1) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 1 & -3 & -2\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}-2 & 8 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

calcula:

a) $A+B$ g) $C-D$ m) $A\cdot B$ s) $4C$

b) $B+C$ h) $D-A$ n) $B\cdot A$ t) $-2D$

c) $C+D$ i) A^t o) $A\cdot C$ u) $B\cdot C$

d) $D+A$ j) B^t p) $A\cdot D$ v) $B\cdot D$

e) $A-B$ k) C^t q) $2A$ w) $C\cdot D$

f) $B-C$ l) D^t r) $-3B$ x) A^2

2) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 5 & -1 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

calcula:

a) $A\cdot B$ b) $B\cdot A$ c) $(A\cdot B)^2$ d) $(B\cdot A)^t$

www.JuanBertomeu.es

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

3) Dadas las matrices A y B del ejercicio anterior, ¿qué dimensiones debe tener la matriz M para que se pueda efectuar el producto $A \cdot M \cdot B$?

4) Si A es una matriz $A_{3\times 2}$, ¿qué dimensiones debe tener la matriz M para que $A^t \cdot M$ sea una matriz cuadrada?

5) Construye una matriz A cuadrada de orden 3 en la que sus elementos verifiquen $a_{ij} = i - j$. Comprueba que dicha matriz es antisimétrica.

6) Comprueba que las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ conmutan (es decir, verifican que $A \cdot B = B \cdot A$)

7) Encuentra la expresión general de todas las matrices que conmutan con la matriz A, siendo:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

8) Sea C el conjunto de todas las matrices de la forma $C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra que dos matrices de este conjunto siempre conmutan.

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

www.JuanBertomeu.es

9) Sea M el conjunto de todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a^2+b^2=1$. Demuestra que si multiplicamos dos matrices cualesquiera del conjunto M, la matriz producto que obtendremos también pertenecerá a M.

10) Si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2 tales que el producto $A \cdot B$ es la matriz nula 0_{2x2}, ¿es cierto que al menos una de las dos matrices A o B tiene que ser la matriz nula?

11) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$, encontrar los valores de x e y para los cuales se verifica $A^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

12) Encuentra todas las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix} -1 & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tales que A^2 sea la matriz unitaria de orden 2, I_{2x2}

13) Determina los valores de x, y, z para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

14) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, calcula los valores de x e y para que $A^2+x\cdot A+y\cdot I_{2x2}=0_{2x2}$

15) Calcula el valor de "x" para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 2 & -1\\ 1 & 0 & x-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 2x & -5\\ x & 2 & -1\end{pmatrix}$$

16) Determina todas las matrices A de orden 2 antisi-métricas que verifiquen la condición $A^4=16\cdot I$

17) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, calcula las matrices B tales que $A\cdot B=B\cdot A^t$

18) Halla todas las matrices M de la forma $\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación $M^2-2M=3I$

19) Determina los valores de "m" para los cuales la matriz $X=\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ verifique $X^2-4X+I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$

20) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}$, calcula los valores de "m" y "n" para los que se cumple $(I+A)^3=mI+nA$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

21) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -x & -1 \end{pmatrix}$, averiguar razonadamente si existe algún valor de x para el que se verifique $A^2 = A$

22) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n. Sabiendo que $A^2 = A$ y que $B = 2A - I$, averiguar qué matriz es B^2

23) Encuentra todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que conmuten con la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De entre todas ellas, determina aquella cuya suma de los elementos de la diagonal principal sea 5 y donde $a_{11} = -a_{12}$

24) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{41}

25) De una matriz A sabemos que cumple que $A^2 = 2A - I$. Determina la expresión general de la potencia n-ésima de la matriz A

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

26) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

a) Comprueba que A y B conmutan

b) Calcula A^n y B^n

27) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcula todas las matrices B que conmutan con A

b) Calcula A^n

28) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, calcula:

a) Todas las matrices B que conmutan con A

b) A^4 y A^n

29) Considera las matrices $M=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$ y $V=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcula M^n

b) Todas las matrices M que cumplan que $M^{100}=V$

30) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, determina:

a) Las constantes m y n tales que $A^2=mA+nI$

b) La potencia A^5 utilizando exclusivamente la expresión calculada en el apartado anterior.

www.JuanBertomeu.com

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

31) Una matriz cuadrada es NILPOTENTE de grado K si existe K para el cual A^K es la matriz nula, siendo $A^{K-1} \neq 0$. Comprueba que la siguiente matriz es nilpotente y di de qué grado lo es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

32) Calcular por inducción A^n, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

33) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2, A^3, A^4 y A^5

b) Expresa A^{2n} en función de I

34) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Comprobar que $A^3 + I = 0$

b) Calcular A^7 y A^{1000}

35) Calcular por inducción A^n siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

JuanBerlapones

36) Encontrar por inducción completa la matriz A^n

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$ con $n \in \mathbb{N}$

37) Encontrar por inducción completa la matriz A^n

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

38) Calcula la inversa de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

39) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(A^2)^{-1} + (A^{-1})^2$

40) Calcular por el método de Gauss-Jordan la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

www.JuanBertomeu.es

41) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1} y B^{-1}

b) Calcula $(A\cdot B)^{-1}$

c) Comprueba que $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

42) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ calcula:

a) A^{-1} y $(A^t)^{-1}$

b) Comprueba que $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$

43) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

a) Comprueba que A^3 es la matriz nula

b) Demuestra que la matriz (A^2+A+I) y la matriz $(I-A)$ son inversas una de la otra

44) Determina todas las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix}2 & a\\ b & c\end{pmatrix}$ tales que $A^{-1}=2I-A$

45) Sabiendo que la inversa de una matriz A es $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, y que la inversa de la matriz $A\cdot B$ es $(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}$, determina la matriz B

Juan Bertomeu Ferrer

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

46) Si una matriz cuadrada verifica que $A^2 = 2A + 3I$

a) Obtener la expresión de A^{-1} en función de A y de I

b) Obtener todas las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ que cumplen $A^2 = 2A + 3I$

47) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ a & b & c \end{pmatrix}$, calcula:

a) Las constantes a, b y c para que se cumpla que $A^t = A^{-1}$

b) La matriz A^4 para los valores de a, b y c obtenidos

48) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2 = 2I$

b) Calcula A^{-1}

c) Halla A^{12} y la inversa de A^{12}

49) Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 7 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} ; \quad E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 11 & -5 \end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

50) Calcular en función de "t" el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & t \\ 4 & -2 & -6 & -8 \\ 2 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

51) Basándote en el estudio del rango de la matriz, averigua para qué valores de "t" existe la matriz inversa de A, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 2t \end{pmatrix}$$

52) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de la matriz A^n. ¿Depende el rango de n?

53) Calcular los valores de a, b y c para que $rg(A)=1$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & -1 \\ a & b+2 & 3 & -3c \end{pmatrix}$$

54) Dada una matriz diagonal A invertible, demostrar que A^{-1} es una matriz diagonal

www.JuanBertomeu.es

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

55) Demostrar que si A es una matriz simétrica invertible, entonces A^{-1} también es simétrica

56) Una matriz cuadrada A es INVOLUTIVA si se verifica que $A^2 = I$

a) Demuestra que si A es involutiva, entonces $A^{-1} = A$

b) Comprueba que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ es involutiva

57) Una matriz cuadrada A es IDEMPOTENTE si se verifica que $A^2 = A$.

Comprueba que $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ es idempotente. ¿Es invertible?

58) Una matriz cuadrada A es ORTOGONAL si se verifica que $A \cdot A^t = I$

a) Comprobar que si A es ortogonal entonces $A^{-1} = A^t$

b) Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal

www.JuanBertomeuFerrer.com

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

59) Dadas A y B dos matrices de orden "n" y ortogonales. Demuestra que la matriz producto A·B es también una matriz ortogonal.

60) Despeja la matriz X en las siguientes ecuaciones matriciales (suponer que existen todas las matrices inversas que necesites para despejar)

a) $AX = B$

b) $XA = B$

c) $XB + A = C^t$

d) $BX + 2X = A$

e) $A^{-1} \cdot X = A$

f) $AXA^{-1} = B + C$

g) $(A+B)X = C$

h) $AX + BX = CX + A^t$

61) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz X que verifica $AX = C^t + B$

62) Calcula la matriz X que verifica $AX - B = 2X$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

63) Resuelve la ecuación matricial $XA = XB - A^t$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

64) Encuentra la matriz X que verifica la ecuación

$AXA = 2BA$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

65) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra la inversa A^{-1}

b) Utiliza A^{-1} para resolver la ecuación:

$$AX + C \cdot B^t = B \cdot B^t$$

66) Resuelve la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

67) Resuelve los sistemas de ecuaciones matriciales:

a)
$$\left.\begin{array}{l} 2A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 21 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ A - 2B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 \\ -7 & -1 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

b) $\left.\begin{array}{l} 4X+3Y=\begin{pmatrix}-7 & 4 & -6\\ 10 & -1 & 23\end{pmatrix} \\ 3X-2Y=\begin{pmatrix}-18 & 3 & 4\\ -1 & -5 & -4\end{pmatrix}\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 2A+3B=\begin{pmatrix}11 & 0 & 10\\ -8 & 7 & -1\end{pmatrix} \\ A-B=\begin{pmatrix}-2 & -5 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\end{array}\right\}$

68) Encuentra las matrices A y B que cumplen con el sistema de ecuaciones dado por:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix} \\ A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

69) Sean A, B y C las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -2 & -1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}6 & 7\\ -2 & -5\end{pmatrix}$$

Encuentra las matrices X e Y que cumplen:

$$\left.\begin{array}{l} AX+BY=C \\ AX=Y\end{array}\right\}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

JuanBertomeu

70) Encuentra una matriz X de orden 2 que cumpla $A + X = AX + XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

71) Resuelve la ecuación matricial $XA + AX = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

www.JuanBertomeu.es

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

1) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 1 & -3 & -2\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}-2 & 8 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

calcula:

a) $A+B$
b) $B+C$
c) $C+D$
d) $D+A$
e) $A-B$
f) $B-C$
g) $C-D$
h) $D-A$
i) A^t
j) B^t
k) C^t
l) D^t
m) $A\cdot B$
n) $B\cdot A$
o) $A\cdot C$
p) $A\cdot D$
q) $2A$
r) $-3B$
s) $4C$
t) $-2D$
u) $B\cdot C$
v) $B\cdot D$
w) $C\cdot D$
x) A^2

a) $A+B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 1 & -3 & -2\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 10 & 1\\ 1 & -2 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$

b) $B+C=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 7 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -6\end{pmatrix}$

Juan Bertomeu Ferrer

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

c) $C+D=\begin{pmatrix}4&1&2\\0&0&-1\\1&0&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&8&1\\0&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&9&3\\0&-1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}$

d) $D+A=\begin{pmatrix}-2&8&1\\0&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&4&0\\1&-3&-2\\2&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&12&1\\1&-4&0\\3&0&5\end{pmatrix}$

e) $A-B=\begin{pmatrix}-1&4&0\\1&-3&-2\\2&0&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&6&1\\0&1&0\\1&0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-2&-1\\1&-4&-2\\1&0&9\end{pmatrix}$

f) $B-C=\begin{pmatrix}3&6&1\\0&1&0\\1&0&-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&1&2\\0&0&-1\\1&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&5&-1\\0&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$

g) $C-D=\begin{pmatrix}4&1&2\\0&0&-1\\1&0&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&8&1\\0&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-7&1\\0&1&-3\\0&0&-2\end{pmatrix}$

h) $D-A=\begin{pmatrix}-2&8&1\\0&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&4&0\\1&-3&-2\\2&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4&1\\-1&2&4\\-1&0&-5\end{pmatrix}$

JuanBerdoMeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

i) $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; j) $B^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

k) $C^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; l) $D^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

m) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 11 & 12 & -18 \end{pmatrix}$

n) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -7 \\ 1 & -3 & -2 \\ -9 & 4 & -20 \end{pmatrix}$

o) $A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 9 \\ 13 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

p) $A \cdot D = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 7 \\ -4 & 11 & -5 \\ 1 & 16 & 2 \end{pmatrix}$

Juan Bertomeu Ferrer

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

q) $2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 2 & -6 & -4 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

r) $-3B = -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -18 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

s) $4C = 4 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

t) $-2D = -2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -16 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

u) $B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

v) $B \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 18 & 15 \\ 0 & -1 & 2 \\ -6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

www.JuanBerenguer.com

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

w) $C \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 31 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

x) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -16 & -8 \\ -8 & 13 & -4 \\ 8 & 8 & 25 \end{pmatrix}$

2) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $(A \cdot B)^2$ d) $(B \cdot A)^t$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 9 & -11 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & -8 \\ -15 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

c) $(A \cdot B)^2 = (A \cdot B) \cdot (A \cdot B) = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 9 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 9 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -104 & 156 \\ -117 & 13 \end{pmatrix}$

JuanBerto

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

d) $(B \cdot A)^t = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -15 \\ 4 & -6 & 6 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

3) Dadas las matrices A y B del ejercicio anterior, ¿qué dimensiones debe tener la matriz M para que se pueda efectuar el producto $A \cdot M \cdot B$?

Recuerda que el producto de dos matrices se puede efectuar cuando el número de columnas de la matriz que está escrita en primer lugar es igual al número de filas de la que está escrita en segundo lugar.

Tenemos las matrices:

$A_{2\times 3}$ y $B_{3\times 2}$. La matriz M es $M_{m\times n}$

Si debe existir la matriz producto $A \cdot M \cdot B$ tendrá que ser:

$$A_{2\times 3} \cdot M_{m\times n} \cdot B_{3\times 2} \Rightarrow \text{M será } M_{3\times 3}$$

$m = 3$ $\quad$ $n = 3$

Además, la matriz AMB será:

$$A_{2\times 3} \cdot M_{3\times 3} \cdot B_{3\times 2} = (AMB)_{2\times 2}$$

$3 = 3$ $\quad$ $3 = 3$

Dimensiones resultado

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

4) Si A es una matriz $A_{3\times 2}$, ¿qué dimensiones debe tener la matriz M para que $A^t \cdot M$ sea una matriz cuadrada?

Si A es una matriz $A_{3\times 2}$, entonces A^t será una matriz $A^t_{2\times 3}$

$$A^t_{2\times 3} \cdot M_{m\times n} = (A^t \cdot M)_{2\times n}$$

$m = 3$ (Dimensiones resultado)

Para que sea cuadrada debe ser $n = 2$

$\Rightarrow$ M debe ser una matriz $M_{3\times 2}$

5) Construye una matriz A cuadrada de orden 3 en la que sus elementos verifiquen $a_{ij} = i - j$. Comprueba que dicha matriz es antisimétrica.

La matriz $A_{3\times 3}$ pedida será:

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow[a_{ij} = i-j]{} A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una matriz se llama antisimétrica cuando coincide con la opuesta de su transpuesta. Veamos si la

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

matriz calculada es antisimétrica:

$$-A^t = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Como $A = -A^t \Rightarrow$ A es antisimétrica

6) Comprueba que las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ conmutan (es decir, verifican que $A \cdot B = B \cdot A$)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Como $AB = BA \Rightarrow$ $\Rightarrow$ A y B conmutan

7) Encuentra la expresión general de todas las matrices que conmutan con la matriz A, siendo:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Buscamos todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot B = B \cdot A$. Así:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a+b\\ c & c+d\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{a}+c=\cancel{a} \\ \cancel{b}+d=a+\cancel{b} \\ c=c \\ \cancel{d}=c+\cancel{d} \end{cases} \begin{cases} \rightarrow c=0 \\ \rightarrow a=d \ \forall b \\ \\ \rightarrow c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix} \forall a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

b) Buscamos todas las matrices $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ tales que $A\cdot B=B\cdot A$. Así:

$$\left.\begin{aligned} A\cdot B&=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c & -d\\ 2a & 2b\end{pmatrix}\\ B\cdot A&=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b & -a\\ 2d & -c\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -c&=2b\\ -d&=-a\\ 2a&=2d\\ 2b&=-c\end{aligned}\right\} \begin{aligned} c&=-2b\\ a&=d\end{aligned} \Rightarrow B=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -2b & a\end{pmatrix} \forall a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

c) Buscamos todas las matrices $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $A\cdot B = B\cdot A$. Así:

$$\left.\begin{aligned} A\cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix} \\ B\cdot A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-b & 2b \\ 3c-d & 2d \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 3a &= 3a-b \\ 3b &= 2b \\ -a+2c &= 3c-d \\ -b+2d &= 2d \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to b=0 \\ &\to b=0 \\ &\to a=d-c \quad \forall c,d\in\mathbb{R} \\ &\to b=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B=\left\{\begin{pmatrix} d-c & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \forall c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

8) Sea C el conjunto de todas las matrices de la forma $C=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ con $a,b\in\mathbb{R}$. Demuestra que dos matrices de este conjunto siempre conmutan.

Sea C el conjunto de matrices $C=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \forall a,b\in\mathbb{R}\right\}$

Tomemos dos matrices cualesquiera del conjunto C:

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Sean $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} z & t \\ -t & z \end{pmatrix}$ matrices de C.

Veamos si conmutan:

$$X \cdot Y = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z & t \\ -t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz-yt & xt+yz \\ -yz-xt & -yt+xz \end{pmatrix}$$

$$Y \cdot X = \begin{pmatrix} z & t \\ -t & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zx-yt & zy+xt \\ -tx-zy & -ty+xz \end{pmatrix}$$

Como vemos $X \cdot Y = Y \cdot X \quad \forall X, Y \in C$ como queríamos demostrar

a) Sea M el conjunto de todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a^2+b^2=1$. Demuestra que si multiplicamos dos matrices cualesquiera del conjunto M, la matriz producto que obtendremos también pertenecerá a M.

Sea el conjunto $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ con } a,b \in \mathbb{R} \;/\; a^2+b^2=1 \right\}$

Tomemos dos matrices $X, Y \in M$:

$$X \in M \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} / \; x^2+y^2=1$$

$$Y \in M \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} z & -t \\ t & z \end{pmatrix} / \; z^2+t^2=1$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Se trata de ver si la matriz producto $X \cdot Y$ también pertenece al conjunto M. Así:

$$X \cdot Y = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z & -t \\ t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz-yt & -xt-yz \\ yz+xt & -yt+xz \end{pmatrix}$$

Para que esta matriz $X \cdot Y$ pertenezca a M tendrá que verificarse que $(xz-yt)^2 + (yz+xt)^2 = 1$. Veámoslo:

$$(xz-yt)^2 + (yz+xt)^2 = x^2z^2 - 2xzyt + y^2t^2 + y^2z^2 + 2xzyt + x^2t^2 =$$

$$= x^2z^2 + y^2t^2 + y^2z^2 + x^2t^2 = x^2(z^2+t^2) + y^2(z^2+t^2) =$$

$$= x^2 \cdot 1 + y^2 \cdot 1 = x^2 + y^2 = 1$$

($= 1$ porque $z^2+t^2 = 1$; $= 1$ porque $x^2+y^2 = 1$)

Efectivamente, si $X, Y \in M \Rightarrow (X \cdot Y) \in M$

10) Si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2 tales que el producto $A \cdot B$ es la matriz nula 0_{2x2}, ¿es cierto que al menos una de las dos matrices A o B tiene que ser la matriz nula?

Si $A \cdot B = 0_{2x2}$, No es cierto que alguna de las dos matrices A o B deba ser la matriz nula. Para

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

demostrar que algo no es cierto en matemáticas el mejor camino es buscar un contraejemplo. En este caso es muy fácil ver que:

$$\left.\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \\ B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0_{2x2}$$

Donde puedes ver que ni A ni B son la matriz nula y la matriz producto A·B sí lo es.

11) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}x&1\\-1&y\end{pmatrix}$, encontrar los valores de x e y para los cuales se verifica que $A^2=\begin{pmatrix}3&1\\-1&0\end{pmatrix}$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}x&1\\-1&y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&1\\-1&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2-1&x+y\\-x-y&-1+y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-1=3 \\ x+y=1 \\ -x-y=-1 \\ y^2-1=0\end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x^2=4 \nearrow x=-2 \\ \qquad\quad \searrow x=+2 \\ \rightarrow x+y=1 \\ \rightarrow y^2=1 \nearrow y=-1 \\ \qquad\quad \searrow y=1 \end{array}$$

De los valores de x, y calculados, los únicos que cumplen $x+y=1$ son $\boxed{x=2}$ e $\boxed{y=-1}$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

12) Encuentra todas las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix}-1 & y\\ z & t\end{pmatrix}$ tales que A^2 sea la matriz unitaria de orden 2, I_{2x2}

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix}-1 & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & y\\ z & t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+zy & -y+yt\\ -z+zt & zy+t^2\end{pmatrix}$$

$$A^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix}1+zy & -y+yt\\ -z+zt & zy+t^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+zy=1 \\ -y+yt=0 \\ -z+zt=0 \\ zy+t^2=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\rightarrow z\cdot y=0 \\ \rightarrow y(t-1)=0 \\ \rightarrow z(t-1)=0 \\ \rightarrow zy+t^2=1\end{array} \Rightarrow z\cdot y=0$$

Varias Opciones

Opción 1:

$$\left.\begin{array}{l} z=0 \\ y\neq 0 \end{array}\right\} y\cdot(t-1)=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}-1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \forall y\in\mathbb{R}$$

Opción 2:

$$\left.\begin{array}{l} z\neq 0 \\ y=0 \end{array}\right\} z\cdot(t-1)=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ z & 1\end{pmatrix}\ \forall z\in\mathbb{R}$$

Opción 3:

$$\left.\begin{array}{l} z=0 \\ y=0 \end{array}\right\} zy+t^2=1 \Rightarrow t^2=1$$

$$t=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$t=-1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

13) Determina los valores de x, y, z para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+yx & y+yz \\ x+xz & xy+z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+yx=5 \\ y+yz=0 \\ x+xz=0 \\ xy+z^2=5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow yx=4 \longrightarrow y\neq 0 \wedge x\neq 0 \\ \longrightarrow y(z+1)=0 \\ \longrightarrow x(z+1)=0 \\ \longrightarrow xy+z^2=5 \longrightarrow 4+z^2=5 \Rightarrow z^2=1 \end{array}$$

Como $y\neq 0 \wedge x\neq 0 \Rightarrow z=-1$

Las matrices que buscamos serán:

$$\left.\begin{array}{l} y\cdot x=4 \\ z=-1 \end{array}\right\} \; y=\frac{4}{x} \text{ con } x\neq 0$$

$$A=\left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 4/x \\ x & -1 \end{pmatrix} \; \forall x\neq 0 \in \mathbb{R} \right\}$$

* No era posible DETERMINAR valores concretos para x e y

14) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula los valores de x e y para que $A^2+x\cdot A+y\cdot I_{2x2}=0_{2x2}$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

16) Determina todas las matrices A de orden 2 antisi-métricas que verifiquen la condición $A^4 = 16\,I$

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de orden 2. Si A es antisimétrica, se tendrá que verificar que $A = -A^t$.

Por tanto:

$$A = -A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -a \\ b = -c \\ c = -b \\ d = -d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = 0 \\ \\ c = -b \ \forall b \\ \\ d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \forall b$$

De todas ellas, veamos qué matrices A cumplen $A^4 = 16I$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = 16\,I \Rightarrow \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow b^4 = 16 \begin{cases} \nearrow b = -2 \\ \searrow b = 2 \end{cases}$$

Las matrices pedidas son $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

17) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$, calcula las matrices B tales que $A\cdot B = B\cdot A^t$

B será una matriz $B_{2x2} \Rightarrow B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$$A\cdot B = B\cdot A^t$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a+c&b+d\\2a+c&2b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&2a+b\\c+d&2c+d\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+c=a+b \\ b+d=2a+b \\ 2a+c=c+d \\ 2b+d=2c+d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c=b \\ d=2a \\ d=2a \\ c=b \end{array}\right\}$$

Las matrices B que estamos buscando son el conjunto de matrices $B=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&2a\end{pmatrix}\ \forall a,b\in\mathbb{R}\right\}$

18) Halla todas las matrices M de la forma $\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación $M^2-2M=3I$

$$M^2=M\cdot M=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2&2ab\\2ab&a^2+b^2\end{pmatrix}$$

$$M^2-2M=\begin{pmatrix}a^2+b^2&2ab\\2ab&a^2+b^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2a&2b\\2b&2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2-2a&2ab-2b\\2ab-2b&a^2+b^2-2a\end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$M^2-2M=3I \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2-2a & 2ab-2b \\ 2ab-2b & a^2+b^2-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2+b^2-2a=3 \\ 2ab-2b=0 \end{matrix}\right\} \; 2b(a-1)=0 \begin{cases} 2b=0 \Rightarrow b=0 \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \end{cases}$$

opción 1:

$b=0 \longrightarrow a^2-2a-3=0 \begin{cases} a=-1 \\ a=3 \end{cases}$

Opción 2:

$a=1 \longrightarrow 1+b^2-2=3 \Rightarrow b^2=4 \begin{cases} b=-2 \\ b=2 \end{cases}$

Las matrices M pedidas son el conjunto dado por:

$$M=\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

19) Determina los valores de "m" para los cuales la matriz

$X=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique $X^2-4X+I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$X^2=X\cdot X=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X^2-4X+I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4m & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2-4m+1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2-4m+1=1 \Rightarrow m^2-4m=0 \Rightarrow m(m-4)=0 \begin{cases} m=0 \\ m=4 \end{cases}$$

20) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$, calcula los valores de "m" y "n" para los que se cumple $(I+A)^3 = mI+nA$

$$(I+A)^2 = (I+A)\cdot(I+A) = I+A+A+A^2 = A^2+2A+I$$

$$(I+A)^3 = (I+A)^2\cdot(I+A) = (A^2+2A+I)\cdot(I+A) =$$

$$= A^2+2A+I+A^3+2A^2+A = A^3+3A^2+3A+I$$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^3 = A^2\cdot A = -I\cdot A = -A$$

$$\Rightarrow (I+A)^3 = A^3+3A^2+3A+I = -A-3I+3A+I = 2A-2I$$

$$\left.\begin{aligned} (I+A)^3 &= -2I+2A \\ (I+A)^3 &= mI+nA \end{aligned}\right\} \Rightarrow m=-2 \wedge n=2$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

21) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & x \\ -x & -1 \end{pmatrix}$, averiguar razonadamente si existe algún valor de "x" para el que se verifique $A^2 = A$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -x & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & x \\ -x & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-x^2 & x \\ -x & -x^2+1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-x^2 & x \\ -x & -x^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -x & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4-x^2=2 \\ x=x \\ -x=-x \\ -x^2+1=-1 \end{array}\right\} x^2=2 \begin{cases} \nearrow x=-\sqrt{2} \\ \searrow x=+\sqrt{2} \end{cases}$$

22) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n. Sabiendo que $A^2=A$ y que $B=2A-I$, averiguar qué matriz es B^2.

$$B^2 = B \cdot B = \underset{\uparrow B=2A-I}{(2A-I)\cdot(2A-I)} = 4A^2-2A-2A+I =$$

$$= 4A^2-4A+I \underset{\uparrow A^2=A}{=} 4A-4A+I = I$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

23) Encuentra todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que conmuten con la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De entre todas ellas determina aquella cuya suma de los elementos de la diagonal principal sea 5 y donde $a_{11} = -a_{12}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2d & 0 \\ 2a+5c & 2b+5d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 5c+2d & 2c+5d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 5a+2c &= 5a+2b \\ 5b+2d &= 2a+5b \\ 2a+5c &= 5c+2d \\ 2b+5d &= 2c+5d \end{aligned}\right\} \begin{aligned} b &= c \\ a &= d \end{aligned}$$

Las matrices de la forma dada que conmutan con la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son las del conjunto:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \forall a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

De todas ellas:

- La suma de los elementos de la diagonal principal es 5 $\Rightarrow a+a+1=5 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$

- $a_{11} = -a_{12} \Rightarrow a = -b \Rightarrow b = -a = -2$

La matriz pedida es:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{41}

Vamos a calcular la potencia n-ésima de A por el método de inducción completa

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Hipótesis}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Comprobamos que se verifica para las potencias calculadas $n=\{1,2,3,4\}$ y suponemos que se cumple hasta $n=n$.

$$A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2(n+1) & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2n+2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2n & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2n+2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2n & 1\end{pmatrix},\ n\in\mathbb{N}$$

En concreto, para $n=41 \Rightarrow A^{41}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 82 & 1\end{pmatrix}$

¡¡Nota!!: Si el enunciado no especifica que utilices el método de inducción COMPLETA, puedes dar como buena la primera hipótesis que das para A^n simplemente comprobando que se satisface para las potencias calculadas

25) De una matriz A sabemos que cumple que $A^2=2A-I$ Determina la expresión general de la potencia n-ésima de la matriz A.

$$A^2=2A-I$$

$$A^3=A^2\cdot A=(2A-I)\cdot A=2A^2-A=2(2A-I)-A=$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$= 4A - 2I - A = 3A - 2I$

$A^4 = A^3 \cdot A = (3A-2I)\cdot A = 3A^2 - 2A = 3(2A-I) - 2A =$

$= 6A - 3I - 2A = 4A - 3I$

$A^5 = A^4 \cdot A = (4A-3I)\cdot A = 4A^2 - 3A = 4(2A-I) - 3A =$

$= 8A - 4I - 3A = 5A - 4I$

Y por tanto, $A^n = n\cdot A - (n-1)\cdot I$ con $n \in \mathbb{N}$

26) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que A y B conmutan

b) Calcula A^n y B^n

a) A y B conmutan si se verifica que $A\cdot B = B\cdot A$. Vámoslo:

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A\cdot B = B\cdot A$$

$\Rightarrow$ A y B conmutan

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

b) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ con $n \in \mathbb{N}$

$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\Rightarrow B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ con $n \in \mathbb{N}$

www.JuanBeltoopreep

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

27) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula todas las matrices B que conmutan con A

b) Calcula A^n

a) Buscamos todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot B = B \cdot A$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = a+b \\ b = b \\ a+c = c+d \\ b+d = d \end{cases} \begin{cases} \rightarrow b = 0 \\ \\ \rightarrow a = d \ \forall c \\ \rightarrow b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \ \forall a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Juan Bertomeu Ferrer

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

28) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula:

a) Todas las matrices B que conmutan con A

b) A^4 y A^n

a) Buscamos las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot B = B \cdot A$

$$\left.\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3a+2b \\ c & 3c+2d \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a+3c &= a \\ b+3d &= 3a+2b \\ c &= 2c \\ 2d &= 3c+2d \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow c = 0 \\ &\rightarrow b = 3d-3a \\ &\rightarrow c = 0 \\ &\rightarrow c = 0 \end{aligned}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\Rightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3d-3a \\ 0 & d \end{pmatrix} \ \forall a, d \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 21 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 21 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 45 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

Tenemos la serie 3, 9, 21, 45, que se obtiene según:

$a_1 = 3$

$a_2 = 3 + 2 \cdot 3 = 9 = 3 \cdot (3) \rightarrow 3 = 2^1 + 2^0$

$a_3 = 3 + 2 \cdot 9 = 21 = 3 \cdot (7) \rightarrow 7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$

$a_4 = 3 + 2 \cdot 21 = 45 = 3 \cdot (15) \rightarrow 15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

29) Considera las matrices $M=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $V=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula M^n

b) Todas las matrices M que cumplan que $M^{100}=V$

a) $M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$

$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$

$M^5 = M^4 \cdot M = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^5 & 5a^4b \\ 0 & a^5 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\Rightarrow M^n = \begin{pmatrix} a^n & n \cdot a^{n-1} \cdot b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ con $n \in \mathbb{N}$

b) $M^{100} = V \Rightarrow \begin{pmatrix} a^{100} & 100 \cdot a^{99} \cdot b \\ 0 & a^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^{100} = 1 \\ 100 \cdot a^{99} \cdot b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$a^{100} = 1 \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases} ; \quad 100 \cdot a^{99} \cdot b = 1 \begin{cases} a=-1 \Rightarrow b = -1/100 \\ a=1 \Rightarrow b = 1/100 \end{cases}$$

Las matrices pedidas son:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1/100 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1/100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

30) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, determina:

a) Las constantes m y n tales que $A^2 = m \cdot A + nI$

b) La potencia A^5 utilizando exclusivamente la expresión calculada en el apartado anterior.

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^2 = mA + nI \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = m + n \\ -1 = m \\ -1 = m \\ 5 = -2m + n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} m = -1 \\ \hookrightarrow 2 = -1 + n \Rightarrow n = 3 \\ \hookrightarrow 5 = 2 + n \Rightarrow n = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow m = -1 \wedge n = 3$$

$$\Rightarrow A^2 = -A + 3I$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

b) $A^5 = A^2 \cdot A^2 \cdot A = (-A+3I)\cdot(-A+3I)\cdot A =$

$= (-A+3I)\cdot(-A^2+3A) = (-A+3I)\cdot(A-3I+3A) =$

$= (-A+3I)\cdot(4A-3I) = -4A^2+3A+12A-9I =$

$= -4A^2 + 15A - 9I = -4(-A+3I) + 15A - 9I =$

$= 4A - 12I + 15A - 9I = 19A - 21I$

$$\Rightarrow A^5 = 19A - 21I = \begin{pmatrix} 19 & 19 \\ 19 & -38 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ 19 & -59 \end{pmatrix}$$

31) Una matriz cuadrada es NILPOTENTE de grado K si existe K para el cual A^K es la matriz nula, siendo $A^{K-1} \neq 0$. Comprueba que la siguiente matriz es nilpotente y di de qué grado lo es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

www.JuanBerenguer.com

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Como vemos, $A^2 = \mathbb{O}_{3\times3}$ sin serlo A. La matriz A es nilpotente de grado 2.

32) Calcular por inducción A^n, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

33) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2, A^3, A^4 y A^5

b) Expresa A^{2n} en función de $I_{2\times2}$

a) $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 32 \\ -32 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Como puedes ver, las potencias pares son matrices escalares y se pueden escribir en función de la matriz identidad:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -4I = -2^2 \cdot I$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = 16 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 16I = 2^4 \cdot I$$

$$A^{2n} = (-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot I \quad n = 1, 2, \cdots$$

34) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. se pide:

a) Comprobar que $A^3 + I = 0$

b) Calcular A^7 y A^{1000}

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$\Rightarrow A^3 + I = (-I) + I = O_{3\times 3}$ como queríamos demostrar

b) Siempre que calculando potencias de una matriz llegues a una matriz "conocida" (aquí hemos llegado a que $A^3 = -I$), debes calcular la potencia que te pidan en función de la potencia conocida. Así:

$$A^7 = (A^3)^2 \cdot A = (-I)^2 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{1000} = (A^3)^{333} \cdot A = (-I)^{333} \cdot A = -I \cdot A = -A$$

35) Calcular por inducción A^n, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El término a_{13} de estas potencias siguen la serie:

1, 3, 6, 10, ... de término general $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Por tanto:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

36) Encontrar por inducción completa la matriz A^n siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$ con $n \in \mathbb{N}$

www.JuanBerenguer.es

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/n & 1/n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/n & 1/n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{n} & \frac{2}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{n} & \frac{2}{n} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{n} & \frac{3}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{n} & \frac{3}{n} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{n} & \frac{4}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{n}{n} & \frac{n}{n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Hipótesis}$$

Comprobamos que se verifica para las potencias calculadas $n = \{1, 2, 3, 4\}$ y suponemos que se cumple hasta $n = n$.

$$\text{Hipótesis} \quad A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{n+1}{n} & \frac{n+1}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/n & 1/n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{n+1}{n} & \frac{n+1}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Y por tanto:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

37) Encontrar por inducción completa la matriz A^n siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix} = 3^{n-1} \cdot A \quad \text{Hipótesis}$$

Comprobamos que se verifica para las potencias calculadas $n = \{1, 2, 3, 4\}$ y suponemos que se cumple

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

hasta $n=n$.

Hipótesis: $A^{n+1} = 3^{(n+1)-1} \cdot A = 3^n \cdot A$

Comprobación:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = 3^{n-1} \cdot A \cdot A = 3^{n-1} \cdot A^2 = 3^{n-1} \cdot 3A =$$

$$= 3^{n-1+1} \cdot A = 3^n \cdot A$$

$$\Rightarrow A^n = 3^{n-1} \cdot A \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

38) Calcula la inversa de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Dado que se trata de matrices 2x2, podemos practicar el método de la definición

$$X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = I$$

DEFINICIÓN DE MATRIZ INVERSA

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ 4a+3c & 4b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\left.\begin{matrix} 2a-c=1 \\ 4a+3c=0 \end{matrix}\right\} \times 3 \rightarrow \left.\begin{matrix} 6a-3c=3 \\ 4a+3c=0 \end{matrix}\right\} E_1+E_2 \rightarrow 10a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{10}$$

$$\rightarrow c=-\frac{4a}{3}=\frac{-4\cdot\frac{3}{10}}{3}=-\frac{4}{10}=-\frac{2}{5}$$

$$\left.\begin{matrix} 2b-d=0 \\ 4b+3d=1 \end{matrix}\right\} \times 3 \rightarrow \left.\begin{matrix} 6b-3d=0 \\ 4b+3d=1 \end{matrix}\right\} E_1+E_2 \rightarrow 10b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{10}$$

$$\rightarrow d=2b=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot B^{-1}=I$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+5c & 3b+5d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 3a+5c=1 \\ 2a+3c=0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \times(-2) \rightarrow \\ \times 3 \rightarrow \end{matrix} \left.\begin{matrix} -6a-10c=-2 \\ 6a+9c=0 \end{matrix}\right\} E_1+E_2 \rightarrow -c=-2 \Rightarrow c=2$$

$$\rightarrow a=-\frac{9c}{6}=-\frac{18}{6}=-3$$

$$\left.\begin{matrix} 3b+5d=0 \\ 2b+3d=1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \times(-2) \rightarrow \\ \times 3 \rightarrow \end{matrix} \left.\begin{matrix} -6b-10d=0 \\ 6b+9d=3 \end{matrix}\right\} E_1+E_2 \rightarrow -d=3 \Rightarrow d=-3$$

$$\rightarrow b=-\frac{10}{6}\cdot d=\frac{30}{6}=5$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$C \cdot C^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+3c & 5b+3d \\ 7a+4c & 7b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5a+3c=1 \\ 7a+4c=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \times 4 \rightarrow \\ \times(-3) \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{l} 20a+12c=4 \\ -21a-12c=0 \end{array}\right\} E_1+E_2 \rightarrow -a=4 \Rightarrow a=-4$$

$$\rightarrow c = \frac{-21a}{12} = \frac{-21\cdot(-4)}{12} = 7$$

$$\left.\begin{array}{l} 5b+3d=0 \\ 7b+4d=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \times 4 \rightarrow \\ \times(-3) \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{l} 20b+12d=0 \\ -21b-12d=-3 \end{array}\right\} E_1+E_2 \rightarrow -b=-3 \Rightarrow b=3$$

$$\rightarrow d = \frac{-20b}{12} = \frac{-60}{12} = -5$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

39) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(A^2)^{-1} + (A^{-1})^2$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 18 \\ -72 & -7 \end{pmatrix}$$

www.JuanBertoMpreP

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$A^2 \cdot (A^2)^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 20 & 18 \\ -72 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 20a+18c & 20b+18d \\ -72a-7c & -72b-7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 20a+18c=1 \\ -72a-7c=0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \times 7 \rightarrow \\ \times 18 \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{l} 140a+126c=7 \\ -1296a-126c=0 \end{array}\right| E_1+E_2 \rightarrow -1156a=7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-7}{1156} \dashrightarrow c = \frac{72a}{-7} = \frac{18}{289}$$

$$\left.\begin{array}{l} 20b+18d=0 \\ -72b-7d=1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \times 7 \rightarrow \\ \times 18 \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{l} 140b+126d=0 \\ -1296b-126d=18 \end{array}\right| E_1+E_2 \rightarrow -1156b=18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{-9}{578} \dashrightarrow d = \frac{-20b}{18} = \frac{5}{289}$$

$$\Rightarrow (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{1156} & \frac{-9}{578} \\ \frac{18}{289} & \frac{5}{289} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6a+2c & 6b+2d \\ -8a+3c & -8b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\left.\begin{array}{l} 6a+2c=1 \\ -8a+3c=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \times(-3) \rightarrow -18a-6c=-3 \\ \times(2) \rightarrow -16a+6c=0 \end{array} \Big\} E_1+E_2 \rightarrow -34a=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{3}{34} \dashrightarrow c=\frac{8a}{3}=\frac{4}{17}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6b+2d=0 \\ -8b+3d=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \times(-3) \rightarrow -18b-6d=0 \\ \times(2) \rightarrow -16b+6d=2 \end{array} \Big\} E_1+E_2 \rightarrow -34b=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\frac{-1}{17} \dashrightarrow d=\frac{-6b}{2}=-3b=\frac{3}{17}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{34} & \frac{-1}{17} \\ \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1})^2=A^{-1}\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{34} & \frac{-1}{17} \\ \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{34} & \frac{-1}{17} \\ \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-7}{1156} & \frac{-9}{578} \\ \frac{18}{289} & \frac{5}{289} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^2)^{-1}+(A^{-1})^2=\begin{pmatrix} \frac{-7}{1156} & \frac{-9}{578} \\ \frac{18}{289} & \frac{5}{289} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{-7}{1156} & \frac{-9}{578} \\ \frac{18}{289} & \frac{5}{289} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-7}{578} & \frac{-9}{289} \\ \frac{36}{289} & \frac{10}{289} \end{pmatrix}$$

Nota: Como has visto, se ha complido que $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$.

Como ejercicio, puedes tratar de demostrar que $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

40) Calcular por el método de Gauss-Jordan la inversa de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&0&1&0&0\\1&1&-1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&0&1&0\\0&-1&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3+F_2]{F_1+F_2}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&1&0\\0&-1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[-F_2]{F_1+F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&1&1\\0&1&0&-1&0&0\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&4&-3\\3&6&-5\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\2&4&-3&0&1&0\\3&6&-5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[-3F_1+F_3]{-2F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&-7&-2&1&0\\0&3&-11&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[-2F_3+3F_2]{-2F_1+F_2}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccccc}-2&0&-11&-4&1&0\\0&2&-7&-2&1&0\\0&0&1&0&3&-2\end{array}\right)\xrightarrow[11F_3+F_1]{7F_3+F_2}\left(\begin{array}{cccccc}-2&0&0&-4&34&-22\\0&2&0&-2&22&-14\\0&0&1&0&3&-2\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{1}{2}F_2]{-\frac{1}{2}F_1}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu Ferrer

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -17 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+F_3]{3F_2+F_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_3+F_1]{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_3]{-F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_4}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\xrightarrow[F_3 \to F_4']{F_2 \to F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2+F_3]{-2F_3+F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 7 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+F_3]{\begin{matrix}-6F_4+F_1 \\ 4F_4+F_2\end{matrix}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 13 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -6 & -1 \\ -8 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1+F_4]{F_1+F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2F_3+F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+F_3]{\begin{matrix}F_1+F_3 \\ F_2+F_3\end{matrix}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\begin{matrix} -F_4+F_1 \\ -4F_4+F_2 \\ -2F_4+F_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -F_1 \\ \frac{1}{2}F_2 \\ -F_4 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

41) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1} y B^{-1}

b) Calcula $(A \cdot B)^{-1}$

c) Comprueba que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-3c & b-3d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} a-3c=1 \\ c=0 \end{matrix}\right\} a=1 \wedge c=0 \qquad \left.\begin{matrix} b-3d=0 \\ d=1 \end{matrix}\right\} b=3d=3 \wedge d=1$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B \cdot B^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3a+4c & -3b+4d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

JuanBertomeuFerrer

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\left.\begin{matrix} -3a+4c=1 \\ a=0 \end{matrix}\right\} c=\frac{1}{4} \wedge a=0 \qquad \left.\begin{matrix} -3b+4d=0 \\ b=1 \end{matrix}\right\} d=\frac{3}{4} \wedge b=1$$

$$\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(AB)\cdot(AB)^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -6a+4c & -6b+4d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -6a+4c=1 \\ a=0 \end{matrix}\right\} c=\frac{1}{4} \wedge a=0 \qquad \left.\begin{matrix} -6b+4d=0 \\ b=1 \end{matrix}\right\} b=1 \wedge d=\frac{6b}{4}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (A\cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/2 \end{pmatrix}$$

c) $B^{-1}\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 3/2 \end{pmatrix}$

Efectivamente $(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

42) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ calcula:

a) A^{-1} y $(A^t)^{-1}$

b) Comprueba que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3a-4c & -3b-4d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -3a-4c = 1 \\ 2a+3c = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \times 2 \rightarrow \\ \times 3 \rightarrow \end{matrix} \left.\begin{matrix} -6a-8c = 2 \\ 6a+9c = 0 \end{matrix}\right\} E_1+E_2 \rightarrow c = 2$$

$$\rightarrow a = \frac{-3c}{2} = -3$$

$$\left.\begin{matrix} -3b-4d = 0 \\ 2b+3d = 1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \times 2 \rightarrow \\ \times 3 \rightarrow \end{matrix} \left.\begin{matrix} -6b-8d = 0 \\ 6b+9d = 3 \end{matrix}\right\} E_1+E_2 \rightarrow d = 3$$

$$\rightarrow -3b = 4d \Rightarrow b = \frac{4d}{-3} = -4$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$A^t \cdot (A^t)^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3a+2c & -3b+2d \\ -4a+3c & -4b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -3a+2c = 1 \\ -4a+3c = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \times 3 \rightarrow \\ \times -2 \rightarrow \end{matrix} \left.\begin{matrix} -9a+6c = 3 \\ 8a-6c = 0 \end{matrix}\right\} E_1+E_2 \rightarrow -a = 3 \Rightarrow a = -3$$

$$\rightarrow 3c = 4a \Rightarrow c = \frac{4a}{3} = -4$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\left.\begin{matrix} -3b+2d=0 \\ -4b+3d=1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \times 3 \to \\ \times -2 \to \end{matrix} \left.\begin{matrix} -9b+6d=0 \\ 8b-6d=-2 \end{matrix}\right\} E_1+E_2 \to -b=-2 \Rightarrow b=2$$

$$\dashrightarrow 2d=3b \Rightarrow d=\frac{3b}{2}=3$$

$$\Rightarrow (A^t)^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^t=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Como ves, efectivamente $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$

43) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que A^3 es la matriz nula

b) Demuestra que la matriz (A^2+A+I) y la matriz $(I-A)$ son inversas una de la otra.

a) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

www.JuanBerdigomeu.es

b) Recuerda que se llama inversa de una matriz X y se simboliza por X^{-1} a aquella matriz que verifica $X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = I$.

Es decir, que el producto de una matriz por su inversa nos da la matriz identidad.

Veamos que da el producto de las matrices que nos han dado:

$$(A^2 + A + I) \cdot (I - A) = A^2 + A + I - A^3 - A^2 - A =$$

$$= I - A^3 = I$$

($A^3 = 0$)

Por lo que podemos asegurar que las matrices $(A^2 + A + I)$ y $(I - A)$ son inversas una de la otra.

44) Determina todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ tales que $A^{-1} = 2I - A$

Recuerda la definición de matriz inversa:

$$A \cdot A^{-1} = I \xrightarrow[A^{-1} = 2I - A]{} A \cdot (2I - A) = I \Rightarrow 2A - A^2 = I$$

Buscamos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ que verifiquen $2A - A^2 = I$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Así:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+cb & ba+c^2 \end{pmatrix}$$

$$2A - A^2 = I$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2a \\ 2b & 2c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+cb & ba+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -ab & -ac \\ -cb & 2c-ba+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} -a \cdot b = 1 & \longrightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0 \\ -a \cdot c = 0 & \longrightarrow \text{Como } a \neq 0 \Rightarrow c = 0 \\ -c \cdot b = 0 & \\ 2c - ba + c^2 = 1 & \longrightarrow \text{Como } c = 0 \Rightarrow -ab = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{a} \end{array}\right.$$

Las matrices buscadas son:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & a \\ -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \ \forall a \neq 0 \in \mathbb{R} \right\}$$

45) Sabiendo que la inversa de una matriz A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, y que la inversa de la matriz A·B es $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, determina la matriz B

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

Puedes partir de la definición de matriz inversa:

$$A\cdot B\cdot (AB)^{-1} = I \Rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I} B(AB)^{-1} = A^{-1}\cdot I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\cdot (AB)^{-1} = A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+5b & 4a+3b \\ 2c+5d & 4c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 2a+5b=1 \\ 4a+3b=2 \end{matrix}\right\} \times(-2) \quad \left.\begin{matrix} -4a-10b=-2 \\ 4a+3b=2 \end{matrix}\right\} E_1+E_2 \rightarrow -7b=0 \Rightarrow b=0$$

$$b=0 \Rightarrow 2a+5b=1 \Rightarrow a=1/2$$

$$\left.\begin{matrix} 2c+5d=2 \\ 4c+3d=1 \end{matrix}\right\} \times(-2) \quad \left.\begin{matrix} -4c-10d=-4 \\ 4c+3d=1 \end{matrix}\right\} E_1+E_2 \rightarrow -7d=-3 \Rightarrow d=\frac{3}{7}$$

$$c=\frac{1-3d}{4}=\frac{1-9/7}{4}=-\frac{1}{14}$$

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/14 & 3/7 \end{pmatrix}$$

46) Si una matriz cuadrada verifica que $A^2=2A+3I$

a) obtener la expresión de A^{-1} en función de A y de I

b) obtener todas las matrices $A=\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ que cumplen $A^2=2A+3I$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $A^2 = 2A + 3I$

$$A^2 - 2A = 3I \Rightarrow \frac{1}{3}(A^2 - 2A) = I \Rightarrow \frac{1}{3} A \cdot (A - 2I) = I$$

$$\Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I\right) = I$$

y como: $A \cdot A^{-1} = I$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I$$

b) $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 & 2yx \\ 2yx & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

$A^2 = 2A + 3I$

$$\begin{pmatrix} x^2+y^2 & 2yx \\ 2yx & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2+y^2-2x & 2yx-2y \\ 2yx-2y & x^2+y^2-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2-2x &= 3 \\ 2yx-2y &= 0 \end{aligned}\right\} \; 2y(x-1) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Opción 1: $y = 0$:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Opción 2: $x=1$:

$$1+y^2-2=3 \Rightarrow y^2=4 \begin{cases} y=-2 \\ y=+2 \end{cases}$$

Las matrices que buscamos son las del conjunto:

$$A=\left\{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

47) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ a & b & c\end{pmatrix}$, calcula:

a) Las constantes a, b y c para que se cumpla que $A^t = A^{-1}$

b) La matriz A^4 para los valores de a, b y c obtenidos

a) Como $A \cdot A^{-1} = I$, si $A^{-1} = A^t$ entonces $A \cdot A^t = I$. Así:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ a & b & c\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1/\sqrt{2} & b\\ 0 & 1/\sqrt{2} & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(b+c)\\ a & \frac{1}{\sqrt{2}}(b+c) & a^2+b^2+c^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(b+c) = 0 \\ a^2+b^2+c^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} \rightarrow b+c=0 \rightarrow c=-b \\ \rightarrow b^2+(-b)^2 = 1 \Rightarrow 2b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -1/\sqrt{2} \Rightarrow c = 1/\sqrt{2} \\ b = 1/\sqrt{2} \Rightarrow c = -1/\sqrt{2} \end{cases}$$

Las posibles matrices A son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ o bien } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

b) Opción 1:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Juan Bertomeu Ferrer

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Opción 2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = I \cdot I = I$$

48) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2 = 2I$

b) Calcula A^{-1}

c) Halla A^{12} y la inversa de A^{12}

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$

b) Como $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow$

$A^2 = 2I \Rightarrow A \cdot A = 2I \Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{2} A\right) = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} A$

c) $A^{12} = (A^2)^6 = (2I)^6 = 2^6 \cdot I$

$A^{12} \cdot (A^{12})^{-1} = I \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{2^6 \cdot I}_{A^{12}} \cdot (A^{12})^{-1} = I \Rightarrow (A^{12})^{-1} = \frac{1}{2^6} \cdot I$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

49) Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 6 & -9\end{pmatrix}\xrightarrow{-3F_1+F_2}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow rg(A)=1$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & -7\end{pmatrix}\xrightarrow{-5F_1+F_2}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -22\end{pmatrix}\Rightarrow rg(B)=2$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & -3 & 7\\ -1 & 4 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1+F_3]{-4F_1+F_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & -15 & 15\\ 0 & 7 & -7\end{pmatrix}\xrightarrow{7F_2+15F_3}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & -15 & 15\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow rg(C)=2$$

$$D=\begin{pmatrix}-2 & 8 & 3 & 0\\ 1 & -3 & 2 & 1\\ -1 & 5 & 5 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[-2F_3+F_1]{2F_2+F_1}\begin{pmatrix}-2 & 8 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 7 & 2\\ 0 & -2 & -7 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2+F_3}\begin{pmatrix}-2 & 8 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 7 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow rg(D)=2$$

$$E=\begin{pmatrix}2 & -3 & 7 & 1\\ -1 & 0 & 2 & -3\\ 0 & -3 & 11 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow{2F_2+F_1}\begin{pmatrix}2 & -3 & 7 & 1\\ 0 & -3 & 11 & -5\\ 0 & -3 & 11 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow{-F_2+F_3}\begin{pmatrix}2 & -3 & 7 & 1\\ 0 & -3 & 11 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow rg(E)=2$$

www.JuanBerlaquimeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

50) Calcular en función de "t" el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3 & t\\ 4 & -2 & -6 & -8\\ 2 & -1 & -3 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1+F_3]{2F_1+F_2}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3 & t\\ 0 & 0 & 0 & 2t-8\\ 0 & 0 & 0 & t-4\end{pmatrix}\xrightarrow{-2F_3+F_2}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3 & t\\ 0 & 0 & 0 & 2t-8\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad 2t-8=0 \Rightarrow t=\frac{8}{2}=4 \Rightarrow \begin{cases}\text{Si } t=4 \Rightarrow rg(A)=1\\ \text{Si } t\neq 4 \Rightarrow rg(A)=2\end{cases}$$

51) Basándote en el estudio del rango de la matriz, averigua para qué valores de "t" existe la matriz inversa de A, siendo

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & -3\\ -4 & -4 & 2t\end{pmatrix}$$

Recuerda que una matriz cuadrada de orden "n" es invertible cuando su rango es "n"

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & -3\\ -4 & -4 & 2t\end{pmatrix}\xrightarrow[-4F_1+F_3]{3F_1+F_2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & -8 & 2t-4\end{pmatrix}\xrightarrow{8F_2+6F_3}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 12t-24\end{pmatrix}$$

$$12t-24=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow \begin{cases}\text{Si } t=2 \Rightarrow rg(A)=2 \Rightarrow \nexists\, A^{-1}\\ \text{Si } t\neq 2 \Rightarrow rg(A)=3 \Rightarrow \exists\, A^{-1}\end{cases}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

52) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Calcula el rango de la matriz A^n. ¿Depende el rango de n?

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -3 & 6\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3\cdot A = \begin{pmatrix}1 & -3 & 6\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -4 & 10\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Longrightarrow A^n = \begin{pmatrix}1 & -n & \frac{n(n+1)}{2}\\ 0 & 1 & -n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Como has podido comprobar, todas las potencias de A calculadas son matrices escalonadas en las que vemos que el rango es 3 independientemente de la potencia considerada. Esto es:

$$rg(A^n) = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

53) Calcular los valores de a, b y c para que $rg(A) = 1$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ a & b+2 & 3 & -3c \end{pmatrix}$$

Dado que esta matriz tiene únicamente dos vectores fila, si queremos que sea $rg(A) = 1$, dichos vectores tienen que ser linealmente dependientes. Es decir, deben ser proporcionales. Así:

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{b+2} = \frac{-3}{3} = \frac{-1}{3c}$$

$$\hookrightarrow \frac{2}{a} = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{b+2} = -1 \Rightarrow b+2 = -1 \Rightarrow b = -3$$

$$\hookrightarrow \frac{-1}{3c} = -1 \Rightarrow 3c = 1 \Rightarrow c = 1/3$$

54) Dada una matriz diagonal A invertible, demostrar que A^{-1} es una matriz diagonal

Una matriz diagonal es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Como además es invertible sabemos que tiene que tener $rg(A) = n$, y por tanto, todos los elementos a_{ii} serán $a_{ii} \neq 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Ahora, apliquemos la definición de matriz inversa:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

De ahí vamos a obtener "n" ecuaciones en las que

$$a_{ii} \cdot b_{ii} = 1 \Rightarrow b_{ii} = \frac{1}{a_{ii}} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Con lo que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$$

que efectivamente es una matriz diagonal como queríamos demostrar.

55) Demostrar que si A es una matriz simétrica invertible entonces A^{-1} también es simétrica.

Sabemos que A es simétrica $\Rightarrow A^t = A$

Sabemos también que A es invertible y por tanto existe la matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I$. Ese será nuestro punto de partida. Así:

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$A \cdot A^{-1} = I \Longrightarrow (A \cdot A^{-1})^t = I^t \Longrightarrow (A^{-1})^t \cdot A^t = I$

↑ transponemos ambos lados

↑ Propiedades transposición: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$; I es simétrica $\Rightarrow I^t = I$

$\Longrightarrow (A^{-1})^t \cdot A = I \Longrightarrow (A^{-1})^t \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = I \cdot A^{-1} \Rightarrow$

↑ A es simétrica: $A^t = A$

↑ A es invertible y existe A^{-1}

$\Rightarrow (A^{-1})^t = A^{-1}$ → Como ves, al ser igual que su transpuesta, la matriz inversa de A, A^{-1}, es una matriz simétrica como queríamos demostrar.

56) Una matriz cuadrada A es INVOLUTIVA si se verifica que $A^2 = I$

a) Demuestra que si A es involutiva, entonces $A^{-1} = A$

b) Comprueba que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ es involutiva

a) Si $A^2 = I \Rightarrow A \cdot A = I$

Por otro lado, por definición A^{-1} es la <u>única</u> que verifica que $A \cdot A^{-1} = I$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot A = I \\ A \cdot A^{-1} = I \end{array}\right\} \quad A^{-1} = A$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

b) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Como $A^2 = I$, efectivamente A es involutiva

57) Una matriz cuadrada A es IDEMPOTENTE si se verifica que $A^2 = A$.

Comprueba que $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ es idempotente. ¿Es invertible?

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Efectivamente, resulta que $A^2 = A \Rightarrow$ A es idempotente

Estudiemos su rango

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-5F_1+2F_3]{-3F_2+2F_2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 1$$

Como $rg(A) = 1 < 3 \Rightarrow$ A no es invertible ($\nexists A^{-1}$)

58) Una matriz cuadrada A es ORTOGONAL si se verifica que $A \cdot A^t = I$

a) Comprobar que si A es ortogonal, entonces $A^{-1} = A^t$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

b) Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.

a) La demostración es inmediata

$$\left.\begin{array}{l} \text{A ortogonal} \Rightarrow A\cdot A^t = I \\ \text{Definición inversa} \Rightarrow A\cdot A^{-1} = I \end{array}\right\} \Rightarrow A^t = A^{-1}$$

b) A será ortogonal si $A\cdot A^t = I$. Veámoslo:

$$A^t = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^t = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow \text{Como } A\cdot A^t = I \Rightarrow$$

$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow$ A es ortogonal

59) Dadas A y B dos matrices de orden "n" y ortogonales. Demuestra que la matriz producto A·B es también una matriz ortogonal.

A es una matriz ortogonal $\Rightarrow A^{-1} = A^t$

B es una matriz ortogonal $\Rightarrow B^{-1} = B^t$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$AB\cdot(AB)^{-1}=I \Rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}B(AB)^{-1}=A^{-1}\cdot I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\cdot(AB)^{-1}=A^{-1} \Rightarrow \underbrace{B^{-1}\cdot B}_{I}\cdot(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1} \xrightarrow[\text{A y B son ortogonales}]{} (AB)^{-1}=B^{t}\cdot A^{t} \xrightarrow[\text{transposición}]{\text{Propiedades}}$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1}=(AB)^{t} \Rightarrow (AB) \text{ es ortogonal}$$

60) Despeja la matriz X en las siguientes ecuaciones matriciales (suponer que existen todas las matrices inversas que necesites para despejar)

a) $AX=B$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

b) $XA=B$

$$X\underbrace{AA^{-1}}_{I}=B\cdot A^{-1} \Rightarrow X=B\cdot A^{-1}$$

c) $XB+A=C^{t}$

$$XB=C^{t}-A$$

$$X\underbrace{BB^{-1}}_{I}=(C^{t}-A)\cdot B^{-1} \Rightarrow X=(C^{t}-A)\cdot B^{-1}$$

www.bertoblog.com

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

d) $BX + 2X = A$

$$(B+2I)\cdot X = A$$

$$\underbrace{(B+2I)^{-1}\cdot(B+2I)}_{I}\cdot X = (B+2I)^{-1}\cdot A \Rightarrow X = (B+2I)^{-1}\cdot A$$

e) $A^{-1}\cdot X = A$

$$\underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I}X = A\cdot A \Rightarrow X = A^2$$

f) $AXA^{-1} = B+C$

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}X\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I} = A^{-1}(B+C)A \Rightarrow X = A^{-1}(B+C)A$$

g) $(A+B)X = C$

$$\underbrace{(A+B)^{-1}\cdot(A+B)}_{I}X = (A+B)^{-1}C \Rightarrow X = (A+B)^{-1}\cdot C$$

h) $AX + BX = CX + A^t$

$$AX + BX - CX = A^t$$

$$(A+B-C)X = A^t$$

$$\underbrace{(A+B-C)^{-1}\cdot(A+B-C)}_{I}\cdot X = (A+B-C)^{-1}\cdot A^t$$

$$\Rightarrow X = (A+B-C)^{-1}\cdot A^t$$

WWW.BERTOBLOG.COM

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

61) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Calcula la matriz X que verifica $AX=C^t+B$

$$AX=C^t+B$$

$$\underbrace{A^{-1}AX}_{I}=A^{-1}(C^t+B)\Rightarrow X=A^{-1}\cdot(C^t+B)$$

$$A\cdot A^{-1}=I$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a-2c & b-2d\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r}a-2c=1\\ c=0\end{array}\right\}\ c=0\wedge a=1 \qquad \left.\begin{array}{r}b-2d=0\\ d=1\end{array}\right\}\ d=1\wedge b=2$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$C^t+B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot(C^t+B)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

62) Calcula la matriz X que verifica $AX-B=2X$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\ \text{y}\ B=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$AX-B=2X \Rightarrow AX-2X=B \Rightarrow (A-2I)X=B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A-2I)^{-1}(A-2I)}_{I}\cdot X=(A-2I)^{-1}\cdot B \Rightarrow X=(A-2I)^{-1}\cdot B$$

$$A-2I=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$(A-2I)\cdot(A-2I)^{-1}=I$$

$$\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-4a+c & -4b+d\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}-4a+c=1\\ a=0\end{matrix}\right\} a=0 \wedge c=1 \qquad \left.\begin{matrix}-4b+d=0\\ b=1\end{matrix}\right\} b=1 \wedge d=4$$

$$\Rightarrow (A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=(A-2I)^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ -15 & 7\end{pmatrix}$$

63) Resuelve la ecuación matricial $XA=XB-A^t$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$XA=XB-A^t \Rightarrow XA-XB=-A^t \Rightarrow X(A-B)=-A^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(B-A)=A^t \Rightarrow X\underbrace{(B-A)(B-A)^{-1}}_{I}=A^t(B-A)^{-1} \Rightarrow$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\Rightarrow X = A^t (B-A)^{-1}$$

$$B-A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa por Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Permutaciones}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+F_3]{-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow (B-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^t (B-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

64) Encuentra la matriz X que verifica la ecuación

$AXA = 2BA$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I} X \underbrace{A\,A^{-1}}_{I} = A^{-1} \cdot 2B \underbrace{A\,A^{-1}}_{I} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot 2B$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+5c & 3b+5d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3a+5c=1 \\ a+2c=0 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 3a+5c=1 \\ \times(-3) \rightarrow -3a-6c=0 \end{array}\right\} E_1+E_2 \rightarrow -c=1 \Rightarrow c=-1$$

$$\searrow \dashrightarrow a = -2c = -2\cdot(-1) = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} 3b+5d=0 \\ b+2d=1 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 3b+5d=0 \\ \times(-3) \rightarrow -3b-6d=-3 \end{array}\right\} E_1+E_2 \rightarrow -d=-3 \Rightarrow d=3$$

$$\searrow \dashrightarrow b = 1-2d = 1-6 = -5$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot 2B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -28 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}$$

65) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra la inversa A^{-1}

b) Utiliza A^{-1} para resolver la ecuación:

$$AX + CB^t = B \cdot B^t$$

www.JuanBerto.com

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 3a+2c & 3b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 2a+c=1 \\ 3a+2c=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\times(-2)} \left.\begin{matrix} -4a-2c=-2 \\ 3a+2c=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{E_1+E_2} -a=-2 \Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow c = -\frac{3a}{2} = -\frac{3\cdot 2}{2} = -3$$

$$\left.\begin{matrix} 2b+d=0 \\ 3b+2d=1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\times(-2)} \left.\begin{matrix} -4b-2d=0 \\ 3b+2d=1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{E_1+E_2} -b=1 \Rightarrow b=-1$$

$$\Rightarrow d = -2b = -2\cdot(-1) = 2$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $AX + C\cdot B^t = B\cdot B^t$

$$AX = B\cdot B^t - C\cdot B^t = (B-C)B^t$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I} X = A^{-1}(B-C)\cdot B^t \Rightarrow X = A^{-1}(B-C)B^t$$

$$B-C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B-C)B^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}\cdot(B-C)\cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

www.BertoBlog.com

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

66) Resuelve la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X + B = C$$

$$AX = C-B \Rightarrow \underbrace{A^{-1} A}_{I} X = A^{-1}(C-B) \Rightarrow X = A^{-1}(C-B)$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3a+c & -3b+d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -3a+c = 1 \\ -a = 0 \end{array}\right\} a=0 \wedge c=1 \qquad \left.\begin{array}{l} -3b+d = 0 \\ -b = 1 \end{array}\right\} b=-1 \wedge d=-3$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C-B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}(C-B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 & -3 \\ -1 & 20 & -12 & -11 \end{pmatrix}$$

67) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones matriciales:

a)
$$\left.\begin{array}{l} 2A+3B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 21 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ A-2B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 \\ -7 & -1 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2A+3B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 21 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ \times(-2) \quad -2A+4B = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 14 \\ 14 & 2 & -12 \end{pmatrix} \end{array}\Bigg\}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$E_1+E_2 \rightarrow 7B = \begin{pmatrix} -14 & 7 & 35 \\ 21 & 7 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} -14 & 7 & 35 \\ 21 & 7 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 \\ -7 & -1 & 6 \end{pmatrix} + 2B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 \\ -7 & -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\left.\begin{array}{l} 4X+3Y = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -6 \\ 10 & -1 & 23 \end{pmatrix} \\ 3X-2Y = \begin{pmatrix} -18 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \times(2) \\ \times(3) \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} 8X+6Y = \begin{pmatrix} -14 & 8 & -12 \\ 20 & -2 & 46 \end{pmatrix} \\ 9X-6Y = \begin{pmatrix} -54 & 9 & 12 \\ -3 & -15 & -12 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

$E_1+E_2 \rightarrow 17X = \begin{pmatrix} -68 & 17 & 0 \\ 17 & -17 & 34 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} -68 & 17 & 0 \\ 17 & -17 & 34 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$Y = \frac{1}{3}\cdot\left[\begin{pmatrix} -7 & 4 & -6 \\ 10 & -1 & 23 \end{pmatrix} - 4X\right] = \frac{1}{3}\cdot\left[\begin{pmatrix} -7 & 4 & -6 \\ 10 & -1 & 23 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -16 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}\right]$

$Y = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

www.matebrategui.es

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

c) $2A+3B=\begin{pmatrix}11 & 0 & 10\\ -8 & 7 & -1\end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix}-2 & -5 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $\times 3$ $\quad 3A-3B=\begin{pmatrix}-6 & -15 & 15\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$

$E_1+E_2 \rightarrow 5A=\begin{pmatrix}5 & -15 & 25\\ -5 & 10 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow A=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}5 & -15 & 25\\ -5 & 10 & 5\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

$B=A-\begin{pmatrix}-2 & -5 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & -5 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

68) Encuentra las matrices A y B que cumplen con el sistema de ecuaciones dado por:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix} \\ A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

Fíjate en lo siguiente:

$$\underbrace{(A+B)}_{\text{Esta matriz la conocemos}}(A-B)=\underbrace{A^2-AB+BA-B^2}_{\text{Esta matriz la conocemos}}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Y entonces tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot (A-B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{I} \cdot (A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa por Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_3+F_1]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+F_3]{F_2+F_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_2]{\frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right)$$

Con lo que se tiene que:

$$A-B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

Escribimos un nuevo sistema mucho más sencillo:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ A-B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} E_1+E_2 \quad 2A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}-A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

69) Sean A, B, y C las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Encuentra las matrices X e Y que cumplen:

$$\left.\begin{array}{l} AX+BY=C \\ AX=Y \end{array}\right\} \longrightarrow Y+BY=C$$

$$(I+B)Y=C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(I+B)^{-1}\cdot(I+B)}_{I}\,Y=(I+B)^{-1}\cdot C \Rightarrow Y=(I+B)^{-1}\cdot C$$

$$I+B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

www.bertoblog.com

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$(I+B)\cdot(I+B)^{-1}=I$

$$\begin{pmatrix}2 & -4\\ -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2a-4c & 2b-4d\\ -2a & -2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}2a-4c=1\\ -2a=0\end{matrix}\right\}a=0\wedge c=-\frac{1}{4}\qquad\left.\begin{matrix}2b-4d=0\\ -2b=1\end{matrix}\right\}b=-\frac{1}{2}\wedge d=-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow(I+B)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ -1/4 & -1/4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y=(I+B)^{-1}\cdot C=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ -1/4 & -1/4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 7\\ -2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5/2\\ -1 & -1/2\end{pmatrix}$$

Y sabiendo Y:

$$AX=Y\Rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot AX}_{I}=A^{-1}\cdot Y\Rightarrow X=A^{-1}\cdot Y$$

$A\cdot A^{-1}=I$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ -a & -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}a+2c=1\\ -a=0\end{matrix}\right\}a=0\wedge c=1/2\qquad\left.\begin{matrix}b+2d=0\\ -b=1\end{matrix}\right\}b=-1\wedge d=1/2$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}\cdot Y=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 5/2\\ -1 & -1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

70) Encuentra una matriz X de orden 2 que cumpla $A+X=AX+XA$, siendo $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

En esta ecuación, no se puede despejar X. Lo que haremos será efectuar las operaciones indicadas y despejar los elementos de la matriz $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ que estamos buscando. Así:

$$A+X=AX+XA$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b+1\\1+c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b&a\\d&c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b+1\\1+c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c+b&d+a\\a+d&b+c\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{l}a=c+b\\b+1=d+a\\c+1=d+a\\d=b+c\end{array}\Big\}\begin{array}{l}\leftarrow\\\\\\\leftarrow\end{array}\Big\}\ b=c\ \Big|\ a=d$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=2c\\2a=c+1\end{array}\right\}\ \times(-2)\ \left.\begin{array}{l}-2a=-4c\\2a=c+1\end{array}\right\}\ E_1+E_2\ \ 0=-3c+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=\frac{1}{3}\Rightarrow a=2c=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}2/3&1/3\\1/3&2/3\end{pmatrix}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

71) Resuelve la ecuación matricial $XA + AX = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

En esta ecuación, no se puede despejar X. Procederemos igual que en el ejercicio anterior. Así:

$$XA + AX = B$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -a+2b \\ c & -c+2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a-c & -a+3b-d \\ 3c & -c+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a - c = 0 \\ -a + 3b - d = -2 \\ 3c = 1 \\ -c + 4d = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow a = \frac{c}{2} \xrightarrow[c=1/3]{} a = 1/6 \\ \rightarrow 3b = -2 + a + d \Rightarrow b = \frac{-2+a+d}{3} = -\frac{1}{2} \\ \rightarrow c = 1/3 \\ \rightarrow d = \frac{1+c}{4} \xrightarrow[c=1/3]{} d = \frac{1+1/3}{4} = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Juan Bertomeu

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com