) \xrightarrow{\mu = -\frac{1}{3} - \frac{2\alpha}{3}} B\left(2, -\frac{2}{3} - \frac{4\alpha}{3}, -\frac{1}{3} - \frac{2\alpha}{3}\right)$$

Punto C:

$$\left. \begin{array}{l} C \in r_3: (3, 3\beta, \beta) \\ \pi: \alpha x + y + z + 1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha \cdot 3 + 3\beta + \beta + 1 = 0 \Rightarrow 4\beta = -1 - 3\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta = -\frac{1}{4} - \frac{3\alpha}{4} \end{array}$$

Con lo que:

$$C(3, 3\beta, \beta) \xrightarrow{\beta = -\frac{1}{4} - \frac{3\alpha}{4}} C\left(3, -\frac{3}{4} - \frac{9\alpha}{4}, -\frac{1}{4} - \frac{3\alpha}{4}\right)$$

Los puntos A, B, y C estarán alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son vectores paralelos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \left(2, -\frac{2}{3} - \frac{4\alpha}{3}, -\frac{1}{3} - \frac{2\alpha}{3}\right) - \left(1, -\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \\ &= \left(1, -\frac{1}{6} - \frac{5\alpha}{6}, \frac{1}{6} - \frac{\alpha}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \left(3, -\frac{3}{4} - \frac{9\alpha}{4}, -\frac{1}{4} - \frac{3\alpha}{4}\right) - \left(2, -\frac{2}{3} - \frac{4\alpha}{3}, -\frac{1}{3} - \frac{2\alpha}{3}\right) = \\ &= \left(1, -\frac{1}{12} - \frac{11\alpha}{12}, \frac{1}{12} - \frac{1}{12}\alpha\right) \end{aligned}$$

Si $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$ los vectores serán proporcionales y por tanto:

$$\underbrace{\frac{1}{1} = \frac{\frac{-1-5\alpha}{6}}{\frac{-1-11\alpha}{12}}}_{\text{}} = \frac{1-\alpha}{6}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow 1 &= 2 \cdot \left(\frac{1+5\alpha}{1+11\alpha}\right) \Rightarrow 1+11\alpha = 2+10\alpha \\ &\Downarrow \\ \alpha &= 1 \end{aligned}$$

y comprobemos:

$$\overrightarrow{AB} = \left(1, \frac{-1-5\alpha}{6}, \frac{1-\alpha}{6} \right) \xRightarrow{\alpha=1} \overrightarrow{AB} = (1, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(1, \frac{-1-11\alpha}{12}, \frac{1-\alpha}{12} \right) \xRightarrow{\alpha=1} \overrightarrow{BC} = (1, -1, 0)$$

Como ves, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$ si $\alpha = 1 \Rightarrow A, B$ y C están alineados si $\alpha = 1$

69) De todos los planos del haz que tiene por arista a la recta $r: x = y - 2 = \frac{z-4}{-2}$, encuentra aquel que cuando corta a los semiejes coordenados positivos forma un triángulo equilátero. Calcula el área de dicho triángulo

Expresando la recta r con sus ecuaciones implícitas tendremos ya la ecuación de dos de los planos del haz. Así:

$$r: \begin{cases} x = y - 2 \\ y - 2 = \frac{z-4}{-2} \end{cases}$$

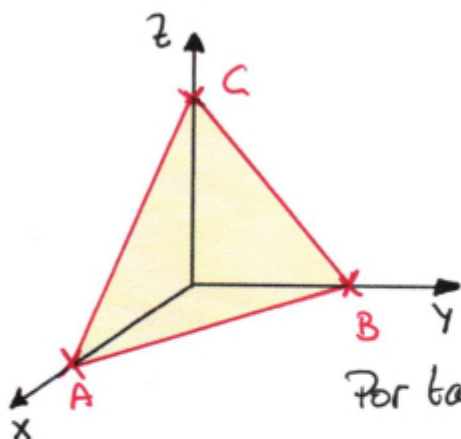
$$y - 2 = \frac{z-4}{-2} \rightarrow -2y + 4 = z - 4 \Rightarrow 2y + z - 8 = 0$$

$$x = y - 2 \Rightarrow x - y + 2 = 0$$

y por tanto, la ecuación del haz de planos:

$$\text{HAZ: } \alpha \cdot (x - y + 2) + \beta (2y + z - 8) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

De todos los planos del haz, busquemos aquel que al cortar a los semiejes positivos determine un triángulo equilátero:



El triángulo será equilateral cuando los puntos sean:

$$A(\lambda, 0, 0); B(0, \lambda, 0); C(0, 0, \lambda)$$

Por tanto:

Punto A:

$$\left. \begin{array}{l} \text{HAZ: } \alpha(x-y+2) + \beta(2y+z-8) = 0 \\ \text{Eje X: } y = z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\alpha + \alpha x - 8\beta = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha x = 8\beta - 2\alpha \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8\beta}{\alpha} - 2 \Rightarrow A\left(\frac{8\beta}{\alpha} - 2, 0, 0\right)$$

Punto B:

$$\left. \begin{array}{l} \text{HAZ: } \alpha(x-y+2) + \beta(2y+z-8) = 0 \\ \text{Eje Y: } x = z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\alpha y + 2\alpha + 2\beta y - 8\beta = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y(2\beta - \alpha) = 8\beta - 2\alpha \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow y = \frac{8\beta - 2\alpha}{2\beta - \alpha} \Rightarrow B\left(0, \frac{8\beta - 2\alpha}{2\beta - \alpha}, 0\right)$$

Punto C:

$$\left. \begin{array}{l} \text{HAZ: } \alpha(x-y+2) + \beta(2y+z-8) = 0 \\ \text{Eje Z: } y = x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} +2\alpha - 8\beta + \beta z = 0 \\ \Rightarrow \beta z = 8\beta - 2\alpha \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow z = 8 - \frac{2\alpha}{\beta} \Rightarrow C\left(0, 0, 8 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)$$

El triángulo es equilátero si:

$$\frac{8\beta}{\alpha} - 2 = \frac{8\beta - 2\alpha}{2\beta - \alpha} = 8 - \frac{2\alpha}{\beta}$$

Hacemos el cambio $\frac{\beta}{\alpha} = k \Rightarrow$

$$8k - 2 = \frac{8k - 2}{2k - 1} = 8 - \frac{2}{k}$$

$$(8k - 2)(2k - 1) = 8k - 2$$

$$(8k - 2)(2k - 1) - (8k - 2) = 0$$

$$(8k - 2) \cdot [2k - 1 - 1] = 0 \rightarrow (8k - 2)(2k - 2) = 0 \begin{cases} \rightarrow k = 1/4 \\ \rightarrow k = 1 \end{cases}$$

Veamos qué solución nos sirve:

$$\text{Si } k = \frac{1}{4} \rightarrow A(8k - 2, 0, 0) \Rightarrow A(0, 0, 0)$$

$$\hookrightarrow B\left(0, \frac{8k - 2}{2k - 1}, 0\right) \Rightarrow B(0, 0, 0)$$

$$\hookrightarrow C\left(0, 0, 8 - \frac{2}{k}\right) \Rightarrow C(0, 0, 0)$$

No es una solución válida

(No hay triángulo!!)

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow A(8k - 2, 0, 0) \Rightarrow A(6, 0, 0)$$

$$\hookrightarrow B\left(0, \frac{8k - 2}{2k - 1}, 0\right) \Rightarrow B(0, 6, 0)$$

$$\hookrightarrow C\left(0, 0, 8 - \frac{2}{k}\right) \Rightarrow C(0, 0, 6)$$

Esta es la solución válida!!

El plano pedido por tanto:

$$HAZ: \alpha(x-y+2) + \beta(2y+z-8) = 0 \rightarrow \text{Dividiendo entre } \alpha$$

$$HAZ: x-y+2 + \frac{\beta}{\alpha}(2y+z-8) = 0 \rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = k$$

$$HAZ: x-y+2 + k \cdot (2y+z-8) = 0$$

$$\text{Y como } k=1 \Rightarrow \pi: x-y+2+2y+z-8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: x+y+z-6=0}$$

El área del triángulo será:

$$\vec{AB} = (0, 6, 0) - (6, 0, 0) = (-6, 6, 0)$$

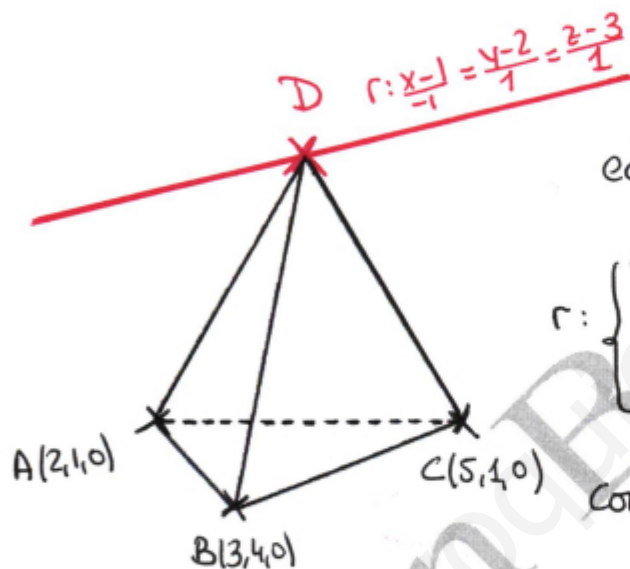
$$\vec{AC} = (0, 0, 6) - (6, 0, 0) = (-6, 0, 6)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 6 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (36, 36, 36)$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{36^2 + 36^2 + 36^2} = \sqrt{36^2 \cdot 3} = 36\sqrt{3}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \sqrt{3} = 18\sqrt{3} \approx 31.18 \mu^2$$

70) Un tetraedro está definido por los vértices $A(2,1,0)$, $B(3,4,0)$, $C(5,1,0)$ y el cuarto vértice D es un punto que está sobre la recta $r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$. Encuentra las coordenadas del punto D para que el volumen de dicho tetraedro sea de 6 unidades cúbicas.



Expresamos la recta r con sus ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow (1, 2, 3) \\ \text{Vector director} \rightarrow \vec{v}_r = (-1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Con lo que las coordenadas de D :

$$D \in r: (1 - \lambda, 2 + \lambda, 3 + \lambda)$$

Calculamos los vectores:

$$\vec{AD} = (1 - \lambda, 2 + \lambda, 3 + \lambda) - (2, 1, 0) = (-1 - \lambda, 1 + \lambda, 3 + \lambda)$$

$$\vec{AB} = (3, 4, 0) - (2, 1, 0) = (1, 3, 0)$$

$$\vec{AC} = (5, 1, 0) - (2, 1, 0) = (3, 0, 0)$$

Calculamos el producto mixto:

$$[\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1+\lambda & 3+\lambda \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -9\lambda - 27$$

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AC}]| \Rightarrow 6 = \frac{1}{6} \cdot |-9\lambda - 27| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 = |-9\lambda - 27| \Rightarrow \pm 36 = -9\lambda - 27$$

$$\hookrightarrow 36 = -9\lambda - 27 \Rightarrow \lambda = -7$$

$$\hookrightarrow -36 = -9\lambda - 27 \Rightarrow \lambda = 1$$

con lo que el punto D pedido:

$$D \in r: (1-\lambda, 2+\lambda, 3+\lambda) \begin{array}{l} \xrightarrow{\lambda = -7} D_1 (8, -5, -4) \\ \xrightarrow{\lambda = 1} D_2 (0, 3, 4) \end{array}$$

