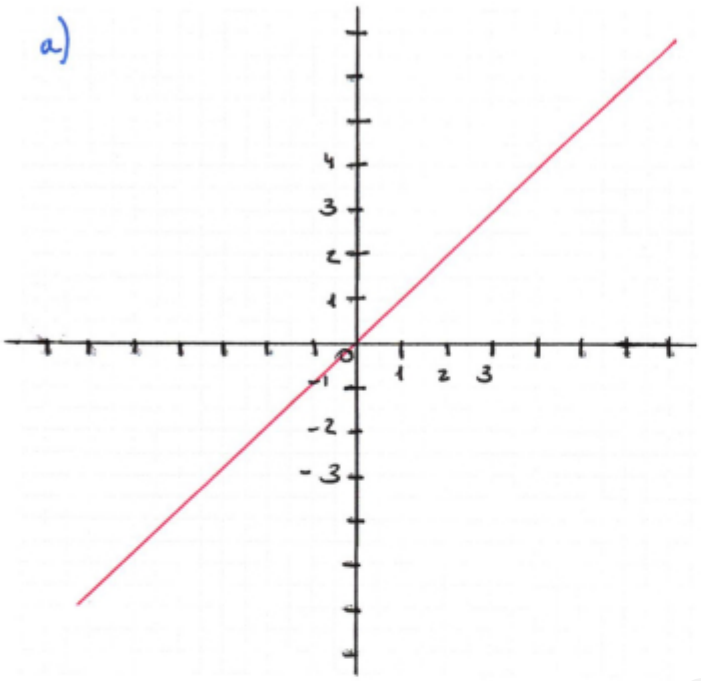
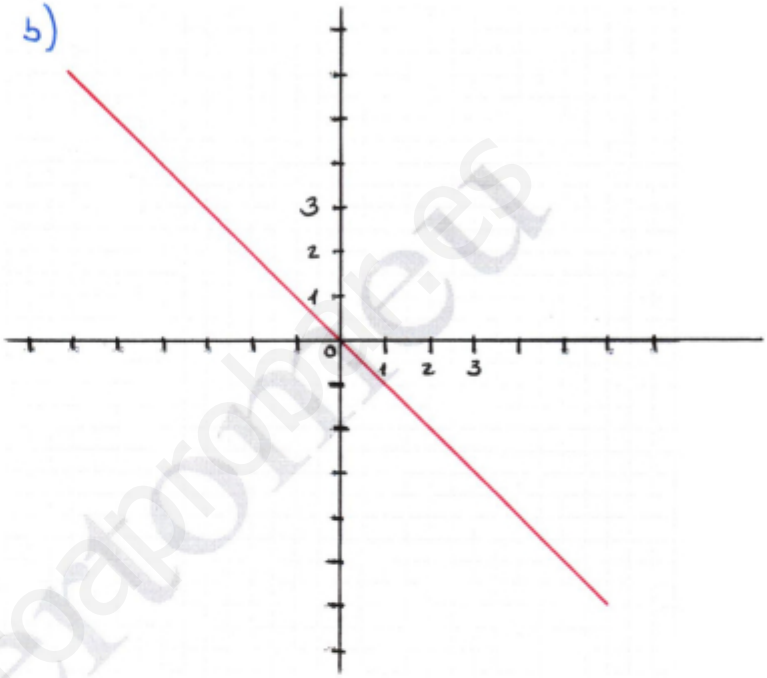
(1) A continuación tienes las gráficas de algunas funciones. Evalúa $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ en cada una de ellas:

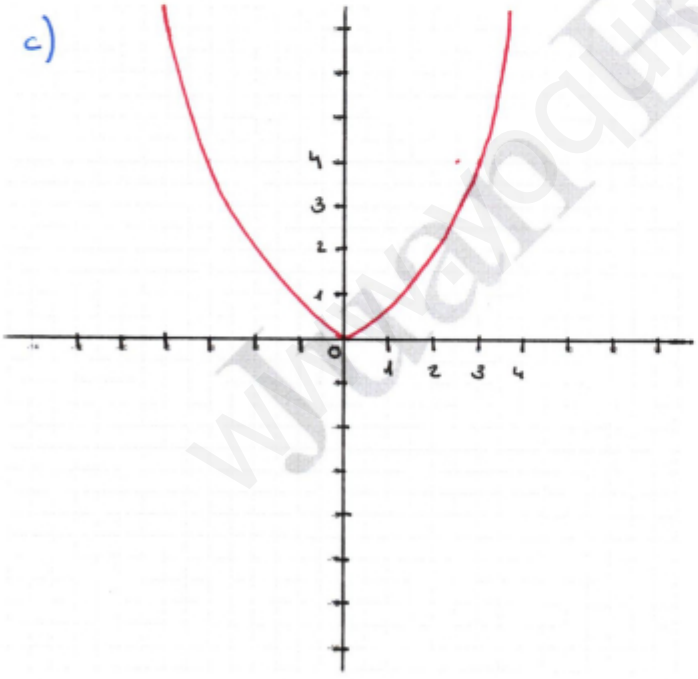
a)



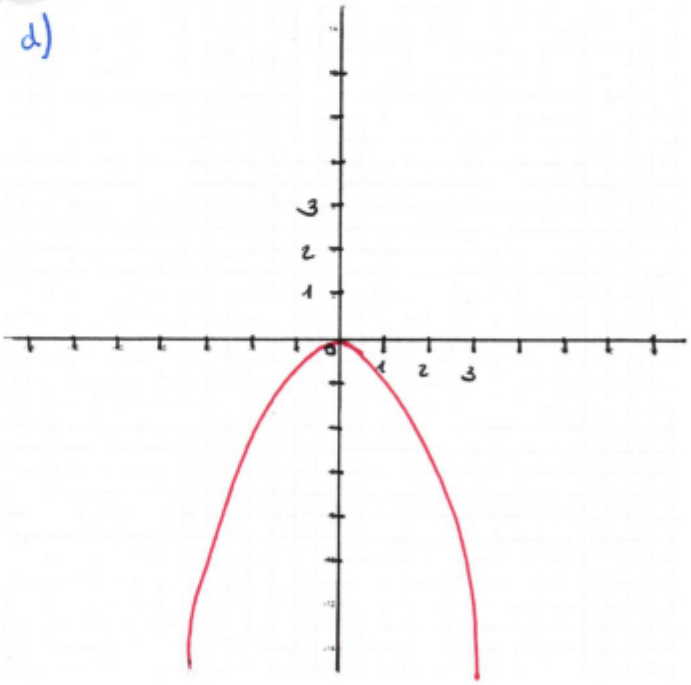
b)



c)



d)

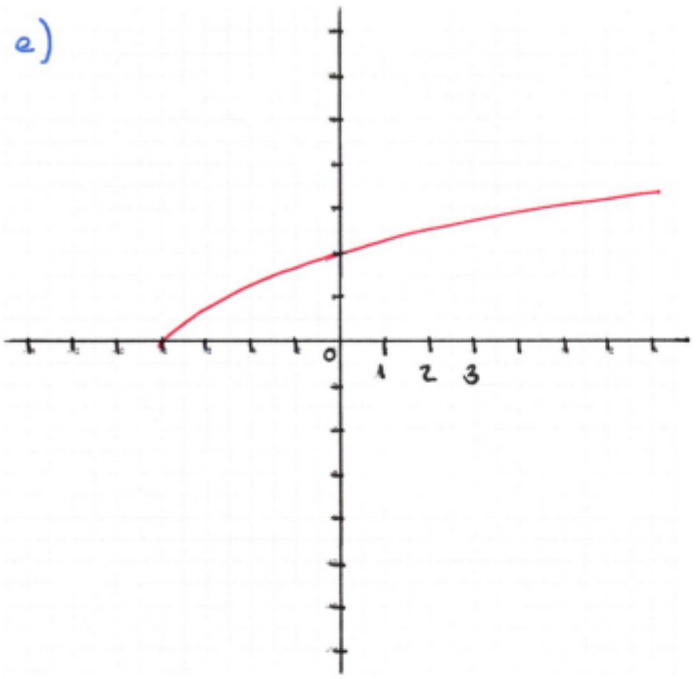


www.aprobarmates.es

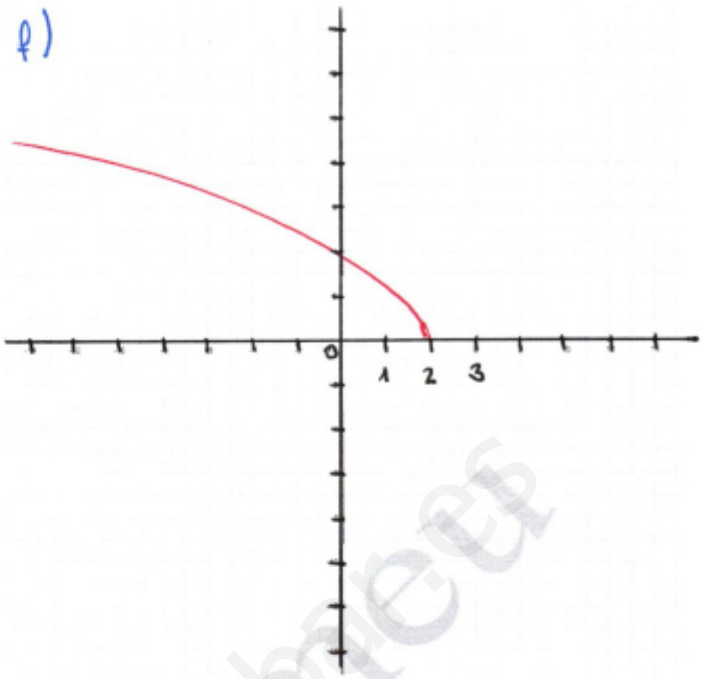


©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

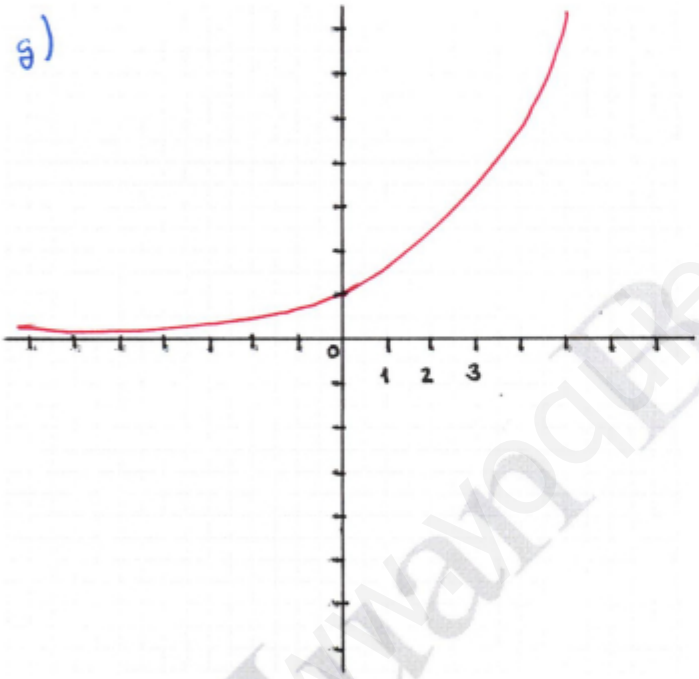
e)



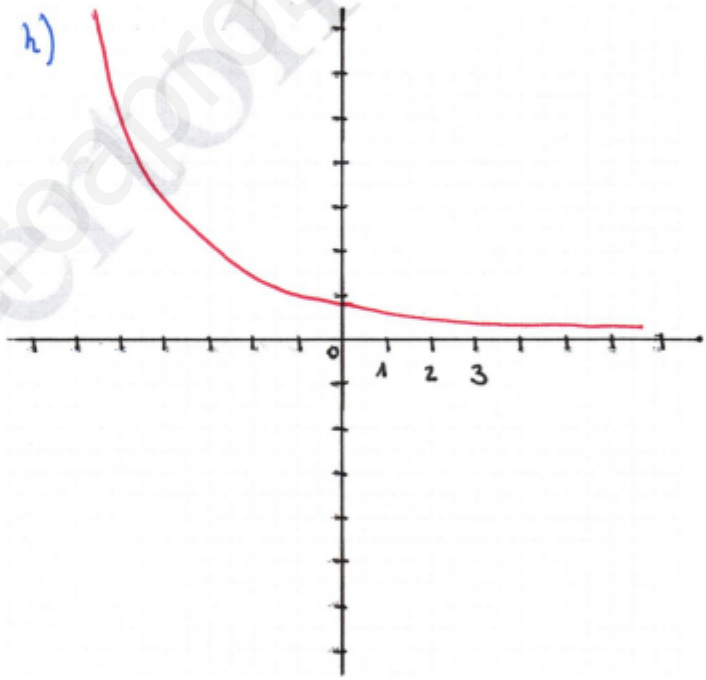

f)



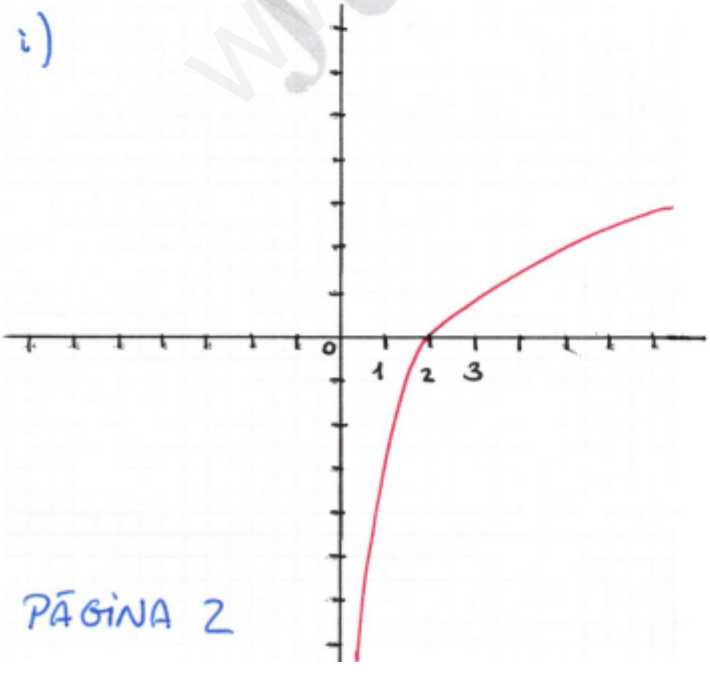

g)



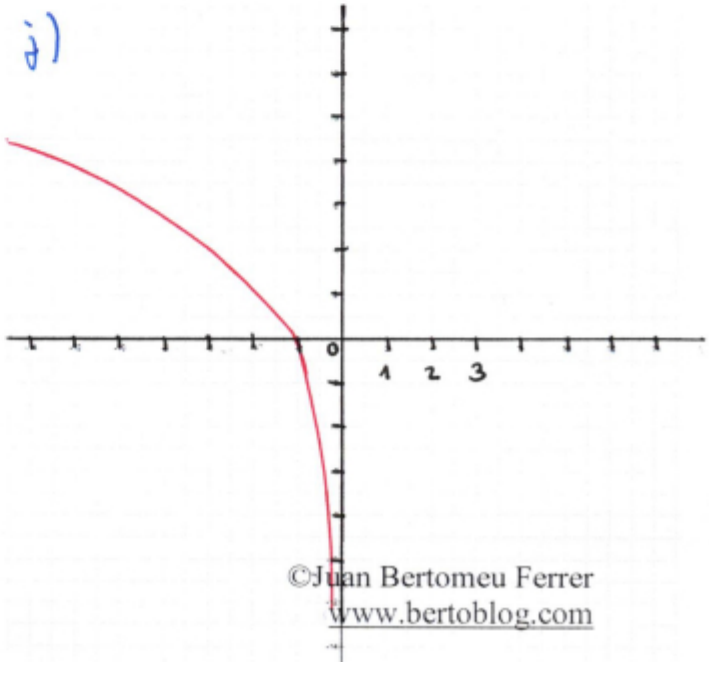

h)




i)

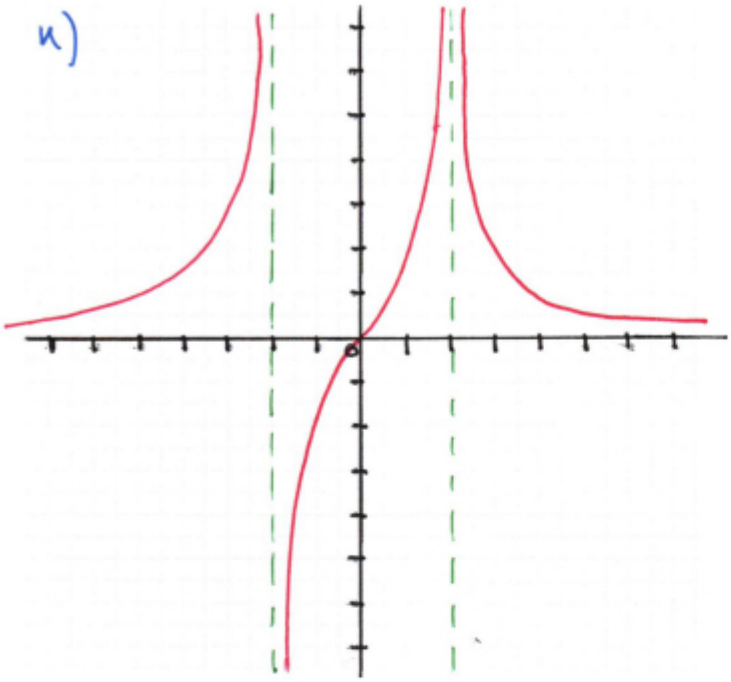



j)

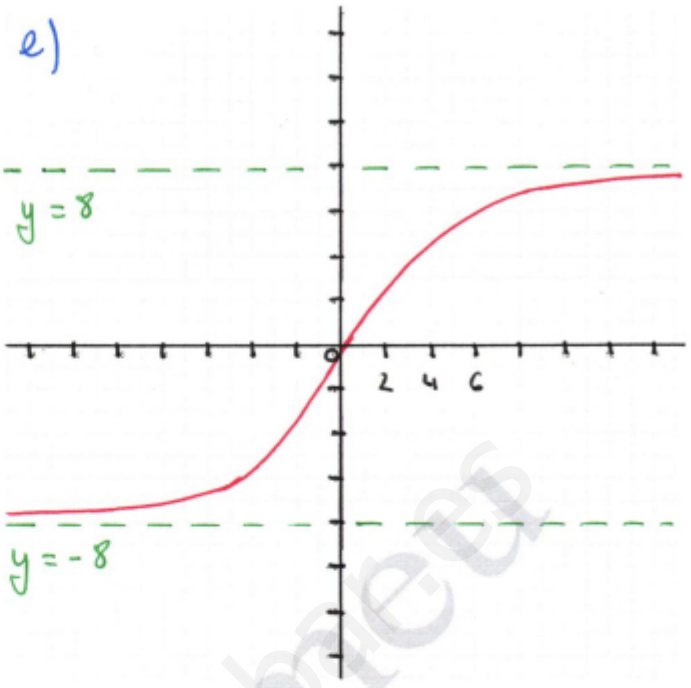



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

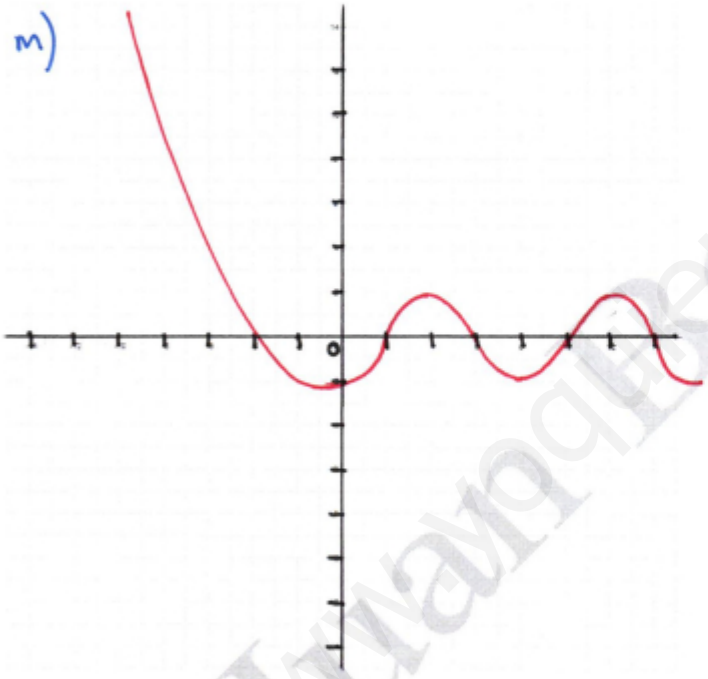
k)



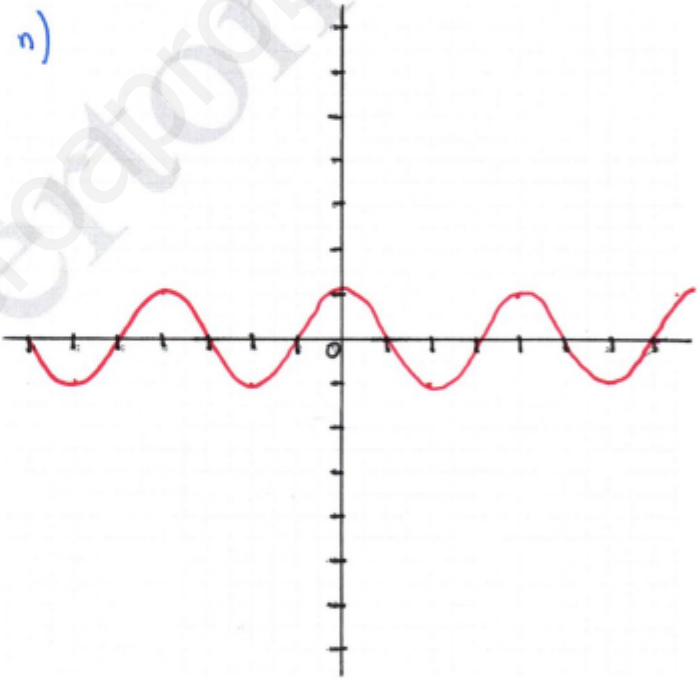
l)



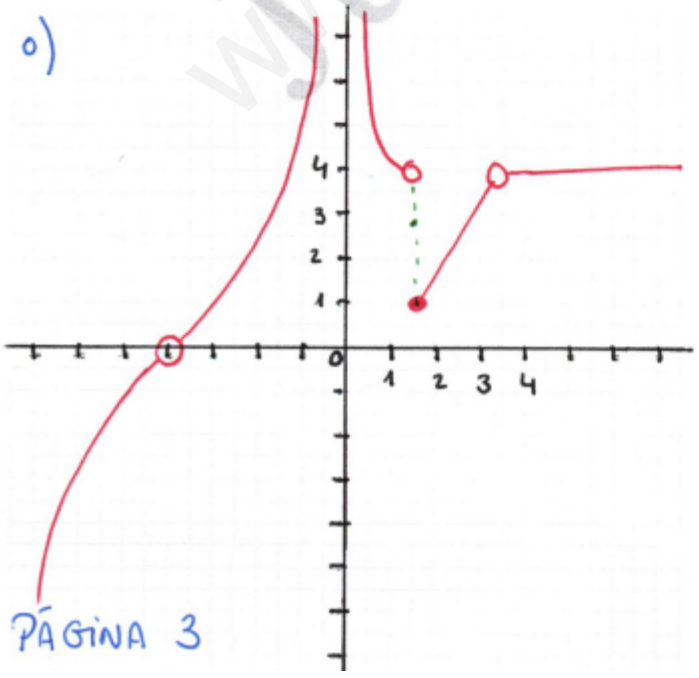

m)



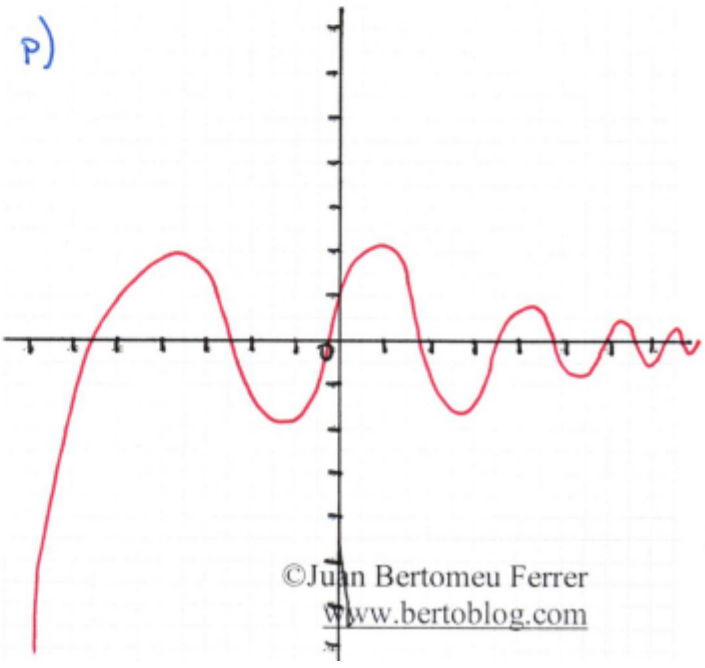
n)



o)




p)



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ ; $\nexists \lim_{x\to-\infty} f(x)$

f) $\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

g) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

h) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ ; $\nexists \lim_{x\to-\infty} f(x)$

j) $\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

k) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

e) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 8$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -8$

www.yoquieroaprobar.es



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

m) $\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

n) $\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)$ ; $\nexists \lim_{x\to-\infty} f(x)$

o) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

p) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

(2) Sabiendo que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$, calcula:

a) $\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x) = [1 - \infty] = -\infty$

b) $\lim_{x\to\infty} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\infty} g(x) = [1\cdot(-\infty)] = -\infty$

c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{g(x)} = \left[\sqrt[3]{-\infty}\right] = -\infty$

d) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{1} = 1$

e) $\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = [1 - (-\infty)] = +\infty$

f) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{g(x)} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to\infty} \sqrt{g(x)}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

③ Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -5$, calcula:

a) $\lim_{x\to-\infty} (f(x)+g(x)) = [\infty - 5] = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} (f(x)-g(x)) = [\infty - (-5)] = +\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{g(x)} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to-\infty} \sqrt{g(x)}$

d) $\lim_{x\to-\infty} [f(x)]^{g(x)} = [\infty^{-5}] = \left[\frac{1}{\infty^5}\right] = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

④ Si $\lim_{x\to\infty} u(x) = 2$ y $\lim_{x\to\infty} v(x) = -3$, calcula:

a) $\lim_{x\to\infty} (u(x)+v(x)) = 2+(-3) = -1$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{v(x)}{u(x)} = -\frac{3}{2}$

c) $\lim_{x\to\infty} 5^{u(x)} = 5^2 = 25$

d) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{v(x)} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to\infty} \sqrt{v(x)}$

e) $\lim_{x\to\infty} u(x)\cdot v(x) = 2\cdot(-3) = -6$

f) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{2}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

⑤ Sabiendo que $\lim_{x\to 2} f(x) = e^2$ y $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$, calcula:

a) $\lim_{x\to 2} (f(x)+g(x)) = e^2 - 3$

b) $\lim_{x\to 2} (f(x)-g(x)) = e^2 - (-3) = e^2 + 3$

c) $\lim_{x\to 2} (f(x)\cdot g(x)) = -3\cdot e^2$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{e^2}{3}$

e) $\lim_{x\to 2} (f(x))^{g(x)} = (e^2)^{-3} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$

f) $\lim_{x\to 2} \ln(f(x)) = \ln(e^2) = 2$

⑥ Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} x^7 = [\infty^7] = \infty$ ; b) $\lim_{x\to-\infty} x^7 = [(-\infty)^7] = -\infty$

c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[7]{x} = [\sqrt[7]{\infty}] = \infty$ ; d) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[7]{x} = [\sqrt[7]{-\infty}] = -\infty$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^7} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$ ; f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^7} = \left[\frac{1}{-\infty}\right] = 0$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(7) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} 7^x = [7^{\infty}] = \infty$ ; b) $\lim_{x\to-\infty} 7^x = [7^{-\infty}] = \left[\frac{1}{7^{\infty}}\right] = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

c) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{7})^x = [(\sqrt{7})^{\infty}] = \infty$ ; d) $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{7})^x = [(\sqrt{7})^{-\infty}] = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

e) $\lim_{x\to\infty} 7^{1/x} = [7^{1/\infty}] = 7^0 = 1$ ; f) $\lim_{x\to-\infty} 7^{1/x} = 7^0 = 1$

(8) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} 2^x = [2^{\infty}] = \infty$ b) $\lim_{x\to-\infty} 2^x = [2^{-\infty}] = \left[\frac{1}{2^{\infty}}\right] = 0$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}\right] = 0$ d) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}\right] = +\infty$

e) $\lim_{x\to\infty} -3^x = [-(3^{\infty})] = -\infty$ f) $\lim_{x\to-\infty} -3^x = [-(3^{-\infty})] = 0$

g) $\lim_{x\to\infty} 4^{-x} = [4^{-\infty}] = 0$ h) $\lim_{x\to-\infty} 4^{-x} = [4^{-(-\infty)}] = [4^{\infty}] = \infty$

i) $\lim_{x\to\infty} \log_2(x) = [\log_2(\infty)] = \infty$ j) $\lim_{x\to-\infty} \log_2(x) \Rightarrow \nexists$

k) $\lim_{x\to\infty} (-2)^x \Rightarrow \nexists$

www.bertoblog.com



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(9) Ordena de mayor a menor los órdenes de magnitud de los siguientes infinitos:

$$\log_2(x)\ ;\ \log_5(x)\ ;\ x^2\ ;\ \sqrt{x}\ ;\ 3x^5\ ;\ 4^x\ ;\ 3^x$$

El orden de magnitud de estos infinitos es:

$$4^x > 3^x > 3x^5 > x^2 > \sqrt{x} > \log_2(x) > \log_5(x)$$

(10) Utilizando el orden de magnitud de los infinitos del ejercicio anterior, calcula SIN EFECTUAR NINGUNA OPERACIÓN los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2(x)}{\sqrt{x}}$ b) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5}{x^2}$ c) $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{4^x}$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_5(x)}{\log_2(x)}$ e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{3^x}$ f) $\lim_{x\to\infty} \frac{4^x}{\sqrt{x}}$

g) $\lim_{x\to\infty} (x^2 - \sqrt{x})$ h) $\lim_{x\to\infty} (\log_5(x) - 3^x)$ i) $\lim_{x\to\infty} (4^x - 3^x)$

j) $\lim_{x\to\infty} (3x^5 - \log_2(x))$ k) $\lim_{x\to\infty} (\log_5(x) - \log_2(x))$

l) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x} - 3x^5)$ m) $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{x^2 - \sqrt{x}}$ n) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x} - 3x^5}{\log_2(x)}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2(x)}{\sqrt{x}} = 0$ b) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5}{x^2} = +\infty$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{4^x} = 0$ d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{\log_2(x)} = +\infty$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{3^x} = 0$ f) $\lim_{x\to\infty} \frac{4^x}{\sqrt{x}} = +\infty$

g) $\lim_{x\to\infty} (x^2 - \sqrt{x}) = +\infty$ h) $\lim_{x\to\infty} (\log_5(x) - 3^x) = -\infty$

i) $\lim_{x\to\infty} (4^x - 3^x) = +\infty$ j) $\lim_{x\to\infty} (3x^5 - \log_2(x)) = +\infty$

k) $\lim_{x\to\infty} (\log_5(x) - \log_2(x)) = -\infty$ l) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x} - 3x^5) = -\infty$

m) $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{x^2 - \sqrt{x}} = +\infty$ n) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x} - 3x^5}{\log_2(x)} = -\infty$

(11) Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$ b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+8}{x^2}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2-x}$ e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-x^3}{x+8}$ f) $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x-x^4}{2^x+e^x}$

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ h) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2^x}{e^x}$ i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{x^3+\sqrt{x}}$

j) $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+3^x}{4^x}$ k) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sqrt{x}}{3x^2+\ln x}$ l) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x^2}{\sqrt{x}-3x^3}$

m) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2-1}+x}$ n) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+8}}{\sqrt[3]{-8x^2+5x}}$ o) $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+3^x}{3^x+x}$

p) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{2x^2+3}}$ q) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+8}+\log_2|x|}$ r) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+4^x}{x+4^{x+1}}$

s) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x+\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x^2-5}}$ t) $\lim_{x\to\infty} \left(x^2-\sqrt[3]{2x+1}\right)$ u) $\lim_{x\to\infty} \left(x^2-2^x\right)$

v) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right)$ w) $\lim_{x\to\infty} \left(3^x-2^x\right)$ x) $\lim_{x\to\infty} \left(5^x-\sqrt[3]{x^8-2}\right)$

y) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x}-\log_5 x^4\right)$ z) $\lim_{x\to\infty} \left(3^x-x^6\right)$

www.yoquieroaprobar.es



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = +\infty$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+8}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2-x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-x^3}{x+8} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x\to\infty} -x^2 = -\infty$

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x-x^4}{2^x+e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{e^x} = +\infty$

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$

h) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2^x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{e^x} = 0$

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{x^3+\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

j) $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+3^x}{4^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{4^x} = 0$

k) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sqrt{x}}{3x^2+\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$

www.matematicasonline.es



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

l) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3+5x^2}{\sqrt{x}-3x^3} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{-3x^3} = -\dfrac{1}{3}$

m) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2-1}+x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

n) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+8}}{\sqrt[3]{-8x^2+5x}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{-8}\cdot\sqrt[3]{x^2}} = -\dfrac{1}{2}$

o) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2^x+3^x}{3^x+x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3^x}{3^x} = 1$

p) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{2x^2+3}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

q) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+8}+\log_2(x)} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

r) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x+4^x}{x+4^{x+1}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{4^x}{4^x\cdot 4} = \dfrac{1}{4}$

s) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)+\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x^2-5}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

t) $\lim_{x\to\infty} \left(x^3 - \sqrt[3]{2x+1}\right) = +\infty$

www.yoquieroaprobar.es



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

u) $\lim_{x\to\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

v) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}\right) = +\infty$

w) $\lim_{x\to\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

x) $\lim_{x\to\infty} \left(5^x - \sqrt[3]{x^8-2}\right) = +\infty$

y) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x} - \log_5 x^4\right) = +\infty$

z) $\lim_{x\to\infty} (3^x - x^6) = +\infty$

(12) Completa $\lim_{x\to\infty} \frac{\square}{2x^3-x+12}$ escribiendo en el numerador una función de modo que el resultado sea:

a) $+\infty$ ; b) $-\infty$ ; c) 4 ; d) 0

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+8}{2x^3-x+12} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{2x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \infty$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{-x^4}{2x^3-x+12} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^4}{2x^3} = \lim_{x\to\infty} -\frac{x}{2} = -\infty$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3+\sqrt{x}}{2x^3-x+12} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^3}{2x^3} = \frac{8}{2} = 4$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{2x^3-x+12} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$

* Ejercicio de respuesta abierta.



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(13) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}$ b) $\lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2-2x+7\right)$ c) $\lim_{x\to\infty} x^3$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x$ e) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$ f) $\lim_{x\to\infty} \frac{8x}{2x^2+3x-1}$

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^{10}}{(x+2)^{10}}$ h) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^5-x^2}{2x^6+1} - \frac{3x^2-1}{x^2+1}\right)$

i) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2-1}{x^3} \cdot \frac{4x^4}{2x^4+3}\right)$ j) $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2+7}{2x}\right)$

k) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2+x+2}}$ l) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right)$

m) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3(1-x)}{2x^4-x-1} + \frac{4}{x^2}\right)$ n) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^4+1}{2x^4+1} + \frac{-x^3}{3x^3+x+1}\right)$

o) $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2x^3+1}{2x^3+x}\right)$ p) $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2}{x}\right) \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}$

q) $\lim_{x\to\infty} 9^{\frac{2x^2+1}{x^2-3}}$ r) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{x+1}{x^2}}$ s) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{x+1}{x^2}}$

t) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{-x-5} - \frac{2x^2}{x+2}\right)$ u) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{3x-2}$

www.yoquieroaprobar.es



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

v) $\lim_{x\to\infty} \frac{-x-3}{(0'3)^x}$ w) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}}$ x) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x+5}\right)^x$

y) $\lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{3x^2-6}{3x^2}\right)$ z) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-x}{x-2}\right)^x$

a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = +\infty$

b) $\lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2-2x+7\right) = -\infty$

c) $\lim_{x\to\infty} x^3 = +\infty$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = +\infty$

e) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{8x}{2x^2+3x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{8x}{2x^2} = 0$

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^{10}}{(x+2)^{10}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{10} = 1^{10} = 1$

h) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^5-x^2}{2x^6+1} - \frac{3x^2-1}{x^2+1}\right) = 0-3 = -3$

www.JuanBertomeuFerrer.es



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

i) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-1}{x^3}\cdot\frac{4x^4}{2x^4+3}\right)=0\cdot 2=0$

j) $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2+7}{2x}\right)=\ln(\infty)=\infty$

k) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2+x+2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3x^2}{x^2}}=\sqrt{3}$

e) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}\right)=1-1=0$

m) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3(1-x)}{2x^4-x-1}+\frac{4}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^4}{2x^4-x-1}+\frac{4}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}+0=\frac{-1}{2}$

n) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+1}{2x^4+1}+\frac{-x^3}{3x^3+x+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

o) $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x^3+1}{2x^3+x}\right)=\ln 1=0$

p) $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=$

$=(-\infty)\cdot 1=-\infty$

q) $\lim_{x\to\infty}9^{\frac{2x^2+1}{x^2-3}}=9^2=81$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

r) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{x+1}{x^2}} = \left(\frac{1}{10}\right)^{0} = 1$

s) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{x+1}{x^2}} = 2^{0} = 1$

t) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{-x-5} - \frac{2x^2}{x+2}\right) = -1-\infty = -\infty$

u) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^{x}\cdot\frac{1}{3x-2} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to\infty}\frac{(5/2)^x}{3x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = +\infty$

v) $\lim_{x\to\infty}\frac{-x-3}{(0'3)^x} = \left[\frac{-\infty}{0^+}\right] = -\infty$

w) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \sqrt{1} = 1$

x) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+5}\right)^{x} = 0^{\infty} = 0$

y) $\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{3x^2-6}{3x^2}\right) = \log(1) = 0$

z) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{x-2}\right)^{x} = [(-1)^{\infty}] \Rightarrow \nexists \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{x-2}\right)^{x}$

www.matematicaspdf.es



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^4+3x-1}}{3x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{x}\sqrt[3]{x}}{3\cancel{x^2}}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt[3]{x}}{3x} = 0$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{\sqrt[3]{-3x^3+5x^2+7x-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{-3}\cdot\sqrt[3]{x^3}} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\sqrt[3]{-3}\cdot\cancel{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-3}}$

e) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - \frac{x^2}{x+1}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)(x+1)-x^2\cdot x}{x(x+1)} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}+x^2+x+1\cancel{-x^3}}{x^2+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

f) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-2x^2}{3x-2} - \frac{-3x^2}{x-4}\right) = [-\infty+\infty] =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{(1-2x^2)(x-4)+3x^2\cdot(3x-2)}{(3x-2)(x-4)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-4-2x^3+8x^2+9x^3-6x^2}{3x^2-12x-2x+8} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{7x^3+2x^2+x-4}{3x^2-14x+8} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{7x^3}{3x^2} = +\infty$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

g) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2}{4x^2-x-1}-\frac{x^3+2x+1}{x^2+1}\right)=[\infty-\infty]=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3+2)(x^2+1)-(x^3+2x+1)\cdot(4x^2-x-1)}{(4x^2-x-1)(x^2+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+2x^2+x^3+2-(4x^5+8x^3+4x^2-x^4-2x^2-x-x^3-2x-1)}{4x^4+4x^2-x^3-x-x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^5+x^4-6x^3+3x+3}{4x^4-x^3+3x^2-x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^5}{4x^4}=-\infty$$

h) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-2})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2-x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=0$$

i) $\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{x^2-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-\sqrt{x^2-1})(2x+\sqrt{x^2-1})}{(2x+\sqrt{x^2-1})}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)^2-(\sqrt{x^2-1})^2}{2x+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-x^2+1}{2x+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{2x+\sqrt{x^2-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{3x}=+\infty$$

www.bertoblog.com



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

j) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+1}-x\right) = -\infty$ ¡¡Ojo!! No hay indeterminación!!

k) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-1}-\sqrt{x^2+1}\right) = [\infty-\infty] =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x-1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+4x-1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+4x-1}+\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+4x-1}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x-2}{\sqrt{x^2+4x-1}+\sqrt{x^2+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x} = 2$$

e) $\lim_{x\to\infty}\left(4x-\sqrt{x^3+5}\right) = -\infty$ ¡¡Ojo!! No hay indeterminación!!

(15) Calcula estos límites cuando $x\to-\infty$ transformándolos previamente en límites $x\to+\infty$.

a) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$

b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{6x-3}$

c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^4-6x+2}{3x^4+x-1}$

d) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^3-5x+3}}{x^2-2x}$

e) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-5x+3}}{3x-2}$

f) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^3+5}{x+2}-\frac{4x^3-x}{x-2}\right)$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax} - x\right) = [\infty - \infty] =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+ax} - x\right)\left(\sqrt{x^2+ax} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax} + x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+ax}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+ax} + x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2+ax} + x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{ax}{2x} = \frac{a}{2}$$

$a \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

b) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2+bx-3} - 2x\right) = [\infty - \infty] =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+bx-3} - 2x\right)\left(\sqrt{4x^2+bx-3} + 2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+bx-3} + 2x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+bx-3}\right)^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2+bx-3} + 2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{bx - 3}{\sqrt{4x^2+bx-3} + 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{bx}{4x} = \frac{b}{4}$$

$b \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{b}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{b = -1}$$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-cx\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9x^2+7}-cx\right)\left(\sqrt{9x^2+7}+cx\right)}{\left(\sqrt{9x^2+7}+cx\right)}=$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9x^2+7}\right)^2-(cx)^2}{\sqrt{9x^2+7}+cx}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+7-c^2x^2}{\sqrt{9x^2+7}+cx}=$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(9-c^2)x^2+7}{\sqrt{9x^2+7}+cx}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(9-c^2)\cdot x^2}{(3+c)\cdot x}=$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(3+c)(3-c)\,x}{(3+c)}=\lim_{x\to\infty}(3-c)\cdot x$

Si $\lim_{x\to\infty}(3-c)\cdot x=0 \Rightarrow \boxed{c=3}$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{dx^2+x-5}-2x\right)=[\infty-\infty]=$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{dx^2+x-5}-2x\right)\left(\sqrt{dx^2+x-5}+2x\right)}{\sqrt{dx^2+x-5}+2x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{dx^2+x-5}\right)^2-(2x)^2}{\sqrt{dx^2+x-5}+2x}=$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{dx^2+x-5-4x^2}{\sqrt{dx^2+x-5}+2x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(d-4)\cdot x^2}{(2+\sqrt{d})\cdot x}=$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(d-4)\cdot x}{2+\sqrt{d}} \Rightarrow \boxed{\text{Si } d>4} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\dfrac{(d-4)\cdot x}{2+\sqrt{d}}=+\infty$

www.yoquieroaprobar.es



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(17) Determina los valores de "a" y "b" para que se cumpla que $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+3}-\sqrt{bx^2-x}\right)=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+3}-\sqrt{bx^2-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{ax^2+3}-\sqrt{bx^2-x}\right)\cdot\left(\sqrt{ax^2+3}+\sqrt{bx^2-x}\right)}{\left(\sqrt{ax^2+3}+\sqrt{bx^2-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{ax^2+3}\right)^2-\left(\sqrt{bx^2-x}\right)^2}{\sqrt{ax^2+3}+\sqrt{bx^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b)x^2+x+3}{\sqrt{ax^2+3}+\sqrt{bx^2-x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{\sqrt{ax^2+3}+\sqrt{bx^2-x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(a+b)x}=\frac{1}{a+b}$$

Si $a=b$

Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ ⟶ $a=b$

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{a=b=1}$$

(18) Estudia en función de los valores de los parámetros "a" y "b", los posibles valores de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-ax\right)$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x-1}-3x\right)$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-ax\right)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{4x^2-1}-ax\right)\cdot\left(\sqrt{4x^2-1}+ax\right)}{\sqrt{4x^2-1}+ax}=$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{4x^2-1}\right)^2-(ax)^2}{\sqrt{4x^2-1}+ax}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-1-a^2x^2}{\sqrt{4x^2-1}+ax}=$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(4-a^2)x^2-1}{\sqrt{4x^2-1}+ax}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(4-a^2)\cdot x^2}{(2+a)\cdot x}=$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(2+a)(2-a)\cdot x}{(2+a)}=\lim_{x\to\infty}(2-a)\cdot x$

Por lo tanto:

- Si $a<2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-ax\right)=+\infty$
- Si $a=2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-ax\right)=0$
- Si $a>2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-ax\right)=-\infty$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{bx^2+2x-1}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{bx^2+2x-1}-3x\right)\cdot\left(\sqrt{bx^2+2x-1}+3x\right)}{\left(\sqrt{bx^2+2x-1}+3x\right)}=$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{bx^2+2x-1}\right)^2-(3x)^2}{\sqrt{bx^2+2x-1}+3x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(b-9)x^2+2x-1}{\sqrt{bx^2+2x-1}+3x}$

y distinguiremos los casos:



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

e) $\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}=[1^\infty]=e^{\lim_{x\to\infty}(3x+2)\left(2-\frac{4x-1}{4x}-1\right)}=$

$=e^{\lim_{x\to\infty}(3x+2)\cdot\left(1-\frac{4x-1}{4x}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}(3x+2)\left(\frac{4x-4x+1}{4x}\right)}=$

$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{4x}}=e^{3/4}=\sqrt[4]{e^3}$

f) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1}=[1^\infty]=e^{\lim_{x\to\infty}(3x+1)\left(\frac{x}{x+3}-1\right)}=$

$=e^{\lim_{x\to\infty}(3x+1)\left(\frac{x-x-3}{x+3}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-9x-3}{x+3}}=e^{-9}=\frac{1}{e^9}$

g) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1}=[1^\infty]=e^{\lim_{x\to\infty}(x-1)\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2}-1\right)}=$

$=e^{\lim_{x\to\infty}(x-1)\cdot\left(\frac{x^2+1-x^2}{x^2}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2}}=e^0=1$

h) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6}=[1^\infty]=e^{\lim_{x\to\infty}(x+6)\cdot\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}-1\right)}=$

$=e^{\lim_{x\to\infty}(x+6)\cdot\left(\frac{x^2-x+2-x^2-1}{x^2+1}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}(x+6)\cdot\frac{(-x+1)}{x^2+1}}=$

$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2-5x+6}{x^2+1}}=e^{-1}$

www.yoquieroaprobar.es



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

i) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}} = 1^0 = 1$

j) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$

k) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{2+3x}\right)^{3x^2} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to\infty} 3x^2\cdot\left(\frac{3x-1}{2+3x}-1\right)} =$

$= e^{\lim_{x\to\infty} 3x^2\cdot\left(\frac{3x-1-2-3x}{2+3x}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-9x^2}{2+3x}} = e^{-\infty} = 0$

l) $\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2}{x-1}} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}\cdot\left(2-\frac{x^2}{x^2+1}-1\right)} =$

$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}\cdot\frac{x^2+1-x^2}{x^2+1}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3-x^2+x-1}} = e^0 = 1$

## (20) Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-6x+1}{5x^3+3x^2}$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-6x+1}{-5x^3+3x^2}$ c) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-3x}{x^3+1}$

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-6x+2}{3x^4+x-1}$ e) $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)^2\cdot(x-1)\cdot x}{x^3-(x+3)^3}$ f) $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)^2 x}{x^3-10x}$

g) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^3-5x+3}{x^2-2x}}$ h) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3-5x}}{3x}$ i) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

j) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$ k) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-12x+9}{\sqrt[3]{x^5+5x-2}}$ l) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+x}{x}$

m) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x-\sqrt{6+x}}{2x+4}$ n) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{7x+\sqrt{3x-2}}{2x}$

o) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}\right)$ p) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}\right)$

q) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}\right)$ r) $\lim_{x\to\infty} (x+5)^{x^2-5x+1}$

s) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+5}{2x+1}\right)^x$ t) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-2}{2x-3}\right)^{x^2+x}$ u) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x} - \dfrac{1+2x^2}{2x-1}\right)$

v) $\lim_{x\to\infty} (2x - \sqrt{1+4x})$ w) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-2x} - x)$

x) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{9x^2+3x} - 3x)$ y) $\lim_{x\to\infty} 2^{\frac{x^2}{x-1}}$ z) $\lim_{x\to\infty} (0'7)^{\frac{x^2}{x-1}}$

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-6x+1}{5x^3+3x^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^4}{5x^3} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3}{5}\cdot x = +\infty$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-6x+1}{-5x^3+3x^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^4}{-5x^3} = \lim_{x\to\infty} -\dfrac{3}{5}\cdot x = -\infty$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{6x^2-3x}{x^3+1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{6x^2}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{6}{x} = 0$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4-6x+2}{3x^4+x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{3x^4} = \frac{5}{3}$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{(3x+1)^2\cdot(x-1)\cdot x}{x^3-(x+3)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{(9x^2+6x+1)\cdot(x^2-x)}{x^3-(x^3+9x^2+27x-27)} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{9x^4-9x^3+6x^3-6x^2+x^2-x}{-9x^2-27x-27} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^4-3x^3-5x^2-x}{-9x^2-27x-27} =$

$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^4}{-9x^2} = \lim_{x\to\infty} -x^2 = -\infty$

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{(3x+1)^2\cdot x}{x^3-10x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^3+6x^2+x}{x^3-10x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^3}{x^3} = 9$

g) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3-5x+3}{x^2-2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = +\infty$

h) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3-5x}}{3x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{x^3}}{3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

j) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} 2x = +\infty$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

m) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}\right)$ n) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^x}$ o) $\lim_{x\to\infty}(0'3)^x$

p) $\lim_{x\to\infty}(x+2)^x$ q) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^x$ r) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x-4}\right)^{3x-6}$

s) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x-4}\right)^{\frac{1}{3x-6}}$ t) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1+x}$

u) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{(1-x)^2}\right)^{\frac{x^2+3}{x-1}}$ v) $\lim_{x\to\infty}(\ln x - x)$ w) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x+3}$

x) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2x^3+1}$ y) $\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$ z) $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)$

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)^2}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+6x+1}{3x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2}{3x^2}=3$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=1$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(2x+1)(2x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+3x+1-(x^3-3x^2+3x-1)}{4x^2-1}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+2}{4x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2}{4x^2}=\frac{3}{2}$

www.matebrodaquimet



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{1-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{1+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x}+2x}{\sqrt{x^3}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3}+2x}{\sqrt{x^3}+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}} = 1$

f) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{2x^2-1}{x^2-1}\right) = 0 - 2 = -2$

g) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1-3x^2}{x-2}\right) = [\infty - (-\infty)] = [\infty + \infty] = +\infty$

h) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{2x-1} - \frac{x}{2}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x(2x-1)}{2(2x-1)} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + x}{4x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$

i) $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = e^0 = 1$

j) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x}-1} - \frac{x}{\sqrt{x}+1}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{x(\sqrt{x}+1) - x(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x} + x - x\sqrt{x} + x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = 2$

www.aqBerqatoblog.com

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

k) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$

l) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x}=1$

m) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}\right)=+\infty$ No hay indeterminación !!

n) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^x}=0$

o) $\lim_{x\to\infty}(0'3)^x=\left[(0'3)^\infty\right]=0$

p) $\lim_{x\to\infty}(x+2)^x=\left[(\infty)^\infty\right]=+\infty$

www.BergaMates.net



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

u) $\lim_{x\to-\infty} |x^3| = \lim_{x\to\infty} |(-x)^3| = \lim_{x\to\infty} |-x^3| = |-\infty| = +\infty$

v) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = 1$

w) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x}+x} - x\right) = -\infty$

x) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{-x} = \left[\frac{\ln 1}{-\infty}\right] = 0$

y) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x} = -1$

z) $\lim_{x\to\infty} [\ln(1+x) - \ln|x|] = [\infty-\infty] =$

$= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = \ln(1) = 0$

$\lim_{x\to\infty} \ln(f(x)) = \ln\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)$

www.yoquieroaprobar.es



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(23) Determina el valor del parámetro "m" para que se cumplan las siguientes igualdades:

a) $\lim_{x\to\infty} \left(2x^2 - \sqrt{4x^4+mx^2-5}\right) = 2$

b) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+4x} - 3x + m\right) = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+3}{mx+2x^2}\right)^{x+2} = \frac{1}{e}$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x+3}{2+5x}\right)^{\frac{x^2-2}{8+mx}} = \frac{7}{10}$

a) $\lim_{x\to\infty} \left(2x^2 - \sqrt{4x^4+mx^2-5}\right) = [\infty - \infty] =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2x^2 - \sqrt{4x^4+mx^2-5}\right)\cdot\left(2x^2 + \sqrt{4x^4+mx^2-5}\right)}{2x^2 + \sqrt{4x^4+mx^2-5}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2)^2 - \left(\sqrt{4x^4+mx^2-5}\right)^2}{2x^2 + \sqrt{4x^4+mx^2-5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^4 - (4x^4+mx^2-5)}{2x^2 + \sqrt{4x^4+mx^2-5}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-mx^2-5}{2x^2+\sqrt{4x^4+mx^2-5}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-mx^2}{4x^2} = -\frac{m}{4}$$

($m \neq 0$)

$$\Rightarrow -\frac{m}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{m = -8}$$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x+m\right)=[\infty-\infty]=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+4x}-(3x-m)\right)\cdot\left(\sqrt{9x^2+4x}+(3x-m)\right)}{\sqrt{9x^2+4x}+(3x-m)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+4x}\right)^2-(3x-m)^2}{\sqrt{9x^2+4x}+(3x-m)}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+4x-(9x^2-6mx+m^2)}{\sqrt{9x^2+4x}+(3x-m)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(4+6m)x-m^2}{\sqrt{9x^2+4x}+3x-m}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(4+6m)\cdot x}{6x}=\frac{4+6m}{6}$$

$4+6m\neq 0$

$$\Rightarrow\frac{4+6m}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow 4+6m=3\Rightarrow \boxed{m=\frac{-1}{6}}$$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{mx+2x^2}\right)^{x+2}=[1^\infty]=e^{\lim_{x\to\infty}(x+2)\cdot\left(\frac{2x^2+3}{mx+2x^2}-1\right)}=$

$$\lim_{x\to\infty}(x+2)\cdot\left(\frac{2x^2+3-mx-2x^2}{mx+2x^2}\right)\qquad\lim_{x\to\infty}\frac{-mx^2+3x-2mx+6}{mx+2x^2}=$$

$$=e\qquad\qquad=e$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-mx^2}{2x^2}}=e^{-m/2}$$

$$\Rightarrow e^{-m/2}=\frac{1}{e}\Rightarrow e^{-m/2}=e^{-1}\Rightarrow -m/2=-1\Rightarrow\boxed{m=2}$$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

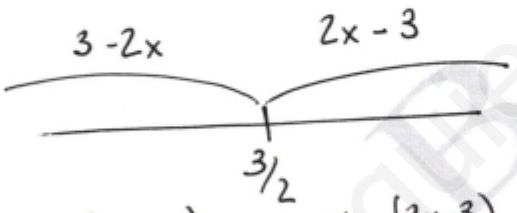
$$\Rightarrow f(x) = |x+2| - |x-2| = \begin{cases} -4 & \text{si} \quad x < -2 \\ 2x & \text{si} \quad -2 \leq x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} 4 = 4$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -4 = -4$$

b) $f(x) = x - |3-2x|$

$3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$




$x - (3-2x)$ → $3x - 3$

$x - (2x-3)$ → $-x + 3$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x-3 & \text{si} \quad x \leq 3/2 \\ -x+3 & \text{si} \quad x > 3/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-x+3) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (3x-3) = -\infty$$

www.yoquieroaprobar.es

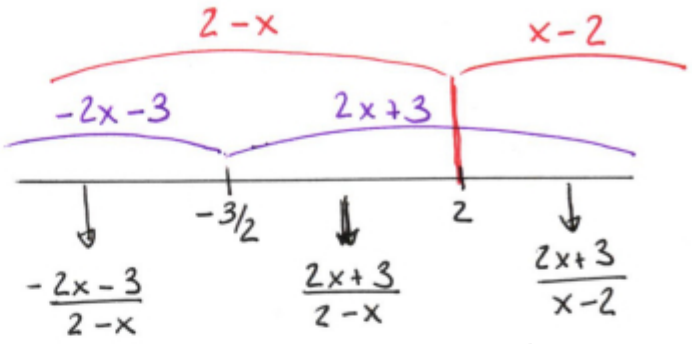


©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

c) $f(x) = \left| \frac{2x+3}{x-2} \right|$

$2x+3=0 \Rightarrow x=-3/2$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$




$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x-2} & \text{si } x < -3/2 \\ \frac{2x+3}{2-x} & \text{si } -3/2 \le x < 2 \\ \frac{2x+3}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

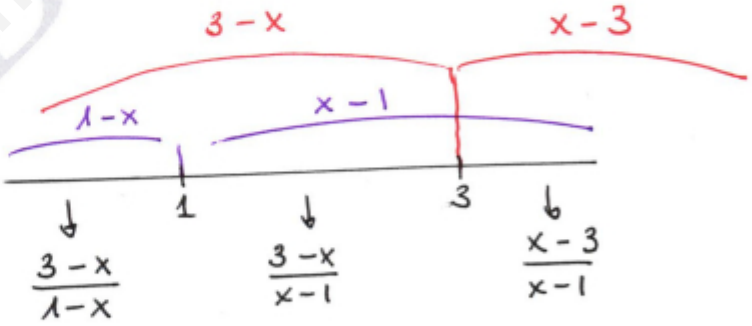
$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{+x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x+3}{-x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 2$$

d) $f(x) = \left| \frac{x-3}{1-x} \right|$

$x-3=0 \Rightarrow x=3$

$1-x=0 \Rightarrow x=1$




$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{1-x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{3-x}{x-1} & \text{si } 1 < x < 3 \\ \frac{x-3}{x-1} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-3}{x-1} = 1$$

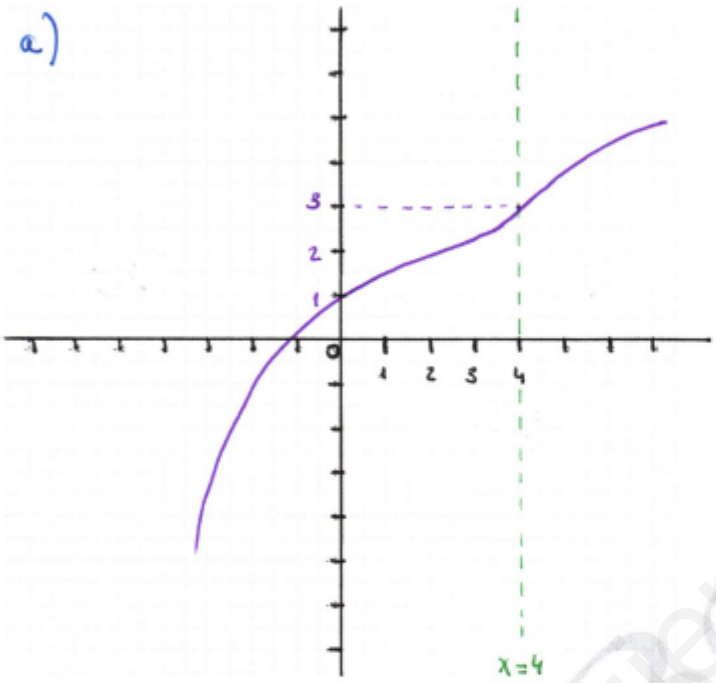
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-x}{1-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+x}{1+x} = 1$$



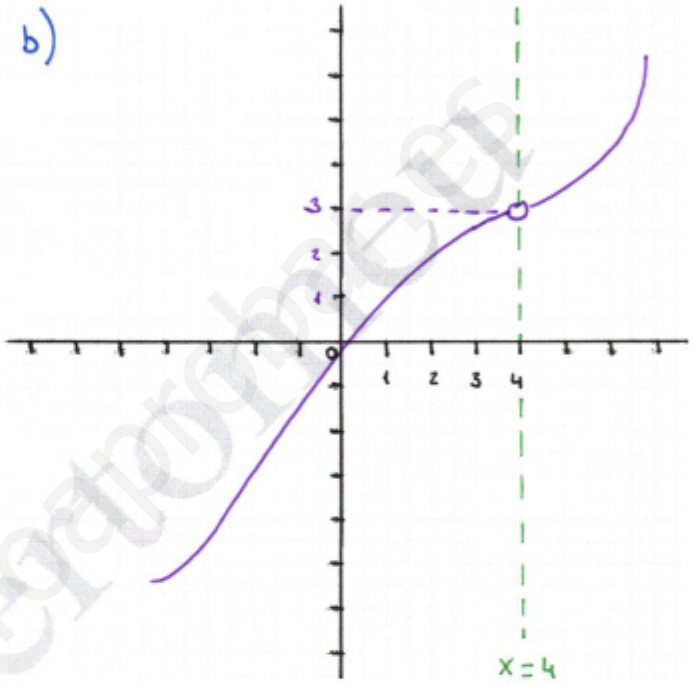
©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(26) A continuación se dan las gráficas de algunas funciones en las que debes evaluar $\lim_{x \to 4} f(x)$ en cada una de ellas.

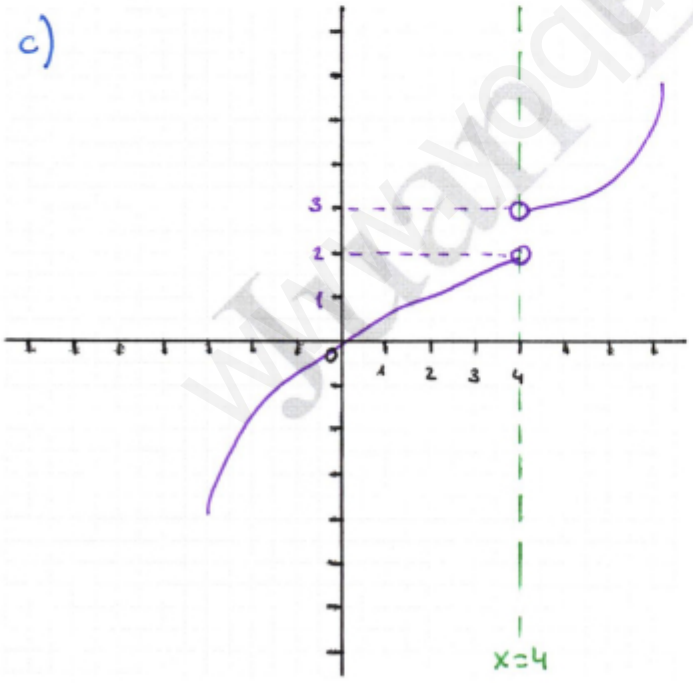
a)



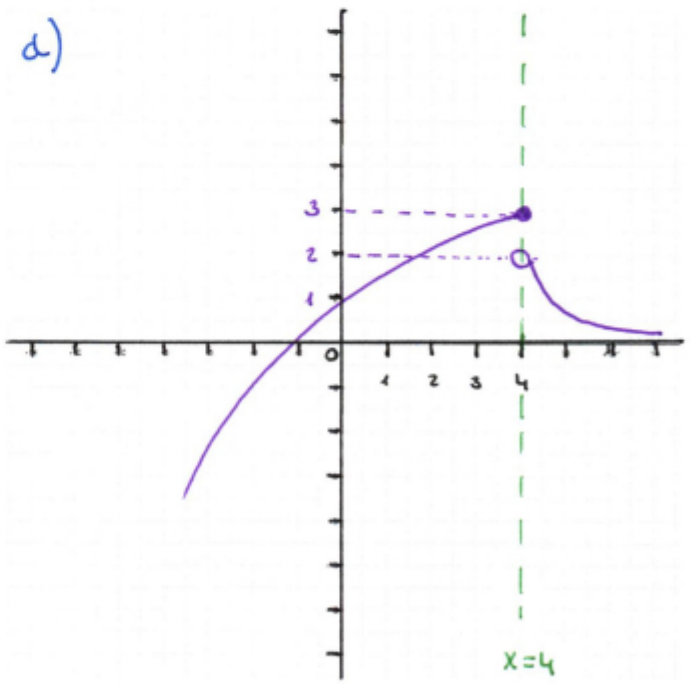

b)




c)




d)

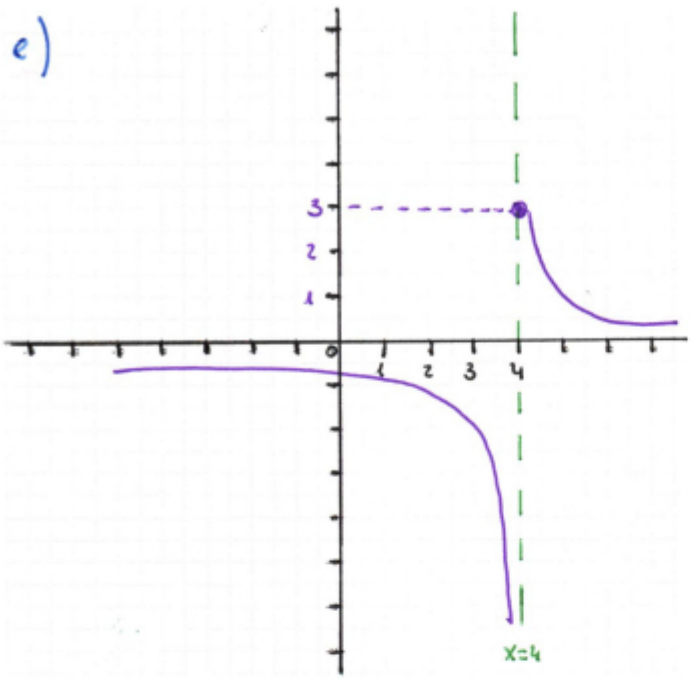



WWW.BERTOBLOG.COM

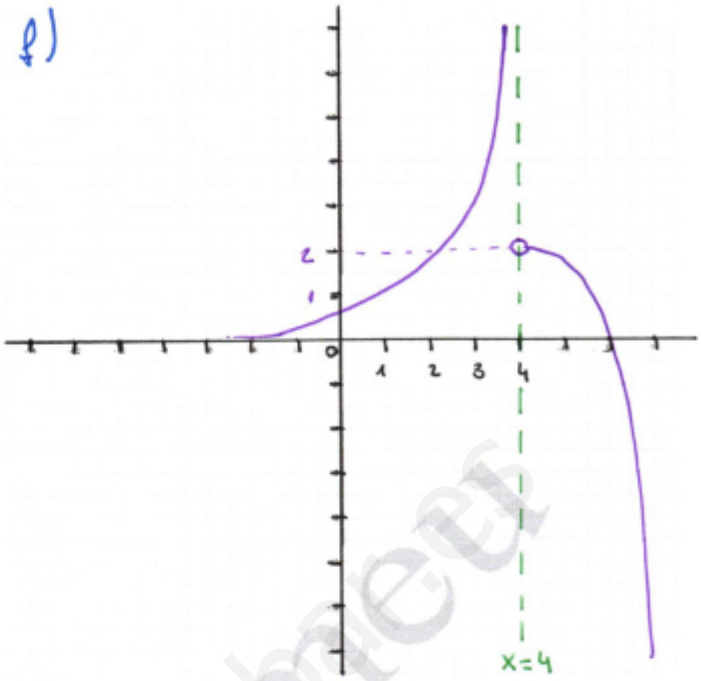


©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

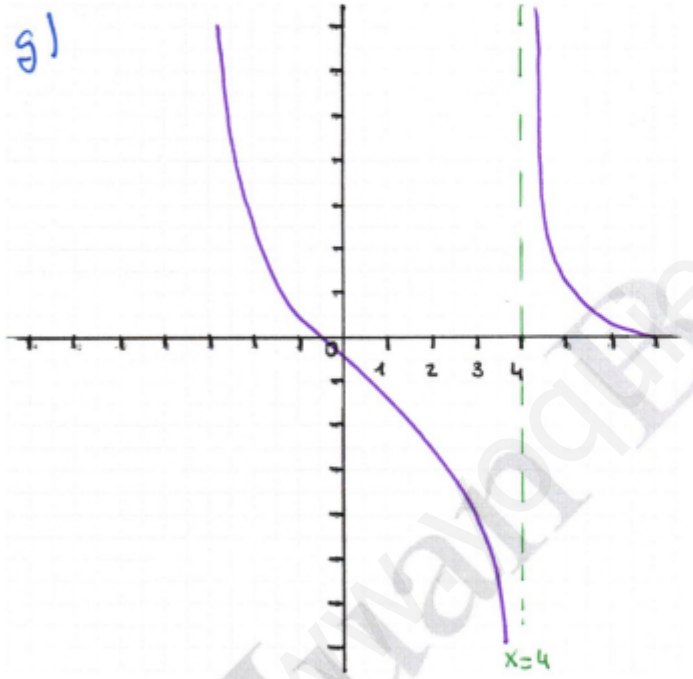
e)



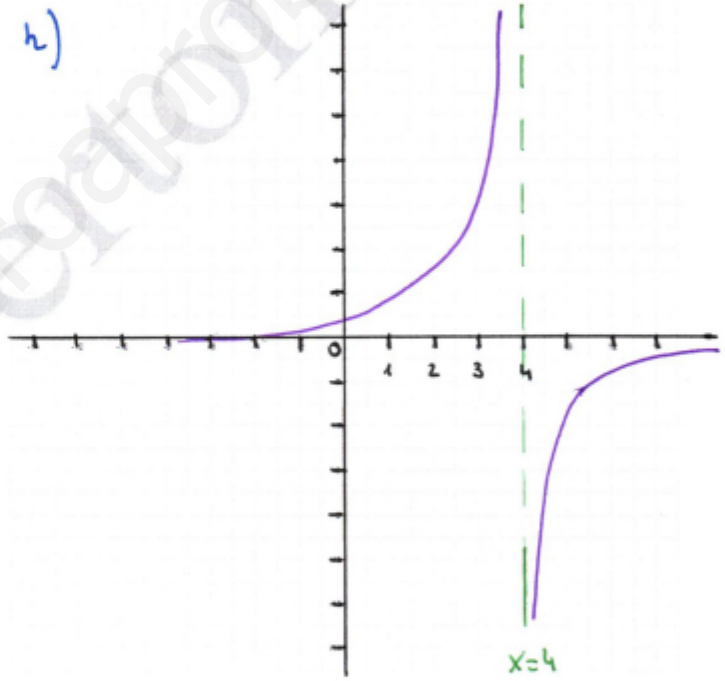

f)



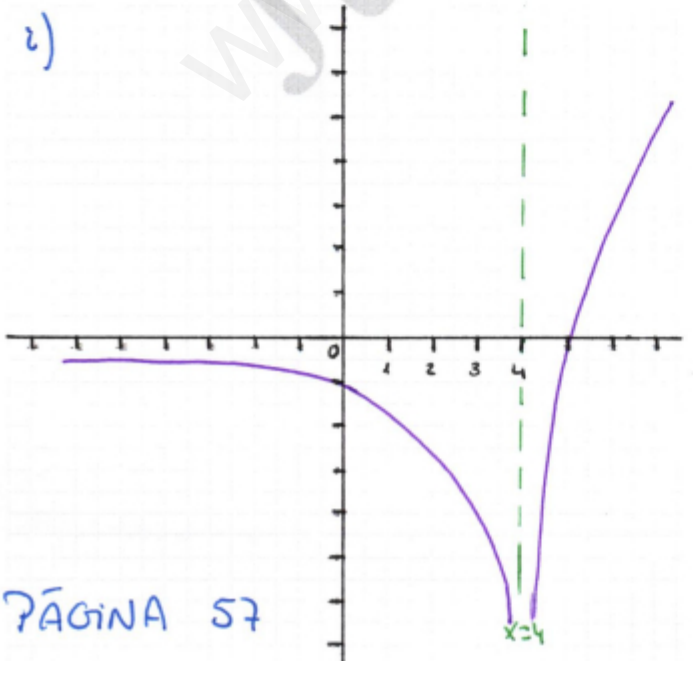

g)



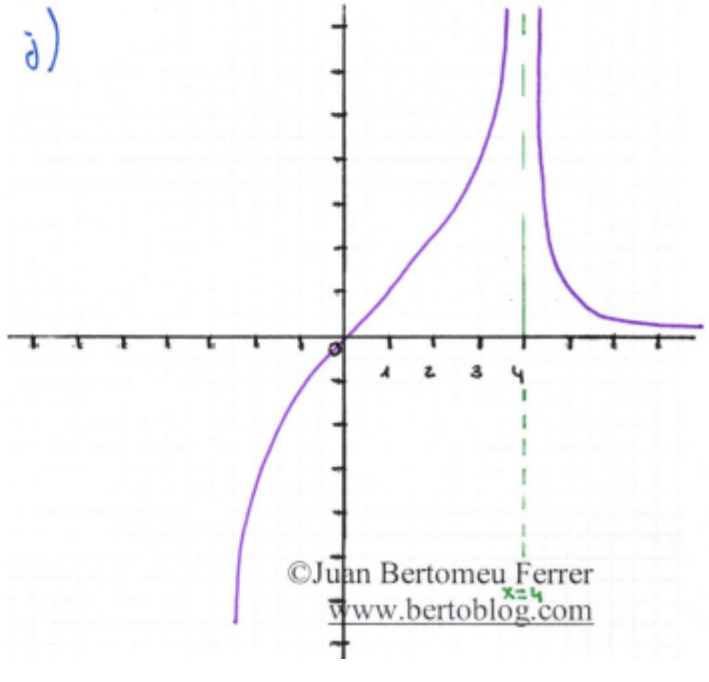

h)




i)




j)




©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$ ; b) $\nexists \lim_{x \to -1^-} f(x)$

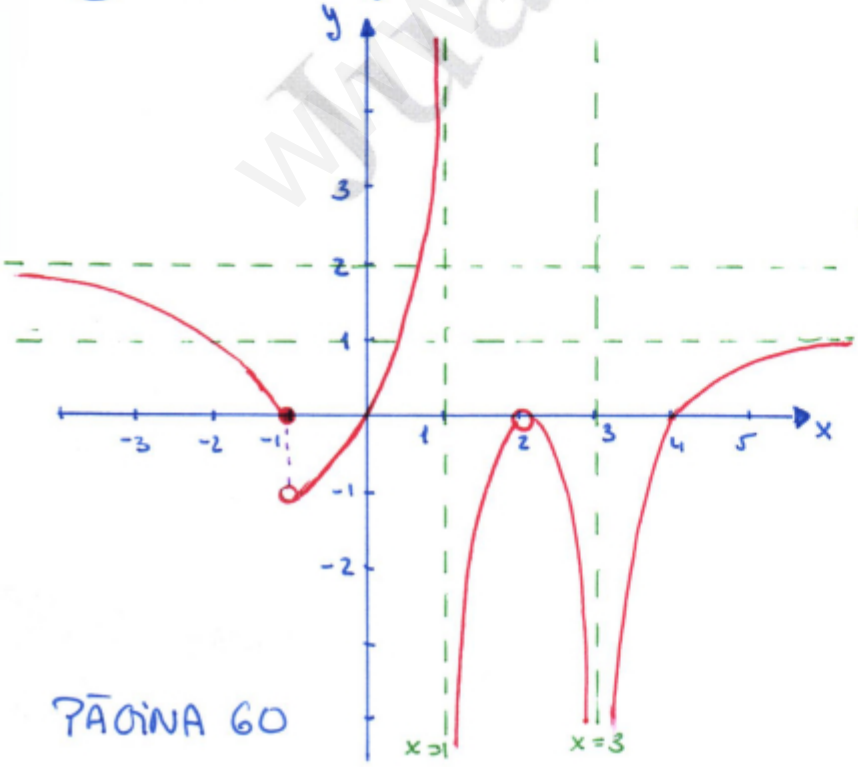
c) $\lim_{x \to 0} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

d) $\lim_{x \to 1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x)$

e) $\lim_{x \to 2} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 2$

f) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 0$ ; g) $\nexists \lim_{x \to 3^+} f(x)$

(28) Dada la gráfica de $f(x)$, calcula los límites que se indican:




a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \to -1} f(x)$

c) $\lim_{x \to 0} f(x)$ d) $\lim_{x \to 1} f(x)$

e) $\lim_{x \to 2} f(x)$ f) $\lim_{x \to 3} f(x)$

g) $\lim_{x \to \infty} f(x)$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \to -1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to -1^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to -1} f(x)$

c) $\lim_{x \to 0} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

d) $\lim_{x \to 1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x)$

e) $\lim_{x \to 2} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 0$

f) $\lim_{x \to 3} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = -\infty$

g) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

www.bertoblog.com



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(29) Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 2} (3x+1)$ b) $\lim_{x \to 0} 2^{3+x}$ c) $\lim_{x \to -5} (x^2+1)^{x+5}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{3}{x-2}$ e) $\lim_{x \to 0} (\cos x - 1)$ f) $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2-3x+5}$

g) $\lim_{x \to 1/10} \log x$ h) $\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$ i) $\lim_{x \to -1} (x^2+3)^x$

a) $\lim_{x \to 2} (3x+1) = 7$ ; b) $\lim_{x \to 0} 2^{3+x} = 2^3 = 8$

c) $\lim_{x \to -5} (x^2+1)^{x+5} = 26^0 = 1$ ; d) $\lim_{x \to 0} \frac{3}{x-2} = -\frac{3}{2}$

e) $\lim_{x \to 0} (\cos x - 1) = 1-1 = 0$ ; f) $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2-3x+5} = \sqrt{3}$

g) $\lim_{x \to 1/10} \log x = \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1$

h) $\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = \sqrt[3]{1} = 1$

i) $\lim_{x \to -1} (x^2+3)^x = 4^{-1} = \frac{1}{4}$

www.yoquieroaprobar.es



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(30) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{3}{x}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{-5}{x}$ c) $\lim_{x\to 0} \frac{5}{x^2}$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{2x}{x^2-2x+1}$ e) $\lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{1+e^x}$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{1+e^{1/x}}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}}{1-2^x}$ h) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{\ln(x+1)}$ i) $\lim_{x\to 0} \frac{5-x}{\text{sen}(x)}$

a) $\lim_{x\to 0} \frac{3}{x} = \left[\frac{3}{0}\right] \to \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \frac{3}{x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{-5}{x} = \left[\frac{-5}{0}\right] \to \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{-5}{x} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{-5}{x} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \frac{-5}{x}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{5}{x^2} = \left[\frac{5}{0}\right] \to \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{5}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{5}{x^2} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{5}{x^2} = +\infty$

www.bertoblog.com



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{\ln(x+1)} = \left[\dfrac{1}{0}\right] \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+1}{\ln(x+1)} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+1}{\ln(x+1)} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{\ln(x+1)}$

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5-x}{\operatorname{sen}(x)} = \left[\dfrac{5}{0}\right] \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \dfrac{5-x}{\operatorname{sen}(x)} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{5-x}{\operatorname{sen}(x)} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \dfrac{5-x}{\operatorname{sen}(x)}$

(31) Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x+1}{3x+3}$ b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^2+2x}{x^2-3x}$ c) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3-2x^2+2x+5}{x^2-6x-7}$

d) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^3-5x+1}{x^3+2x^2-3x}$ e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^3+2x^2-8x-8}{x^2+x-6}$ f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

g) $\lim_{x\to 0} \left( \dfrac{x^2-5x+2}{x^2+2x} - \dfrac{x^3+2x+1}{x^3+x} \right)$ h) $\lim_{x\to 1} \left[ \dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right]$

i) $\lim_{x\to -2} \dfrac{3x+6}{x^2+4x+4}$ j) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2+4x+3}{x+3}$ k) $\lim_{x\to 0} \left( \dfrac{x^2+3}{x^3} - \dfrac{1}{x} \right)$

l) $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x-5}$ m) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-7x+6}{x-1}$ n) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{2x^2-2x}$

o) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3-3x^2}{x^2-x}$ p) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x^2+15x}{x^3-3x^2}$ q) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{1-x}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

r) $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2+2x+1}$ s) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$ t) $\lim_{x\to 1} \frac{2x^3-4x^2+1}{x^2-1}$

u) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2+3x}$ v) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8}$ w) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{2x^2-8x+8}$

x) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{1-x}$ y) $\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2}$ z) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{1-x^2}$

a) $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{3x+3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{3(x+1)} = \frac{1}{3}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+2x}{x^2-3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x(2x+2)}{x(x-3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+2}{x-3} = -\frac{2}{3}$

c) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-2x^2+2x+5}{x^2-6x-7} = \left[\frac{0}{0}\right] = (*) \Rightarrow$

| | 1 | -2 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| -1 | | -1 | 3 | -5 |
| | 1 | -3 | 5 | 0 |

| | 1 | -6 | -7 |
|---|---|---|---|
| -1 | | -1 | +7 |
| | 1 | -7 | 0 |

$\Rightarrow (*) = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)\cdot(x^2-3x+5)}{(x+1)\cdot(x-7)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-3x+5}{x-7} = -\frac{9}{8}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

d) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^3-5x+1}{x^3+2x^2-3x} = \dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{28}$

e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^3+2x^2-8x-8}{x^2+x-6} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \circledast \Rightarrow$

| | 2 | 2 | −8 | −8 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 4 | 12 | 8 |
| | 2 | 6 | 4 | 0 |

| | 1 | 1 | −6 |
|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | 6 |
| | 1 | 3 | 0 |

$$\Rightarrow \circledast = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)}{(x-2)\cdot(x+3)} = \frac{24}{5}$$

f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x^2+1)\cdot(x^2-1)}{(x^2-1)} = \lim_{x\to 1}(x^2+1) = 2$

g) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-5x+2}{x^2+2x} - \dfrac{x^3+2x+1}{x^3+x}\right) = [\infty-\infty] = \circledast \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+2x = x(x+2) \\ x^3+x = x(x^2+1) \end{array}\right\} \text{m.c.m} = x(x+2)(x^2+1)$$

$$\Rightarrow \circledast = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2-5x+2)(x^2+1) - (x^3+2x+1)\cdot(x+2)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4-5x^3+2x^2+x^2-5x+2-(x^4+2x^2+x+2x^3+4x+2)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-7x^3+x^2-10x}{x(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(-7x^2+x-10)}{x\cdot(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-7x^2+x-10}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-10}{2} = -5$$

h) $$\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)}\right] = [\infty-\infty] = \lim_{x\to 1} \frac{2x-(x-1)}{x(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = \left[\frac{2}{0}\right] \to \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)}\right] = +\infty$$

i) $$\lim_{x\to -2} \frac{3x+6}{x^2+4x+4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \circledast \Rightarrow$$

$3x+6 = 3(x+2)$

| | 1 | 4 | 4 |
|---|---|---|---|
| -2 | | -2 | -4 |
| | 1 | 2 | 0 |

$$\Rightarrow \circledast = \lim_{x\to -2} \frac{3(x+2)}{(x+2)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{3}{x+2} = \left[\frac{3}{0}\right] \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} \frac{3}{x+2} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{3}{x+2} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to -2} \frac{3x+6}{x^2+4x+4}$$

www.BertoBlog.com



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

n) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2-2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \circledast \Rightarrow$

| | 1 | 1 | -2 |
|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 2 |
| | 1 | 2 | 0 |

| | 2 | -2 | 0 |
|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | 0 |
| | 2 | 0 | 0 |

$\Rightarrow \circledast = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+2)}{(x-1)\cdot 2x} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{2x} = \frac{3}{2}$

o) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x^2}{x^2-x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x-3)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x}{x-1} = \frac{0}{-1} = 0$

p) $\lim_{x\to 0} \frac{5x^2+15x}{x^3-3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x(5x+15)}{x(x^2-3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5x+15}{x^2-3x} =$

$= \left[\frac{15}{0}\right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{5x+15}{x^2-3x} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{5x+15}{x^2-3x} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \frac{5x^2+15x}{x^3-3x^2}$

q) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{1-x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}{(1-x)\cdot(\sqrt{x+3}+2)} =$

$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2-4}{(1-x)\cdot(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(-1)}{(1-x)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\sqrt{x+3}+2} =$

$= -\frac{1}{4}$

www.bertomeu.net



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

r) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2+2x+1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \circledast \Rightarrow$

| | 1 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|
| -1 | | -1 | -1 |
| | 1 | 1 | 0 |

$\Rightarrow \lim_{x\to -1} \dfrac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x+1)} = \lim_{x\to -1} \dfrac{1}{x+1} = \left[\dfrac{1}{0}\right] \longrightarrow$

$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} \dfrac{1}{x+1} = -\infty \\ \lim_{x\to -1^+} \dfrac{1}{x+1} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2+2x+1}$

s) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-x-2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \circledast \Rightarrow$

| | 1 | -1 | -2 |
|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | 2 |
| | 1 | 1 | 0 |

$\Rightarrow \circledast = \lim_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{3}$

t) $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^3-4x^2+1}{x^2-1} = \left[\dfrac{-1}{0}\right] \longrightarrow$

$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} \dfrac{2x^3-4x^2+1}{x^2-1} = +\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \dfrac{2x^3-4x^2+1}{x^2-1} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} \dfrac{2x^3-4x^2+1}{x^2-1}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

u) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2+3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(x+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{3}$

v) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8} = \left[\frac{0}{0}\right] = (*) \Rightarrow$

| | 1 | 6 | 12 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| -2 | | -2 | -8 | -8 |
| | 1 | 4 | 4 | 0 |

| | 1 | -2 | -4 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| -2 | | -2 | +8 | -8 |
| | 1 | -4 | 4 | 0 |

$\Rightarrow (*) = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\cdot(x^2+4x+4)}{(x+2)\cdot(x^2-4x+4)} = \lim_{x\to -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4} = \frac{0}{16} = 0$

w) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{2x^2-8x+8} = \left[\frac{0}{0}\right] = (*) \Rightarrow$

| | 1 | -3 | 2 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | -2 | 0 |
| | 1 | -1 | 0 | 0 |

| | 2 | -8 | 8 |
|---|---|---|---|
| 2 | | 4 | -8 |
| | 2 | -4 | 0 |

$\Rightarrow (*) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x^2-x)}{(x-2)\cdot(2x-4)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x}{2x-4} = \left[\frac{2}{0}\right] \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-x}{2x-4} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-x}{2x-4} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{2x^2-8x+8}$$

www.aulaReforzamiento



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x+2}-(x-2)}$ f) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x^2}{x^2-4}\right)$

g) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)$ h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$

i) $\lim_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}-2\right)\cdot\dfrac{1}{x}\right]$ j) $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{6}{\sqrt{x^2+4}}-3\right)\right]$

k) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{2+3^{1/x}}$ l) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-2}{4x^2-1}$ m) $\lim_{x\to 6} \dfrac{x+6}{x^2-36}$

n) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$ o) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-4x+3}$ p) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

q) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2}{x}$ r) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5}{x^2}$ s) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-3x-10}{x^2-8x+15}$

t) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ u) $\lim_{x\to 6} \dfrac{4-\sqrt{10+x}}{2-\sqrt{10-x}}$

v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$ w) $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}$

x) $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{3-x}{\sqrt{x-3}}$ y) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}$ z) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)^{\frac{1}{x+2}}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+x-6} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \circledast$

| | 1 | 1 | −4 | −4 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | 6 | 4 |
| | 1 | 3 | 2 | 0 |

| | 1 | 1 | −6 |
|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | 6 |
| | 1 | 3 | 0 |

$\Rightarrow \circledast = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+3x+2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x+2}{x+3} = \dfrac{12}{5}$

b) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3-7x-6}{x^3+3x^2+2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \circledast$

| | 1 | 0 | −7 | −6 |
|---|---|---|---|---|
| −2 | | −2 | +4 | +6 |
| | 1 | −2 | −3 | 0 |

| | 1 | 3 | 2 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| −2 | | −2 | −2 | 0 |
| | 1 | 1 | 0 | 0 |

$\Rightarrow \circledast = \lim_{x\to -2} \dfrac{(x+2)\cdot(x^2-2x-3)}{(x+2)\cdot(x^2+x)} = \lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x} = \dfrac{5}{2}$

c) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^3-7x^2+12x}{x^3-3x^2-4x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \circledast$

| | 1 | −7 | 12 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | | 4 | −12 | 0 |
| | 1 | −3 | 0 | 0 |

| | 1 | −3 | −4 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | | 4 | 4 | 0 |
| | 1 | 1 | 0 | 0 |

$\Rightarrow \circledast = \lim_{x\to 4} \dfrac{(x-4)(x^2-3x)}{(x-4)\cdot(x^2+x)} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{19-x}-4} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)\cdot(\sqrt{19-x}+4)}{(\sqrt{19-x}-4)\cdot(\sqrt{19-x}+4)} =$

$= \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)\cdot(\sqrt{19-x}+4)}{(\sqrt{19-x})^2 - 4^2} = \lim_{x\to 3} \dfrac{(-1)\,(x-3)\cdot(\sqrt{19-x}+4)}{(3-x)} =$

$= \lim_{x\to 3} (-1)\cdot(\sqrt{19-x}+4) = -8$

e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x+2}-(x-2)} = \dfrac{0}{2} = 0$

f) $\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x^2}{x^2-4}\right) = [\infty-\infty] = \circledast \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x-2 = (x-2) \\ x^2-4 = (x-2)(x+2) \end{array}\right\} \text{m.c.m} = (x-2)\cdot(x+2)$$

$\Rightarrow \circledast = \lim_{x\to 2} \dfrac{x(x+2)-x^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x-x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \dfrac{2x}{x^2-4} =$

$= \left[\dfrac{4}{0}\right] \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} \dfrac{2x}{x^2-4} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \dfrac{2x}{x^2-4} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} \left(\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x^2}{x^2-4}\right)$

Juan Bertomeu Ferrer



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

g) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=[\infty-\infty]=\circledast \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x-1=(x-1) \\ x^2-1=(x-1)\cdot(x+1) \end{array}\right\} \text{m.c.m}=(x-1)\cdot(x+1)$$

$$\Rightarrow \circledast=\lim_{x\to 1}\frac{1\cdot(x+1)-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}=\left[\frac{1}{0}\right]\rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x^2-1}=-\infty \\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x^2-1}=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$$

h) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}{x\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{1-x})^2}{x\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\,(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{2}=1$$

i) $\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}-2\right)\cdot\frac{1}{x}\right]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{2-2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right)\cdot\frac{1}{x}\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2-2\sqrt{x+1})(2+2\sqrt{x+1})}{x\cdot\sqrt{x+1}\cdot(2+2\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{4-4(x+1)}{x\cdot\sqrt{x+1}\cdot(2+2\sqrt{x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4x}{x\cdot\sqrt{x+1}\cdot(2+2\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{-4}{\sqrt{x+1}\cdot(2+2\sqrt{x+1})}=\frac{-4}{4}=-1$$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

m) $\lim_{x\to 6} \frac{x+6}{x^2-36} = \left[\frac{12}{0}\right] \to \begin{cases} \lim_{x\to 6^-} \frac{x+6}{x^2-36} = -\infty \\ \lim_{x\to 6^+} \frac{x+6}{x^2-36} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 6} \frac{x+6}{x^2-36}$

n) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)} = \lim_{x\to 4} (x+4) = 8$

o) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-4x+3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \circledast \Rightarrow$

| | 1 | -4 | 3 |
|---|---|---|---|
| 3 | | 3 | -3 |
| | 1 | -1 | 0 |

$\Rightarrow \circledast = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$

p) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \circledast \Rightarrow$

| | 1 | 0 | 0 | -8 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | 4 | 8 |
| | 1 | 2 | 4 | 0 |

$\Rightarrow \circledast = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2} (x^2+2x+4) = 12$

q) $\lim_{x\to 0} \frac{2}{x} = \left[\frac{2}{0}\right] \to \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \frac{2}{x}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

r) $\lim_{x\to 0} \frac{5}{x^2} = \left[\frac{5}{0}\right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} \frac{5}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{5}{x^2} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{5}{x^2} = +\infty$

s) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-3x-10}{x^2-8x+15} = \left[\frac{0}{0}\right] = (*) \Rightarrow$

| | 1 | -3 | -10 |
|---|---|---|---|
| 5 | | 5 | 10 |
| | 1 | 2 | 0 |

| | 1 | -8 | 15 |
|---|---|---|---|
| 5 | | 5 | -15 |
| | 1 | -3 | 0 |

$\Rightarrow (*) = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+2)}{(x-5)\cdot(x-3)} = \lim_{x\to 5} \frac{x+2}{x-3} = \frac{7}{2}$

t) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} =$

$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x-3)} = \lim_{x\to 3} (\sqrt{x}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

u) $\lim_{x\to 6} \frac{4-\sqrt{10+x}}{2-\sqrt{10-x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 6} \frac{(4-\sqrt{10+x})\cdot(4+\sqrt{10+x})\cdot(2+\sqrt{10-x})}{(2-\sqrt{10-x})\cdot(2+\sqrt{10-x})\cdot(4+\sqrt{10+x})} =$

$= \lim_{x\to 6} \frac{(4^2-(\sqrt{10+x})^2)\cdot(2+\sqrt{10-x})}{(2^2-(\sqrt{10-x})^2)\cdot(4+\sqrt{10+x})} = \lim_{x\to 6} \frac{(6-x)\cdot(2+\sqrt{10-x})}{(x-6)\cdot(4+\sqrt{10+x})} =$ $(-1)$

$= \lim_{x\to 6} \frac{(-1)\cdot(2+\sqrt{10-x})}{4+\sqrt{10+x}} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})\cdot(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{4x\cdot(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{4+x})^2-(\sqrt{4-x})^2}{4x\cdot(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{2(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})} = \dfrac{1}{8}$

vi) $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -2^+} \dfrac{(2+x)\cdot\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}\cdot\sqrt{4-x^2}} =$

$= \lim_{x\to -2^+} \dfrac{(2+x)\cdot\sqrt{4-x^2}}{(4-x^2)} = \lim_{x\to -2^+} \dfrac{(2+x)\cdot\sqrt{4-x^2}}{(2+x)(2-x)} = \dfrac{0}{4} = 0$

x) $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{3-x}{\sqrt{x-3}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{(3-x)\cdot\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x-3}} = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{(-1)(3-x)\sqrt{x-3}}{(x-3)} =$

$= \lim_{x\to 3^+} -\sqrt{x-3} = 0$

y) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = (*)$

| | 1 | -1 | -2 |
|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | 2 |
| | 1 | 1 | 0 |

$\Rightarrow$

$\Rightarrow (*) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+1)\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+1)\cdot\sqrt{x-2}}{(x-2)} =$

$= \lim_{x\to 2^+} (x+1)\cdot\sqrt{x-2} = 3\cdot 0 = 0$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

c) $\lim_{x\to 3} 2^{2x/x-3} = \left[2^{[6/0]}\right]$

$\lim_{x\to 3} \frac{2x}{x-3} = \left[\frac{6}{0}\right] \to \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty \\ \lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3} = +\infty \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3} 2^{2x/x-3} \to \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} 2^{2x/x-3} = 2^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x\to 3^+} 2^{2x/x-3} = 2^{+\infty} = \infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 3} 2^{2x/x-3}$

d) $\lim_{x\to 5} \frac{5x-25}{\sqrt{x-1}-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 5} \frac{(5x-25)\cdot(\sqrt{x-1}+2)}{(\sqrt{x-1}-2)\cdot(\sqrt{x-1}+2)} =$

$= \lim_{x\to 5} \frac{5(x-5)\cdot(\sqrt{x-1}+2)}{(\sqrt{x-1})^2-4} = \lim_{x\to 5} \frac{5(x-5)\cdot(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)} =$

$= \lim_{x\to 5} 5(\sqrt{x-1}+2) = 20$

e) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\sqrt{2-x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\cdot(\sqrt{2-x}+1)}{(\sqrt{2-x}-1)(\sqrt{2-x}+1)} =$

$= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\cdot(\sqrt{2-x}+1)}{(\sqrt{2-x})^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\cdot(\sqrt{2-x}+1)}{(1-x)} =$

$= \lim_{x\to 1} (\sqrt{2-x}+1) = 2$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

f) $\lim_{x\to 5} \dfrac{2x-10}{\sqrt{2x-6}-4} = \dfrac{0}{-2} = 0$

g) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{2x+1}-3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 4} \dfrac{(x^2-16)\cdot(\sqrt{2x+1}+3)}{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)} =$

$= \lim_{x\to 4} \dfrac{(x+4)(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}{(\sqrt{2x+1})^2-3^2} = \lim_{x\to 4} \dfrac{(x+4)(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}{2x-8} =$

$= \lim_{x\to 4} \dfrac{(x+4)(x-4)\cdot(\sqrt{2x+1}+3)}{2(x-4)} = \lim_{x\to 4} \left(\dfrac{x+4}{2}\right)\cdot(\sqrt{2x+1}+3) = 24$

h) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \dfrac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)(\sqrt{x+2}+2)} =$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{\left[(\sqrt{x+2})^2-2^2\right]\cdot(\sqrt{2x+5}+3)}{\left[(\sqrt{2x+5})^2-3^2\right]\cdot(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)\cdot(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)\cdot(\sqrt{x+2}+2)} =$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)\cdot(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x+5}+3}{2(\sqrt{x+2}+2)} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

i) $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{1-x^2}{\sqrt{x+1}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -1^+} \dfrac{(1+x)(1-x)\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+1}} =$

$= \lim_{x\to -1^+} \dfrac{(1+x)(1-x)\cdot\sqrt{x+1}}{(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} (1-x)\cdot\sqrt{x+1} = 2\cdot 0 = 0$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

j) $\lim_{x\to -3^+} \dfrac{\sqrt{13-4x}-\sqrt{28+x}}{\sqrt{x+3}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -3^+} \dfrac{(\sqrt{13-4x}-\sqrt{28+x})(\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x})}{\sqrt{x+3}\cdot(\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x})} =$

$= \lim_{x\to -3^+} \dfrac{(\sqrt{13-4x})^2-(\sqrt{28+x})^2}{\sqrt{x+3}\cdot(\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x})} = \lim_{x\to -3^+} \dfrac{(-15-5x)\cdot\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x+3}\cdot(\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x})}$

$= \lim_{x\to -3^+} \dfrac{-5(3+x)\cdot\sqrt{x+3}}{(x+3)\cdot(\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x})} = \lim_{x\to -3^+} \dfrac{-5\sqrt{x+3}}{\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x}} = 0$

k) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = (*)$

| | 1 | -3 | 2 |
|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | -2 |
| | 1 | -1 | 0 |

$\Rightarrow$

$(*) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)(x-1)}} = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt[3]{(x-1)}} =$

$= \lim_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2}\cdot\sqrt[3]{(x-1)}} = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt[6]{(x-2)^7}}{(x-2)\cdot\sqrt[3]{x-1}} =$

$= \lim_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)\cdot\sqrt[6]{x-2}}{(x-2)\cdot\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{x-1}} = \dfrac{0}{1} = 0$

l) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt[6]{x^7}}{x} =$

$= \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x\sqrt[6]{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[6]{x} = 0$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

s) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{2-(2+x)}{2(2+x)}}{x} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{-x}{2x(2+x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-1}{2(2+x)} = -\dfrac{1}{4}$

t) $\lim_{x\to 3} \left( \dfrac{x-1}{x-3} - \dfrac{x+5}{x^2-4x+3} \right) = [\infty - \infty] = (*)$

| | 1 | -4 | 3 |
|---|---|---|---|
| 3 | | 3 | -3 |
| | 1 | -1 | 0 |

$x-3 = (x-3)$
$x^2-4x+3 = (x-3)\cdot(x-1)$ } m.c.m $= (x-3)\cdot(x-1)$

$\Rightarrow (*) = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-1)^2 - (x+5)}{(x-3)\cdot(x-1)} = \lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x+1-x-5}{(x-3)(x+1)} =$

$= \lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x-4}{(x-3)(x+1)} = \left[\dfrac{-4}{0}\right] \rightarrow$

$\lim_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-3x-4}{(x-3)(x+1)} = +\infty$

$\lim_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-3x-4}{(x-3)(x+1)} = -\infty$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 3} \left( \dfrac{x-1}{x-3} - \dfrac{x+5}{x^2-4x+3} \right)$

u) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2+x}{2x^3-x^2-4x+3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = (*) \Rightarrow$

| | 1 | -2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | -1 | 0 |
| | 1 | -1 | 0 | 0 |

| | 2 | -1 | -4 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | 1 | -3 |
| | 2 | 1 | -3 | 0 |

$\Rightarrow (*) = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2-x)}{(x-1)\cdot(2x^2+x-3)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{2x^2+x-3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = (*) \Rightarrow$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

| | 1 | -1 | 0 |
|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 |

| | 2 | 1 | -3 |
|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | 3 |
| | 2 | 3 | 0 |

$$\Rightarrow (*) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot x}{(x-1)\cdot(2x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2x+3} = \frac{1}{5}$$

v) $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{0}{-2} = 0$$

w) $$\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)\cdot(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)\cdot(\sqrt{x}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)\cdot(\sqrt{x}+3)}{(x-9)} = \lim_{x\to 9} (\sqrt{x}+3) = 6$$

x) $$\lim_{x\to 0} \frac{5x^3}{x^3-2x^4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{5x^3}{x^3(1-2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{1-2x} = 5$$

y) $$\lim_{x\to 0} (1+x+x^2)^{1/x} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(1+x+x^2-1)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2}{x}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{x(1+x)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}(1+x)} = e^1$$

z) $$\lim_{x\to 0} (1+3x)^{2/x} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to 0} \frac{2}{x}(1+3x-1)} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{3x}{x}} =$$

$$= e^3$$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(34) Calcula el valor de "a" y los límites indicados sabiendo que dichos límites existen y son finitos:

a) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - ax + 3}{x - 3}$

b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{ax+6}}{x-2}$

c) $\lim_{x \to -1} \dfrac{ax^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$

d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - ax + 6}{x^3 - 4x^2 - 4x + 16}$

a) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - ax + 3}{x - 3} = \left[\dfrac{12 - 3a}{0}\right]$ → La única forma en que el límite pueda ser finito sería que $12 - 3a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 4}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)} = \lim_{x \to 3} (x - 1) = 2$

b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{ax+6}}{x-2} = \left[\dfrac{2 - \sqrt{2a+6}}{0}\right]$ → La única forma de que este límite sea finito es que $2 - \sqrt{2a+6} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2a+6} = 2$

$\Rightarrow 2a + 6 = 4 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}{x-2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \dfrac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}) \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})}{(x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})} =$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2 - \left(\sqrt{6-x}\right)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

c) $\lim_{x\to -1} \dfrac{ax^3+3x^2-2x-3}{x^2+3x+2} = \left[\dfrac{-a+2}{0}\right]$ → La única forma de que este límite sea finito es que $-a+2=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1} \frac{2x^3+3x^2-2x-3}{x^2+3x+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = (*) \Rightarrow$$

| | 2 | 3 | −2 | −3 |
|---|---|---|---|---|
| −1 | | −2 | −1 | +3 |
| | 2 | 1 | −3 | 0 |

| | 1 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|
| −1 | | −1 | −2 |
| | 1 | 2 | 0 |

$$\Rightarrow (*) = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2x^2+x-3)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{2x^2+x-3}{x+2} = -2$$

d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16} = \left[\dfrac{14-2a}{0}\right]$ → La única forma de que este límite sea finito es que $14-2a=0 \Rightarrow \boxed{a=7}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{x^3-7x+6}{x^3-4x^2-4x+16} = \left[\frac{0}{0}\right] = (*) \Rightarrow$$

| | 1 | 0 | −7 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | 4 | −6 |
| | 1 | 2 | −3 | 0 |

| | 1 | −4 | −4 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | −4 | −16 |
| | 1 | −2 | −8 | 0 |



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(36) Resuelve los siguientes límites teniendo en cuenta que

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = 1$$

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{\operatorname{sen}(3x)}$ c) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x}$ e) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ f) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2}$

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} \cdot 3 = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}\right) \cdot 3 =$

$= 1 \cdot 3 = 3$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{\operatorname{sen}(3x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{\cos(5x)}}{\operatorname{sen}(3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(3x)} \cdot \frac{1}{\cos(5x)} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x} \cdot 5x \cdot \frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)} \cdot \frac{1}{3x} \cdot \frac{1}{\cos(5x)} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{5x}{3x\cos(5x)} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos(x)) \cdot (1+\cos(x))}{x\,(1+\cos(x))} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

d) $\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x\cdot\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} =$ ($\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} = 1$)

$= 1\cdot 1 = 1$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}{x^2\,(1+\cos x)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x} =$

$= 1\cdot 1 = 1$

¡Nota! → Ampliaremos el cálculo de límites con funciones trigonométricas cuando estudiemos la REGLA DE L'HÔPITAL

(37) Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\pi} \sqrt{\cos x - 3sen\,x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{sec^2 x - 1}}{sec\,x\cdot sen\,x}$

c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} tg^3 x\cdot \cos^3 x$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x\cdot tg^2 x + sen^2 x}{tg^2 x}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $\lim_{x\to\pi} \sqrt{\cos x - 3\operatorname{sen} x} = \left[\sqrt{\cos\pi - 3\operatorname{sen}\pi}\right] = \left[\sqrt{-1}\right] = \nexists$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to\pi} \sqrt{\cos x - 3\operatorname{sen} x}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x \cdot \operatorname{sen} x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}}{\dfrac{1}{\cos x}\cdot \operatorname{sen} x} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}}{\dfrac{1}{\cos x}\cdot \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos x}\cdot \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\operatorname{sen} x} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = 1$

c) $\lim_{x\to \pi/2} \operatorname{tg}^3 x \cdot \cos^3 x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to\pi/2} (\operatorname{tg} x \cdot \cos x)^3 =$

$= \lim_{x\to\pi/2} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot \cos x\right)^3 = \lim_{x\to\pi/2} (\operatorname{sen} x)^3 = \left(\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)^3 = 1^3 = 1$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)\left[\operatorname{tg}^2 x + 1\right]}{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} =$

$= \lim_{x\to 0} \cos^2 x \left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right) = 1\cdot(0+1) = 1$

www.yoquieroaprobar.es



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(39) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, calcula

a) $\lim_{x \to -2} f(x)$ b) $\lim_{x \to 1} f(x)$ c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

a) $\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} (x^2+1) = 5$

b) $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$

c) $\lim_{x \to 0} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} (x^2+1) = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

(40) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$, calcula

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \to 0} f(x)$ c) $\lim_{x \to 3} f(x)$ d) $\lim_{x \to 5} f(x)$

e) $\lim_{x \to \infty} f(x)$

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x) = -\infty$

b) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (2x) = 0$

Juan Bertomeu



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

c) $\lim_{x\to 3} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} (2x) = 6 \\ \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 3} f(x)$

d) $\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$

e) $\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

(41) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si } x < -1 \\ 3x-1 & \text{si } -1 \le x < 4 \\ 4\sqrt{x}+3 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$, calcula

a) $\lim_{x\to -1} f(x)$ b) $\lim_{x\to 4} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ d) $\lim_{x\to \infty} f(x)$

a) $\lim_{x\to -1} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} (x^2-2) = -1 \\ \lim_{x\to -1^+} (3x-1) = -4 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to -1} f(x)$

b) $\lim_{x\to 4} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 4^-} (3x-1) = 11 \\ \lim_{x\to 4^+} (4\sqrt{x}+3) = 11 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 4} f(x) = 11$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

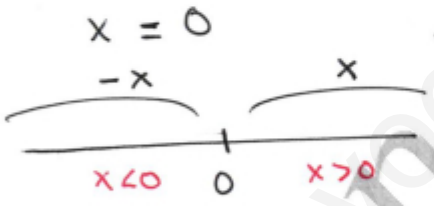
c) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (3x-1) = -1$

d) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (4\sqrt{x}+3) = \infty$

(42) Dada la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$, expresala como una función a trozos para calcular despues $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim_{x \to 0} f(x)$

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x} = -1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x} = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$




$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ ; $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x \to 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} -1 = -1 \\ \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

JuanBertomeu



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(43) Localiza y clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 5x$ b) $f(x) = \frac{5}{x-2}$ c) $f(x) = \frac{3x-6}{x^2-2x+1}$

d) $f(x) = \frac{x^2-x}{2x^2+4x-6}$ e) $f(x) = \frac{6x}{x^2-2x+3}$ f) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-2x-3}$

g) $f(x) = \frac{2x^2+4x+6}{x^2-x}$ h) $f(x) = \sqrt{x^2-3x}$ i) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$

j) $f(x) = e^{x^2+3}$ k) $f(x) = 2^{\frac{3+x}{x-1}}$ l) $f(x) = \ln(x-2)$

a) $f(x) = x^2 - 5x \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{5}{x-2}$ ; $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{2\}$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x = 2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{5}{x-2} = \left[\frac{5}{0}\right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \frac{5}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{5}{x-2} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} \frac{5}{x-2}$$

$\Rightarrow$ $x = 2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

www.JuanBertomeu.net

e) $f(x) = \dfrac{6x}{x^2-2x+3}$ ; $x^2-2x+3=0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Dom$(f(x)) = \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

f) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2-2x-3}$ ; $x^2-2x-3=0 \begin{cases} \rightarrow x=-1 \\ \rightarrow x=3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Dom$(f(x)) = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

$f(x)$ presenta discontinuidades en $x=-1$ y $x=3$

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x+2}{x^2-2x-3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to -1} \frac{2}{x-3} = -\frac{1}{2}$$

$x=-1$ es una discontinuidad EVITABLE

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x+2}{x^2-2x-3} = \left[\frac{8}{0}\right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} \frac{2x+2}{x^2-2x-3} = -\infty \\ \lim_{x\to 3^+} \frac{2x+2}{x^2-2x-3} = +\infty \end{cases}$$

$x=3$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

g) $f(x) = \dfrac{2x^2+4x+6}{x^2-x}$ ; $x^2-x=0$ ; $x(x-1)=0 \begin{cases} \rightarrow x=0 \\ \rightarrow x=1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Dom$(f(x)) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$f(x)$ presenta discontinuidades en $x=0$ y en $x=1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+4x+6}{x^2-x} = \left[\frac{6}{0}\right] \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x^2+4x+6}{x^2-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x^2+4x+6}{x^2-x} = -\infty \end{cases}$$

$x=0$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO.

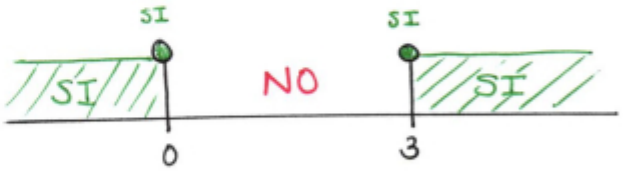
$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+4x+6}{x^2-x} = \left[\frac{12}{0}\right] \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x^2+4x+6}{x^2-x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2+4x+6}{x^2-x} = +\infty \end{cases}$$

$x=1$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO.

h) $f(x) = \sqrt{x^2-3x}$ ; $x^2-3x \geq 0$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0 \Rightarrow x=0$ ; $x=3$




$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

$f(x)$ es continua en $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

Es continua en su dominio y no presenta discontinuidades en su dominio.

www.JuanBertomeu.net



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

i) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$ ; $x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{2\}$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=2$

$$\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} = \left[\frac{1}{0}\right] \to \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} = +\infty \end{cases}$$

$x=2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

j) $f(x) = e^{x^2+3} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

↳ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

k) $f(x) = 2^{\frac{3+x}{x-1}}$ ; $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{1\}$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=1$

$$\lim_{x\to 1} 2^{\frac{3+x}{x-1}} = \left[2^{\left[\frac{4}{0}\right]}\right]$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3+x}{x-1} = \left[\frac{4}{0}\right] \to \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} \frac{3+x}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{3+x}{x-1} = +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} 2^{\frac{3+x}{x-1}} \to \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} 2^{\frac{3+x}{x-1}} = 2^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x\to 1^+} 2^{\frac{3+x}{x-1}} = 2^{+\infty} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x=1$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO.

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

l) $f(x) = \ln(x-2)$ ; $x-2>0 \Rightarrow x>2$

$\text{Dom}(f(x)) = (2, +\infty)$

$f(x)$ es continua en $(2,+\infty)$.

Es continua en su dominio y no presenta discontinuidades en su dominio.

(44) Localiza y clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{2-2^{1/x}}$ b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{3-x}\right)$ c) $f(x) = \sqrt[5]{e^{-x+2}}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ e) $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)-2}$ g) $f(x) = \dfrac{1}{\ln|x-1|}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2-e^2}{\ln(x)-1}$ i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}}{8-2^{|x|}}$ j) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}-2}$

k) $f(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$ e) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ m) $f(x) = \sqrt{|x|}$

n) $f(x) = \ln|x|$ o) $f(x) = 2x\cdot|x^2-9|$ p) $f(x) = \dfrac{5x}{2-\sqrt{x-3}}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

b) $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{3-x}\right)$ ; $\frac{x+2}{3-x} > 0$

$x+2 = 0 \to x = -2$

$3-x = 0 \to x = 3$




$$Dom(f(x)) = (-2, 3)$$

$f(x)$ es continua en su dominio y no presenta discontinuidades.

c) $f(x) = \sqrt[5]{e^{-x+2}} \Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$f(x)$ no presenta discontinuidades

d) $f(x) = \frac{x}{\ln x} \to \begin{cases} \ln x \to x > 0 \\ \frac{x}{\ln x} \to \ln x = 0 \to x = e^0 = 1 \end{cases}$

$$Dom(f(x)) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x = 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{0}\right] \to \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 1$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO.



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

e) $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)-2} \longrightarrow \begin{cases} \ln(x) \to x>0 \\ \dfrac{x-1}{\ln(x)-2} \to \ln(x)-2=0 \Rightarrow x=e^2 \end{cases}$

$$\text{Dom}(f(x)) = (0, e^2) \cup (e^2, +\infty)$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=e^2$

$$\lim_{x\to e^2} \frac{x-1}{\ln(x)-2} = \left[\frac{e^2-1}{0}\right] \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to e^{2-}} \dfrac{x-1}{\ln(x)-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to e^{2+}} \dfrac{x-1}{\ln(x)-2} = +\infty \end{cases}$$

$x=e^2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

g) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(|x-1|)} \longrightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ \ln|x-1|=0 \Rightarrow |x-1|=1 \Rightarrow x-1=\pm 1 \begin{cases} \nearrow x=0 \\ \searrow x=2 \end{cases} \end{cases}$

$$\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$$

$f(x)$ presenta discontinuidades en $x=0$, en $x=1$, y en $x=2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln|x-1|} = \left[\frac{1}{0}\right] \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\ln|x-1|} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln|x-1|} = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x=0$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO.

www.bertoblog.com



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln(|x-1|)} = \left[\frac{1}{-\infty}\right] = 0$$

$\Rightarrow$ $x=1$ es una discontinuidad EVITABLE

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{\ln(|x-1|)} = \left[\frac{1}{0}\right] \to \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\ln|x-1|} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\ln|x-1|} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x=2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

h) $f(x) = \dfrac{x^2-e^2}{\ln(x)-1} \to \begin{cases} x>0 \\ \ln x - 1 = 0 \Rightarrow x = e \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\text{Dom}(f(x)) = (0,e)\cup(e,+\infty)$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=e$

$$\lim_{x\to e} \frac{x^2-e^2}{\ln(x)-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=\!=} \lim_{x\to e} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to e} 2x^2 = 2e^2$$

Nota → Para resolver el límite anterior hemos aplicado la REGLA DE L'HÔPITAL que no se verá hasta que lleguemos a derivadas. Mientras tanto, puedes calcular dicho límite utilizando tu calculadora dando valores muy próximos a $x=e$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

n) $f(x) = \ln|x|$ ; $x=0 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$

$\Rightarrow f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=0$

$$\lim_{x\to 0} \ln|x| = [\ln 0] = -\infty$$

$\Rightarrow x=0$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

o) $f(x) = 2x\cdot|x^2-9|$ ; $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y no presenta discontinuidades

p) $f(x) = \dfrac{5x}{2-\sqrt{x-3}} \rightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \\ 2-\sqrt{x-3} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x-3 = 4 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [3,7) \cup (7,+\infty)$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=7$

$$\lim_{x\to 7} \frac{5x}{2-\sqrt{x-3}} = \left[\frac{35}{0}\right] \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 7^-} \dfrac{5x}{2-\sqrt{x-3}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 7^+} \dfrac{5x}{2-\sqrt{x-3}} = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x=7$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO.

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

## (45) Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < 2 \\ 6-x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

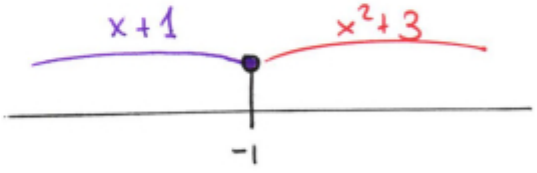
e) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 3 \\ x^2-5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$




Si $x < -1$ $\Rightarrow f(x) = x+1 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua $(-\infty, -1)$

Si $x > -1$ $\Rightarrow f(x) = x^2+3 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-1, +\infty)$

www.JuanBerToblog.com



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = -1$

$f(-1) = -1 + 1 = 0$

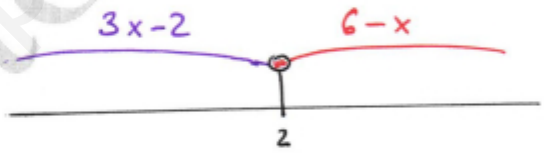
$$\lim_{x \to -1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to -1^-} (x+1) = 0 \\ \lim_{x \to -1^+} (x^2+3) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to -1} f(x)$$

$\Rightarrow$ En $x = -1$ tenemos una discontinuidad de SALTO FINITO.

En Resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

b) $$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 3x - 2 & \text{si } x < 2 \\ 6 - x & \text{si } x \geq 2 \end{array} \right.$$




Si $x < 2$ $\Rightarrow f(x) = 3x - 2 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 2)$

Si $x > 2$ $\Rightarrow f(x) = 6 - x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(2, +\infty)$

Si $x = 2$

$f(2) = 6 - 2 = 4$

$$\lim_{x \to 2} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} (3x-2) = 4 \\ \lim_{x \to 2^+} (6-x) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 4$$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

www.JuanBertomeu.com

Si $x<0$ $\Rightarrow f(x) = -x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $x>0$ $\Rightarrow f(x) = \sqrt{x} \rightarrow$ Continua en $[0, +\infty)$

↳ Continua en $(0, +\infty)$

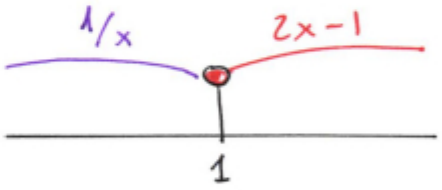
Si $x=0$

$\nexists f(0)$ ($f(x)$ no está definida en $x=0$!!)

$$\lim_{x\to 0} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$\Rightarrow$ En $x=0$ hay una discontinuidad EVITABLE.

f) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x<1 \\ 2x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$




Si $x<1$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

↳ Esta discontinuidad SI que nos afecta pues $x=0$ efectivamente está en el "trozo" que estamos estudiando ahora ($x<1$)

↳ Continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0}\right] \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x=0$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x > 1$ $\Rightarrow f(x) = 2x - 1 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(1, +\infty)$

Si $x = 1$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

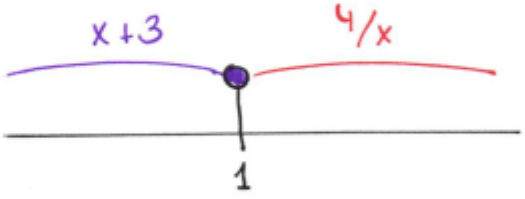
$$\lim_{x \to 1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

Como $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x = 1$

En resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

g) $$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4}{x} & \text{si } x > 1 \end{array} \right.$$




Si $x < 1$ $\Rightarrow f(x) = x + 3 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 1)$

Si $x > 1$ $\Rightarrow f(x) = \frac{4}{x} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

$\hookrightarrow$ Esta discontinuidad NO nos afecta pues $x = 0$ no está en el "trozo" que estamos estudiando ahora ($x > 1$)

$\hookrightarrow$ Continua en $(1, +\infty)$

www.BertoBlog.net



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = 1$

$f(1) = 1 + 3 = 4$

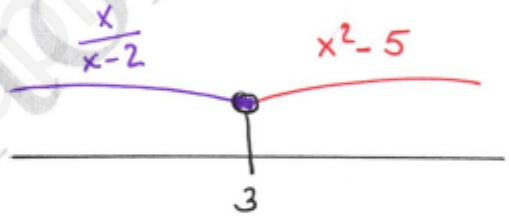
$$\lim_{x\to 1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} (x+3) = 4 \\ \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4}{x} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 4$$

Como $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x = 1$

En resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

h) $$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 3 \\ \\ x^2 - 5 & \text{si } x > 3 \end{array} \right.$$




Si $x < 3 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{x-2} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

→ Esta discontinuidad SÍ que nos afecta pues $x = 2$ efectivamente está en el "trozo" que estamos estudiando ahora ($x < 3$)

→ Continua en $(-\infty, 2) \cup (2, 3)$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2} = \left[\frac{2}{0}\right] \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x}{x-2} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{x-2} = +\infty \end{array} \right.$$

$\Rightarrow x = 2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x<0$ $\Rightarrow f(x) = \frac{4}{x-4}$ $\Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}-\{4\}$

↳ Esta discontinuidad NO nos afecta pues $x=4$ no está en el "trozo" que estamos estudiando ahora ($x<0$)

↳ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $0<x<3$ $\Rightarrow f(x) = x-1$ $\Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(0,3)$

Si $x>3$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x-3}$ $\Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}-\{3\}$ ↑ NO AFECTA

↳ Continua $(3, +\infty)$

Si $x=0$

$\nexists f(0)$ ($f(x)$ no está definida en $x=0$!!)

$$\lim_{x\to 0} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{4}{x-4} = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} x-1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -1$$

$\Rightarrow$ $x=0$ es una discontinuidad EVITABLE

Si $x=3$

$f(3) = 3-1 = 2$

$$\lim_{x\to 3} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} (x-1) = 2 \\ \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases} \nexists \lim_{x\to 3} f(x)$$



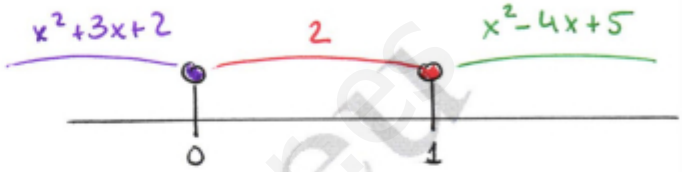
©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$\Rightarrow x = 3$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

En resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

c) $$f(x) = \begin{cases} x^2+3x+2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2-4x+5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$




Si $x < 0$ $\Rightarrow f(x) = x^2+3x+2 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua $(-\infty, 0)$

Si $0 < x < 1$ $\Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua $(0, 1)$

Si $x > 1$ $\Rightarrow f(x) = x^2-4x+5 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua $(1, +\infty)$

Si $x = 0$

$f(0) = 0^2+3\cdot 0+2 = 2$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} (x^2+3x+2) = 2 \\ \lim_{x\to 0^+} 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 2$$

Como $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x = 0$

JuanBertomeu



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = 1$

$f(1) = 2$

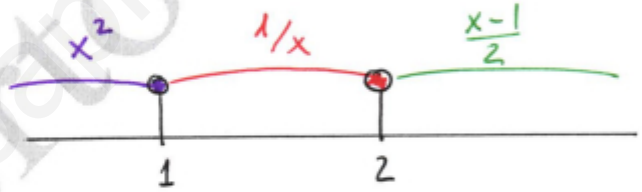
$$\lim_{x \to 1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} 2 = 2 \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 4x + 5) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Como $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x = 1$

En resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

d) $$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x > 2 \end{array} \right.$$




Si $x < 1 \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua $(-\infty, 1)$

Si $1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ (NO AFECTA)

↳ Continua en $(1, 2)$

Si $x > 2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x-1}{2} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(2, +\infty)$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = 1$

$f(1) = 1^2 = 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

Como $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) \Rightarrow$ continua en $x = 1$

Si $x = 2$

$f(2) = \frac{1}{2}$

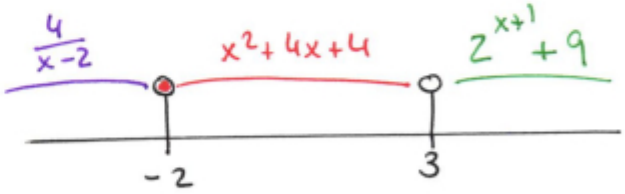
$$\lim_{x\to 2} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2}$$

Como $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x = 2$

En resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

e) $$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x-2} & \text{si } x < -2 \\ x^2+4x+4 & \text{si } -2 \le x < 3 \\ e^{x+1} + 9 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$




Si $x < -2 \Rightarrow f(x) = \frac{4}{x-2} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$ (NO AFECTA)

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, -2)$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $-2 < x < 3 \Rightarrow f(x) = x^2+4x+4 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-2,3)$

Si $x > 3 \Rightarrow f(x) = 2^{x+1} + 9 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua $(3,+\infty)$

Si $x = -2$

$f(-2) = (-2)^2 + 4\cdot(-2) + 4 = 0$

$$\lim_{x\to -2} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{4}{x-2} = -1 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} (x^2+4x+4) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to -2} f(x)$$

$\Rightarrow x = -2$ es una discontinuidad de SALTO FINITO.

Si $x = 3$

$\nexists f(3)$ ($f(x)$ no está definida en $x = 3$!!)

$$\lim_{x\to 3} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} (x^2+4x+4) = 25 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} 2^{x+1} + 9 = 25 \end{array} \right\} \lim_{x\to 3} f(x) = 25$$

$\Rightarrow x = 3$ es una discontinuidad EVITABLE.

En resumen:

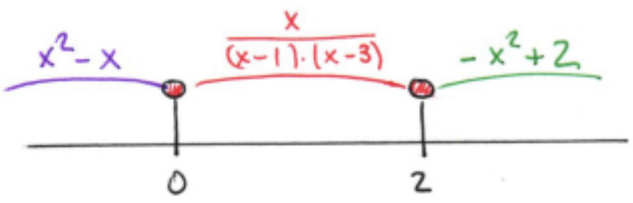
$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$

www.JuanBerdonmeu



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{(x-1)(x-3)} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ -x^2 + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$




Si $x < 0$ $\Rightarrow f(x) = x^2 - x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $0 < x < 2$ $\Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-3)} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{1, 3\}$

SI QUE AFECTA — NO AFECTA

↳ Continua en $(0,1) \cup (1,2)$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x}{(x-1)(x-3)} = \left[\frac{1}{0}\right] \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{(x-1)(x-3)} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{(x-1)(x-3)} = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 1$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

Si $x > 2$ $\Rightarrow f(x) = -x^2 + 2 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(2, +\infty)$

Si $x = 0$

$$f(0) = \frac{0}{(0-1)\cdot(0-3)} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{(x-1)(x-3)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Como $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x = 0$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = 2$

$$f(2) = \frac{2}{(2-1)(2-3)} = -2$$

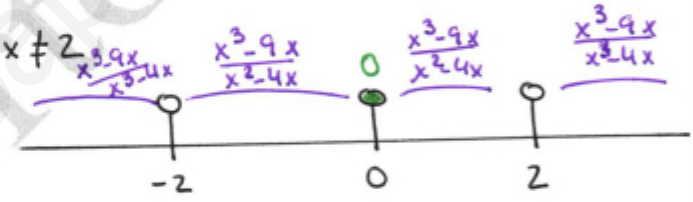
$$\lim_{x\to 2} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x}{(x-1)(x-3)} = -2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} (-x^2+2) = -2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = -2$$

Como $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x = 2$

En resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

g) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-9x}{x^3-4x} & \text{si } x \neq -2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$




$$f(x) = \frac{x^3-9x}{x^3-4x}\ ;\ x^3-4x = 0 \Rightarrow x(x^2-4) = 0 \begin{cases} \to x = 0 \\ \to x^2-4 = 0 \begin{cases} \to x = -2 \\ \to x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

En $x = -2$

$\nexists f(-2)$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3-9x}{x^3-4x} = \left[\frac{10}{0}\right] \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^3-9x}{x^3-4x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^3-9x}{x^3-4x} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

En $x=0$

$f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-9x}{x^2-4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-9)}{x(x-4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-9}{x-4}=\frac{9}{4}$$

$\Rightarrow$ $x=0$ es una discontinuidad EVITABLE.

En $x=2$

$\nexists f(2)$

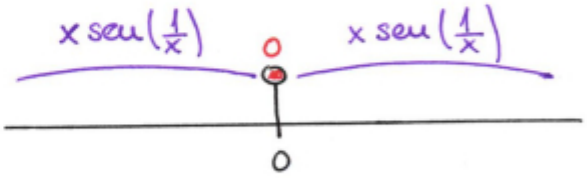
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-9x}{x^3-4x}=\left[\frac{-10}{0}\right]\longrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-9x}{x^3-4x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-9x}{x^3-4x}=-\infty\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x=2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO.

En resumen:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$

h) $$f(x)=\begin{cases}x\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$




En $x=0$

$f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=[0\cdot\text{Acotada}]=0$$

Como $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)\Rightarrow$ Continua en $x=0$

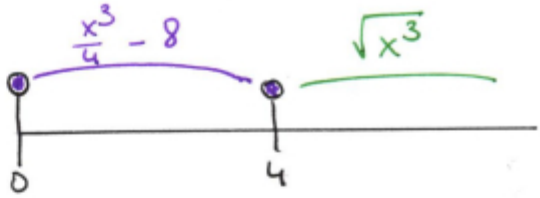
$\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu

i) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{4} - 8 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ \sqrt{x^3} & \text{si } x > 4 \end{cases}$




Si $0 \le x < 4 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{4} - 8 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $[0, 4)$

Si $x > 4 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^3} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(4, +\infty)$

Si $x = 4$

$f(4) = \frac{4^3}{4} - 8 = 8$

$\lim_{x \to 4} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 4^-} \left(\frac{x^3}{4} - 8\right) = 8 \\ \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x^3} = 8 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 4} f(x) = 8$

Como $f(4) = \lim_{x \to 4} f(x) \Rightarrow$ Continua en $x = 4$

En resumen:

$f(x)$ es continua en $[0, +\infty)$

(47) Determina los puntos en los que las siguientes funciones $f(x)$ presentan discontinuidades y, caso de ser posible, define una nueva función que contenga a $f(x)$ y sea continua en $\mathbb{R}$:

www.JuanBertomeu.com



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{2-x}$ b) $f(x) = \dfrac{18-6\sqrt{x+5}}{x-4}$ c) $f(x) = \dfrac{3x^3-2x^2+x}{4x}$

a) $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{2-x}$ ; $2-x=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{2\}$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{2-x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (*)$$

| | 1 | -1 | -2 |
|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | 2 |
| | 1 | 1 | 0 |

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow (*) = \lim_{x\to 2} \frac{\overset{(-1)}{(x-2)}(x+1)}{(2-x)} = \lim_{x\to 2}\left[-1\cdot(x+1)\right] = -3$$

$\Rightarrow$ $x=2$ es una discontinuidad EVITABLE.

Como $x=2$ es discontinuidad EVITABLE, podremos definir una nueva función $g(x)$ que contenga a $f(x)$ y que no tenga esa discontinuidad en $x=2$ según:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{2-x} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ -3 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$

En donde es fácil ver que, al ser $\lim_{x\to 2} g(x) = g(2)$, la nueva $g(x)$ será continua en $x=2$, y por tanto en $\mathbb{R}$.



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

b) $f(x) = \dfrac{18-6\sqrt{x+5}}{x-4} \rightarrow \begin{cases} x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5 \\ x-4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow Dom(f(x)) = [-5, 4) \cup (4, +\infty)$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=4$

$$\lim_{x\to 4} \frac{18-6\sqrt{x+5}}{x-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 4} \frac{(18-6\sqrt{x+5})(18+6\sqrt{x+5})}{(x-4)\cdot(18+6\sqrt{x+5})} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{18^2-(6\sqrt{x+5})^2}{(x-4)\cdot(18+6\sqrt{x+5})} = \lim_{x\to 4} \frac{324-36(x+5)}{(x-4)\cdot(18+6\sqrt{x+5})} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{144-36x}{(x-4)\cdot(18+6\sqrt{x+5})} = \lim_{x\to 4} \frac{-36(x-4)}{(x-4)(18+6\sqrt{x+5})} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{-36}{18+6\sqrt{x+5}} = -1$$

$\Rightarrow x=4$ es una discontinuidad EVITABLE

Por otro lado, y dado que buscamos una nueva función que sea continua en $\mathbb{R}$, y no solo que evite la discontinuidad de $x=4$, veamos el valor que toma $f(x)$ en $x=-5$

$$f(-5) = \frac{18-6\sqrt{0}}{-5-4} = -2$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Por tanto, es fácil ver que:

$$g(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -5 \\ \dfrac{18-6\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{si } x \in [-5,4) \cup (4,+\infty) \\ -1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

será continua en $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = \dfrac{3x^3-2x^2+x}{4x}$ ; $4x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^3-2x^2+x}{4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x(3x^2-2x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}(3x^2-2x+1) = 1$$

$\Rightarrow x=0$ es una discontinuidad EVITABLE

Como $x=0$ es una discontinuidad EVITABLE, podremos definir una nueva función $g(x)$ que contenga a $f(x)$ y que no tenga esa discontinuidad en $x=0$ según:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^3-2x^2+x}{4x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

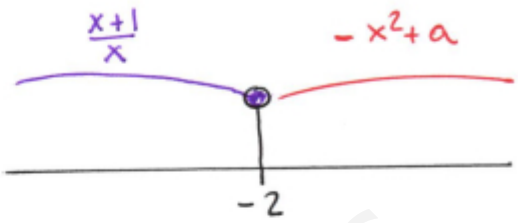
Donde es fácil ver que, al ser $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$, la nueva $g(x)$ será continua en $x=0$ y por tanto en $\mathbb{R}$.



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Juan Bertomeu www.bertoblog.com

(48) Calcula el valor de "a" para que $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2+a & \text{si } x > -2 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$.




$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2+a & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Si $x < -2$ $\Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ ↑ NO AFECTA

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, -2)$

Si $x > -2$ $\Rightarrow f(x) = -x^2+a \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-2, +\infty)$

Si $x = -2$

$$f(-2) = \frac{-2+1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to -2^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \to -2^+} -x^2+a = -4+a \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = -4+a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{9}{2}}$$

$\Rightarrow \boxed{\text{Si } a = \frac{9}{2}} \Rightarrow \lim_{x \to -2} f(x) = \frac{1}{2} = f(-2) \Rightarrow$ continua en $x = -2$ y por tanto en $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Si $a \neq \frac{9}{2} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to -2} f(x)$ y $f(x)$ presentará una discontinuidad de salto finito en $x = -2$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(49) Completa la definición de la siguiente función para que sea continua en $x=2$. ¿Es continua en $\mathbb{R}$?

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 & \text{si } x<2 \\ \square & \text{si } x=2 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Será continua en $x=2$ si se verifica que $f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$.

Veamos el límite:

$$\lim_{x\to 2} f(x) \to \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} (x^2-2x-1) = -1 \\ \lim_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-3} = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = -1$$

con lo que si hacemos que sea $f(2)=-1$, la función será continua en $x=2$. Por tanto:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 & \text{si } x<2 \\ -1 & \text{si } x=2 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x>2 \end{cases} \quad \text{es continua en } x=2$$

Veamos que sucede en el resto de la recta real:

Si $x<2 \to f(x)=x^2-2x-1 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, 2)$

Si $x>2 \to f(x)=\dfrac{1}{x-3} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}-\{3\}$ (SI QUE AFECTA)

↳ Continua en $(2,3)\cup(3,+\infty)$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x=3$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(50) Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en función de los valores de los parámetros que aparecen:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2+ax & \text{si } x < 2 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

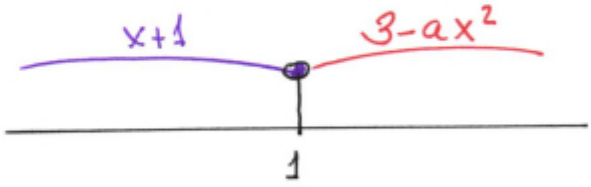
c) $f(x) = \begin{cases} ax^2-2 & \text{si } x \le -2 \\ a & \text{si } -2 < x \le 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x \le -1 \\ k & \text{si } -1 < x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x \neq 5 \\ p & \text{si } x = 5 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2+b & \text{si } x \le 2 \\ a(x-3)^2+3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$




Si $x < 1$ → $f(x) = x+1$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, 1)$

Si $x > 1$ → $f(x) = 3-ax^2$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(1, \infty)$

www.JuanBertomeu.com



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = 1$

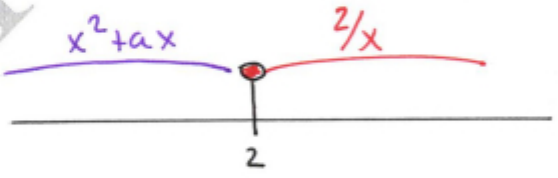
$f(1) = 1+1 = 2$

$$\lim_{x\to 1} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} (3-ax^2) = 3-a \end{cases} \quad 2 = 3-a \Rightarrow \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$\Rightarrow$ Si $a = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1) \Rightarrow$ Continua en $x=1$ y por tanto en $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Si $a \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$ y $f(x)$ presentará una discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

b) $$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$




Si $x < 2 \rightarrow f(x) = x^2+ax \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, 2)$

Si $x > 2 \rightarrow f(x) = \dfrac{2}{x} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ ↑ NO AFECTA

↳ Continua en $(2, +\infty)$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = 2$

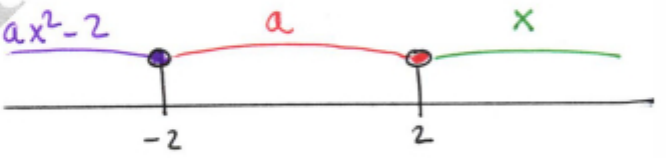
$f(2) = \frac{2}{2} = 1$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} x^2+ax = 4+2a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{2}{x} = 1 \end{cases} \quad 4+2a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-3}{2}}$$

$\Rightarrow$ Si $a = -\frac{3}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1 = f(2) \Rightarrow$ Continua en $x=2$ y por tanto en $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Si $a \neq -\frac{3}{2} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y $f(x)$ presentará una discontinuidad de salto finito en $x=2$

c) $$f(x) = \begin{cases} ax^2-2 & \text{si } x \leq -2 \\ a & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$




Si $x < -2 \rightarrow f(x) = ax^2-2 \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, -2)$

Si $-2 < x < 2 \rightarrow f(x) = a \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-2, 2)$

Si $x > 2 \rightarrow f(x) = x \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(2, +\infty)$

Juan Bertomeu



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = -2$

$$f(-2) = a\cdot(-2)^2 - 2 = 4a - 2$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} (ax^2 - 2) = 4a - 2 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} a = a \end{cases} \quad 4a - 2 = a \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow a = 2/3$$

Si $x = 2$

$$f(2) = a$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} a = a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} x = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2$$

$\Rightarrow$ Si $a = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} f(x) = \frac{2}{3} = f(-2)$ y es continua en $x = -2$

pero $\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y presenta discontinuidad de salto finito en $x = 2$

$\Rightarrow$ Si $a = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2 = f(2)$ y es continua en $x = 2$

pero $\nexists \lim\limits_{x\to -2} f(x)$ y presenta discontinuidad de salto finito en $x = -2$.

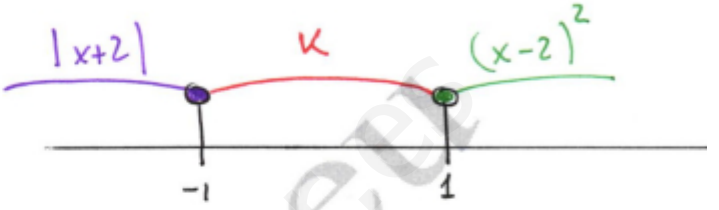
www.JuanBertomeu.com



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$\Rightarrow$ Si $a \neq \frac{2}{3} \wedge a \neq 2 \Rightarrow \nexists \lim_{x \to -2} f(x)$ ni $\nexists \lim_{x \to 2} f(x)$ y presenta discontinuidades de salto finito tanto en $x = -2$ como en $x = 2$.

d) $$f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x \leq -1 \\ K & \text{si } -1 < x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$




Si $x < -1$ $\longrightarrow f(x) = |x+2| \longrightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, -1)$

Si $-1 < x < 1$ $\longrightarrow f(x) = K \longrightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-1, 1)$

Si $x > 1$ $\longrightarrow f(x) = (x-2)^2 \longrightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(1, +\infty)$

Si $x = -1$

$f(-1) = |-1+2| = |+1| = 1$

$$\lim_{x \to -1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to -1^-} |x+2| = 1 \\ \lim_{x \to -1^+} K = K \end{array} \right\} \quad K = 1$$

Juan Bertomeu



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = 1$

$f(1) = (1-2)^2 = (-1)^2 = 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to 1^-} & K = K \\ \lim\limits_{x\to 1^+} & (x-2)^2 = 1 \end{array} \right\} \quad K = 1$$

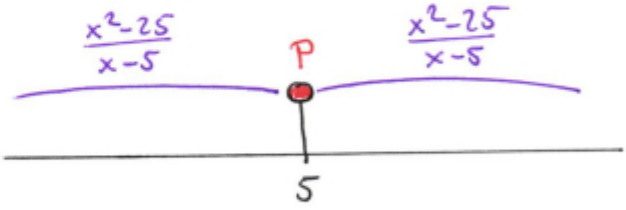
$\Rightarrow$ Si $K = 1 \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1 = f(-1) \Rightarrow$ Continua en $x = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1) \Rightarrow$ Continua en $x = 1$

$\rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Si $K \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -1} f(x)$ y $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y habrá discontinuidades de salto finito tanto en $x = -1$ como en $x = 1$.

e) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x \neq 5 \\ P & \text{si } x = 5 \end{cases}$$




Si $x \neq 5 \rightarrow f(x) = \dfrac{x^2-25}{x-5} \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{5\}$ (NO AFECTA)

$\rightarrow$ Continua en $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = 5$

$f(5) = p$

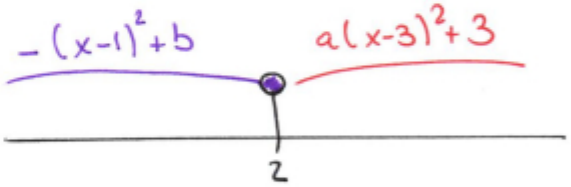
$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 5} \frac{(x+5)\cdot(x-5)}{(x-5)} =$$

$$= \lim_{x\to 5} (x+5) = 10$$

Si $p = 10 \Rightarrow \lim_{x\to 5} f(x) = f(5) \Rightarrow$ Continua en $x=5$ y por tanto en $\mathbb{R}$.

Si $p \neq 10 \Rightarrow \lim_{x\to 5} f(x) = 10 \neq f(5) \Rightarrow f(x)$ presentará una discontinuidad evitable en $x = 5$

f) $$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2+b & \text{si } x \leq 2 \\ a(x-3)^2+3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$




Si $x < 2 \rightarrow f(x) = -(x-1)^2+b \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$.

↳ Continua $(-\infty, 2)$

Si $x > 2 \rightarrow f(x) = a(x-3)^2+3 \rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$.

↳ Continua en $(2, +\infty)$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = 2$

$$f(2) = -(2-1)^2 + b = b - 1$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} -(x-1)^2 + b = b-1 \\ \lim_{x \to 2^+} a(x-3)^2 + 3 = a+3 \end{array} \right\} \; a+3 = b-1 \Rightarrow a - b = -4$$

Si $a - b = -4 \Rightarrow$ Continua en $x = 2$ y por tanto en $\mathbb{R}$

Si $a - b \neq -4 \Rightarrow$ Discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

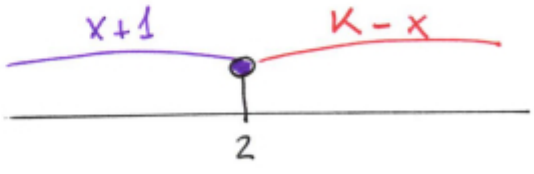
(51) Calcula el valor de "K" para que las siguientes funciones sean continuas en $\mathbb{R}$

a) $$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ K - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} x + K & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

c) $$f(x) = \begin{cases} 2x + K & \text{si } x < -1 \\ -Kx - 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

a) $$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ K - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$




Si $x < 2 \longrightarrow f(x) = x + 1 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 2)$

Juan Bertomeu Ferrer



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x > 2$ $\longrightarrow f(x) = K - x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(2, +\infty)$

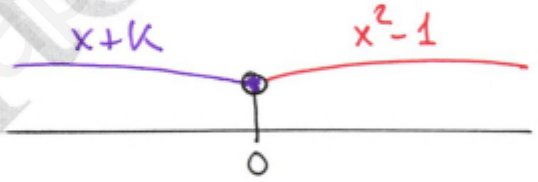
Si $x = 2$

$f(2) = 2 + 1 = 3$

$$\lim_{x \to 2} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} (x+1) = 3 \\ \\ \lim_{x \to 2^+} (K - x) = K - 2 \end{array} \right\} \; K - 2 = 3 \Rightarrow \boxed{K = 5}$$

Si $K = 5 \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow$ Continua en $x = 2$ y por tanto en $\mathbb{R}$

b) $$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x + K & \text{si } x \leq 0 \\ \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{array} \right.$$




Si $x < 0$ $\longrightarrow f(x) = x + K \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $x > 0$ $\longrightarrow f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(0, +\infty)$

Si $x = 0$

$f(0) = 0 + K = K$

$$\lim_{x \to 0} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} (x + K) = K \\ \\ \lim_{x \to 0^+} (x^2 - 1) = -1 \end{array} \right\} \; \boxed{K = -1}$$

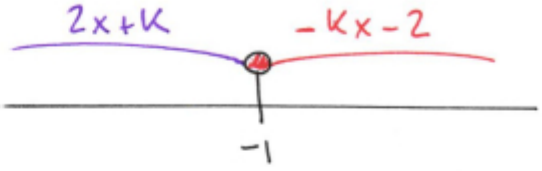
www.JuanBertomeu.com



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $K=-1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow$ Continua en $x=0$ y por tanto en $\mathbb{R}$

c) $$f(x)=\begin{cases} 2x+K & \text{si } x<-1 \\ -Kx-2 & \text{si } x\geq -1 \end{cases}$$




Si $x<-1 \longrightarrow f(x)=2x+K \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua $(-\infty,-1)$

Si $x>-1 \longrightarrow f(x)=-Kx-2 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-1,+\infty)$

Si $x=-1$

$$f(-1)=-K\cdot(-1)-2=K-2$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to -1^-}(2x+K)=K-2 \\ \lim_{x\to -1^+}(-Kx-2)=K-2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x)=K-2$$

Como $f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)$, $f(x)$ será continua en $x=-1$ y

por tanto en $\mathbb{R}$ para cualquier valor del parámetro "K"

Juan Bertomeu



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(52) Determina el valor de los parámetros sabiendo que las siguientes funciones son continuas en $\mathbb{R}$.

a) $$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ ax+b & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ x-6 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ mx+n & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

c) $$f(x) = \begin{cases} -\frac{a}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

d) $$f(x) = \begin{cases} 1+ax & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

e) $$f(x) = \begin{cases} \frac{(1-\cos x)\cdot \operatorname{sen} x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f) $$f(x) = \begin{cases} x^3+5x+\frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ \operatorname{sen}(kx)+(k-1)\cdot\cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

g) $$f(x) = \begin{cases} ax^2+b & \text{si } x < 0 \\ x-a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{a}{x}+b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

h) $$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2+2a\cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2+b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

i) $$f(x) = \begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x < 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

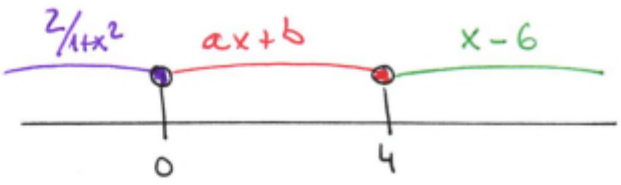
j) $$f(x) = \begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x \leq -1 \\ x^3-a & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ bx-3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

www.bertoblog.com



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ ax+b & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ x-6 & \text{si } x > 4 \end{cases}$




Si $x<0$ $\longrightarrow f(x) = \dfrac{2}{1+x^2} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $0<x<4$ $\longrightarrow f(x) = ax+b \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(0,4)$

Si $x>4$ $\longrightarrow f(x) = x-6 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(4,+\infty)$

Si $x=0$

$f(0) = \dfrac{2}{1+0^2} = 2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2}{1+x^2} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} ax+b = b \end{cases} \Rightarrow b = 2$

Si $b=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow$ Continua en $x=0$

Si $x=4$ $\quad b=2$

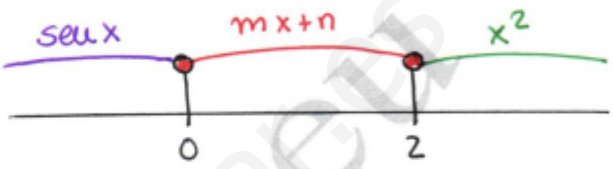
$f(4) = 4a+b = 4a+2$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\lim_{x\to 4} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to 4^-} & ax+b = 4a+2 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} & x-6 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4a+2=-2 \Rightarrow a=-1$$

$\Rightarrow$ Si $a=-1$ y $b=2$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

b) $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x<0 \\ mx+n & \text{si } 0\le x\le 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$




Si $x<0$ $\longrightarrow$ $f(x)=\operatorname{sen} x$ $\Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $0<x<2$ $\longrightarrow$ $f(x)=mx+n$ $\Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(0,2)$

Si $x>2$ $\longrightarrow$ $f(x)=x^2$ $\Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(2,+\infty)$

Si $x=0$

$f(0) = m\cdot 0 + n = n$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to 0^-} & \operatorname{sen} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} & mx+n = n \end{array} \right\} \quad n=0$$

Juan Bertomeu



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = 2$

$$f(2) = m\cdot 2 + n = 2m+n$$

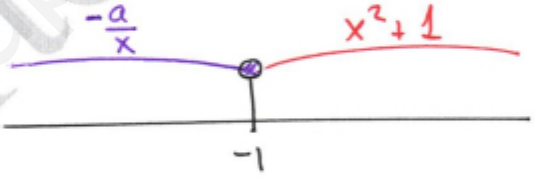
$$\lim_{x\to 2} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to 2^-} & mx+n = 2m+n \\ \lim\limits_{x\to 2^+} & x^2 = 4 \end{array} \right\} \; 2m+n = 4$$

Para que sea continua en $\mathbb{R}$ se debe verificar que:

$$\left.\begin{array}{l} 2m+n=4 \\ n=0 \end{array}\right\} \longrightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$$

$\Rightarrow$ Si $m=2$ y $n=0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

c) $$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{a}{x} & \text{si } x \le -1 \\ x^2+1 & \text{si } x > -1 \end{array} \right.$$




Si $x < -1$ $\longrightarrow$ $f(x) = -\frac{a}{x}$ $\Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ (NO AFECTA)

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, -1)$

Si $x > -1$ $\longrightarrow$ $f(x) = x^2+1$ $\Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-1, +\infty)$

Si $x = -1$

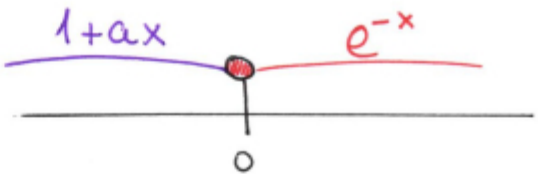
$$f(-1) = \frac{-a}{-1} = a$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to -1^-} & -\frac{a}{x} = a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} & x^2+1 = 2 \end{array} \right\} \; a = 2$$

$\Rightarrow$ Si $a=2$ $f(x)$ es continua en $x=-1$ y por tanto en $\mathbb{R}$.

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

d) $f(x) = \begin{cases} 1+ax & \text{si } x<0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$




Si $x<0$ → $f(x) = 1+ax$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $x>0$ → $f(x) = e^{-x}$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(0, +\infty)$

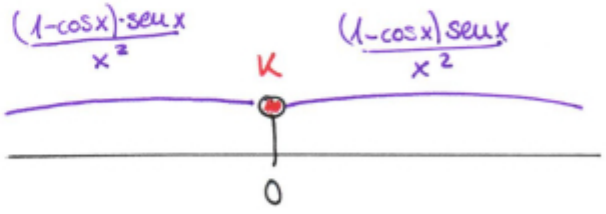
Si $x=0$

$f(0) = e^{-0} = 1$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} (1+ax) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

Como $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, $f(x)$ será continua en $x=0$ y por tanto en $\mathbb{R}$ para cualquier valor del parámetro "a"

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-\cos x)\cdot \operatorname{sen} x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ K & \text{si } x = 0 \end{cases}$




Si $x \neq 0$ → $f(x) = \dfrac{(1-\cos x)\operatorname{sen} x}{x^2}$ ⇒ Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

NO AFECTA

↳ Continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x=0$

$f(0) = K$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\cdot \operatorname{sen} x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

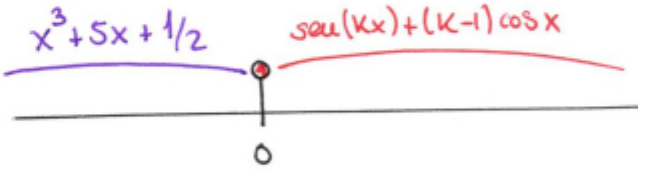
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\,(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x\,(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\,(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

$\Rightarrow$ Si $K=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(x)$ será continua en $x=0$ y por tanto en $\mathbb{R}$

f) $$f(x) = \begin{cases} x^3 + 5x + \frac{1}{2} & \text{si } x<0 \\ \operatorname{sen}(Kx) + (K-1)\cdot\cos x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$




Si $x<0 \longrightarrow f(x) = x^3 + 5x + \frac{1}{2} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua $(-\infty, 0)$

Si $x>0 \longrightarrow f(x) = \operatorname{sen}(Kx) + (K-1)\cos x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(0, +\infty)$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

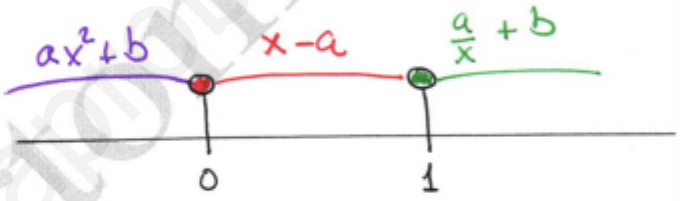
Si $x = 0$

$$f(0) = \operatorname{sen}(0) + (k-1)\cdot\cos 0 = k-1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \left(x^3+5x+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\operatorname{sen}(kx)+(k-1)\cos x\right) = k-1 \end{cases} \Rightarrow k-1=\frac{1}{2} \Rightarrow k=\frac{3}{2}$$

Si $k=\frac{3}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(x)$ será continua en $x=0$ y por tanto en $\mathbb{R}$

g) $$f(x) = \begin{cases} ax^2+b & \text{si } x<0 \\ x-a & \text{si } 0\le x<1 \\ \frac{a}{x}+b & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$




Si $x<0$ $\longrightarrow f(x) = ax^2+b \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $0<x<1$ $\longrightarrow f(x) = x-a \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(0,1)$

Si $x>1$ $\longrightarrow f(x) = \frac{a}{x}+b \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ ↑ NO AFECTA

$\hookrightarrow$ Continua en $(1,+\infty)$

www.JuanBertomeu.com



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x=0$

$$f(0) = 0-a = -a$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} (ax^2+b) = b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x-a) = -a \end{array} \right\} \; b = -a \Rightarrow a+b=0$$

Si $x=1$

$$f(1) = \frac{a}{1} + b = a+b$$

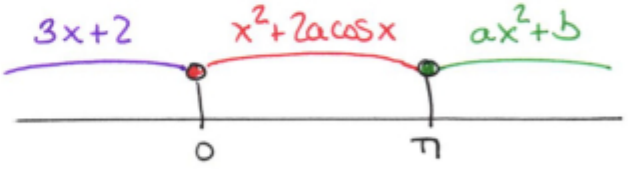
$$\lim_{x\to 1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} (x-a) = 1-a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{a}{x}+b\right) = a+b \end{array} \right\} \; 1-a = a+b \Rightarrow 2a+b=1$$

Para que sea continua en $\mathbb{R}$, se debe verificar que:

$$\left. \begin{array}{l} a+b=0 \\ 2a+b=1 \end{array} \right\} \; E_2 - E_1 \rightarrow a=1 \Rightarrow b=-a=-1$$

$\Rightarrow$ Si $a=1$ y $b=-1 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

h) $$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x<0 \\ x^2+2a\cos x & \text{si } 0\le x<\pi \\ ax^2+b & \text{si } x\ge \pi \end{cases}$$




Si $x<0 \Rightarrow f(x) = 3x+2 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $0<x<\pi \rightarrow f(x) = x^2+2a\cos x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(0,\pi)$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x > \pi \rightarrow f(x) = ax^2 + b \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(\pi, +\infty)$

Si $x = 0$

$f(0) = 0^2 + 2a \cdot \cos 0 = 2a$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} (3x+2) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 + 2a\cos x) = 2a \end{array} \right\} \; 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

Si $x = \pi$

$f(\pi) = a \cdot \pi^2 + b$

$$\lim_{x\to \pi} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \pi^-} (x^2 + 2a\cos x) = \pi^2 - 2a \\ \lim\limits_{x\to \pi^+} (ax^2 + b) = a\pi^2 + b \end{array} \right\} \; \pi^2 - 2a = a\pi^2 + b \Rightarrow$$

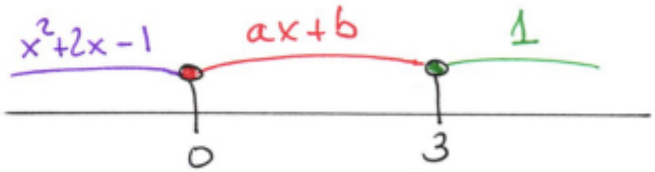
$$\Rightarrow a(\pi^2+2) + b = \pi^2$$

Para que sea continua en $\mathbb{R}$ se debe verificar que:

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ a(\pi^2+2) + b = \pi^2 \end{array} \right\} \; \cancel{\pi^2} + 2 + b = \cancel{\pi^2} \Rightarrow b = -2$$

$\Rightarrow$ Si $a = 1$ y $b = -2 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

i) $$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } x \ge 3 \end{array} \right.$$




www.bertoblog.com



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x<0$ → $f(x) = x^2+2x-1$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $0<x<3$ → $f(x) = ax+b$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(0,3)$

Si $x>3$ → $f(x) = 1$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(3,+\infty)$

Si $x=0$

$f(0) = a\cdot 0+b = b$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} (x^2+2x-1) = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} (ax+b) = b \end{array} \right\} \; b = -1$$

Si $x=3$

$f(3) = 1$

$$\lim_{x\to 3} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} (ax+b) = 3a+b \\ \lim_{x\to 3^+} 1 = 1 \end{array} \right\} \; 3a+b = 1$$

Para que sea continua en $\mathbb{R}$ se debe verificar que:

$$\left. \begin{array}{l} b = -1 \\ 3a+b = 1 \end{array} \right\} \; 3a-1 = 1 \Rightarrow a = 2/3$$

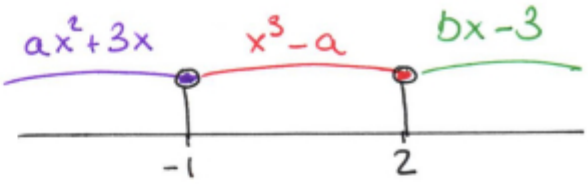
⇒ Si $a=\frac{2}{3}$ y $b=-1$ ⇒ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

Juan Bertomeu Ferrer



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

j) $$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x\le -1 \\ x^3-a & \text{si } -1<x\le 2 \\ bx-3 & \text{si } x>2 \end{cases}$$




Si $x<-1$ $\longrightarrow f(x)=ax^2+3x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty,-1)$

Si $-1<x<2$ $\longrightarrow f(x)=x^3-a \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-1,2)$

Si $x>2$ $\longrightarrow f(x)=bx-3 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(2,+\infty)$

Si $x=-1$

$$f(-1)=a\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)=a-3$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-}(ax^2+3x)=a-3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+}(x^3-a)=-1-a \end{cases} \Rightarrow a-3=-1-a \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$$

Si $x=2$

$$f(2)=2^3-a=8-a$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}(x^3-a)=8-a \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(bx-3)=2b-3 \end{cases} \Rightarrow 8-a=2b-3 \Rightarrow a+2b=11$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Para que sea continua en $\mathbb{R}$ se debe verificar que:

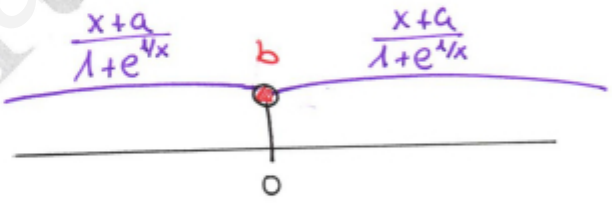
$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ a+2b = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

$\Rightarrow$ Si $a = 1$ y $b = 5 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

(53) Estudia la continuidad de la siguiente función según los valores de los números reales "a" y "b":

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+a}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+a}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$$




Si $x \neq 0 \rightarrow f(x) = \dfrac{x+a}{1+e^{1/x}} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ ↑ NO AFECTA

Si $x = 0$

$f(0) = b$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x+a}{1+e^{1/x}} = \left[\frac{a}{1+e^{(1/0)}}\right] = (*) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0}\right] \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{cases}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x+a}{1+e^{1/x}} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{x+a}{1+e^{1/x}} = \left[\frac{a}{1+e^{-\infty}}\right] = a \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x+a}{1+e^{1/x}} = \left[\frac{a}{1+e^{\infty}}\right] = \left[\frac{a}{\infty}\right] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Si } a=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Es decir:

Si $a=0$ $\begin{cases} b=0 \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=0 \text{ y en } \mathbb{R}. \\ b\neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0) \rightarrow \text{Discontinuidad EVITABLE en } x=0 \end{cases}$

Si $a\neq 0 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x) \rightarrow$ Discontinuidad de SALTO FINITO en $x=0$ $\forall b \in \mathbb{R}$.

(54) Estudia la continuidad de las siguientes funciones según los valores del número real "a":

a) $f(x) = \begin{cases} 2 + a\cdot \ln(x) & \text{si } x>1 \\ 3 - ax & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x\leq -2 \\ x^2-3x+a & \text{si } x>-2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3a^x & \text{si } x\leq 2 \\ \frac{12}{x-1} & \text{si } x>2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2+a\cos x & \text{si } x\leq 0 \\ 2^{-x}+6x-3 & \text{si } x>0 \end{cases}$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

f) $f(x) = \begin{cases} \cos(x-4) & \text{si } x \le 4 \\ 2^{x-2a} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & \text{si } x \le a \\ 5 & \text{si } x > a \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} |-1+2x| & \text{si } x < 3 \\ a^x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} |3x-4| & \text{si } x < 2 \\ a^x - x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

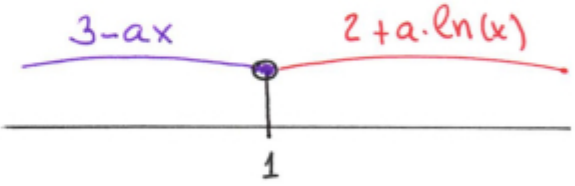
j) $f(x) = \begin{cases} |4-5x| & \text{si } x < 1 \\ |a-2| & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} |x-4| & \text{si } x < a \\ x^2-6x+8 & \text{si } x \ge a \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} \text{sen}^2 x & \text{si } x \le a \\ x - \cos^2 x & \text{si } x > a \end{cases}$

m) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} 2 + a\cdot\ln(x) & \text{si } x > 1 \\ 3 - ax & \text{si } x \le 1 \end{cases}$




Si $x < 1$ $\Rightarrow f(x) = 3 - ax \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 1)$

Si $x > 1$ $\Rightarrow f(x) = 2 + a\cdot\ln(x) \Rightarrow$ Continua en $(0, +\infty)$

$\hookrightarrow$ Continua en $(1, +\infty)$

JuanBertomeu



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = 1$

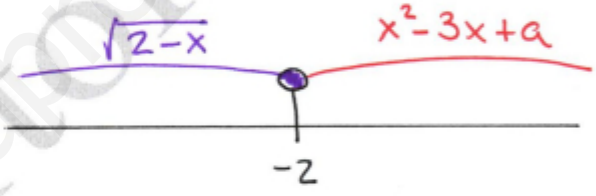
$f(1) = 3 - a \cdot 1 = 3 - a$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} (3 - ax) = 3 - a \\ \lim_{x \to 1^+} (2 + a \cdot \ln(x)) = 2 \end{array} \right\} \quad 3 - a = 2 \Rightarrow a = 1$$

Si $a = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow$ Continua en $x = 1$, y por tanto en $\mathbb{R}$.

Si $a \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de SALTO FINITO en $x = 1$

b) $$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{2-x} & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 3x + a & \text{si } x > -2 \end{array} \right.$$




Si $x < -2 \longrightarrow f(x) = \sqrt{2-x} \Rightarrow$ Continua en $(-\infty, 2]$

↳ Continua en $(-\infty, -2)$

Si $x > -2 \longrightarrow f(x) = x^2 - 3x + a \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-2, +\infty)$

Si $x = -2$

$f(-2) = \sqrt{2-(-2)} = 2$

$$\lim_{x \to -2} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to -2^-} \sqrt{2-x} = 2 \\ \lim_{x \to -2^+} (x^2 - 3x + a) = 10 + a \end{array} \right\} \quad 10 + a = 2 \Rightarrow a = -8$$

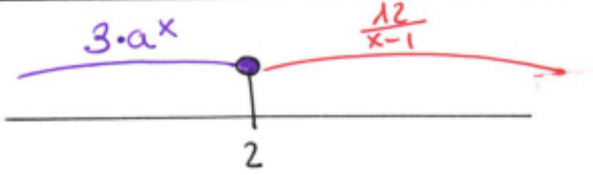
$\Rightarrow$ Si $a = -8 \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = -2$ y por tanto en $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Si $a \neq -8 \Rightarrow$ Discontinuidad de SALTO FINITO en $x = -2$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

c) $f(x) = \begin{cases} 3\cdot a^x & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{12}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$




Si $x<2$ → $f(x) = 3\cdot a^x$ → Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, 2)$

Si $x>2$ → $f(x) = \dfrac{12}{x-1}$ → Continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ (NO AFECTA)

↳ Continua en $(2, +\infty)$

Si $x = 2$

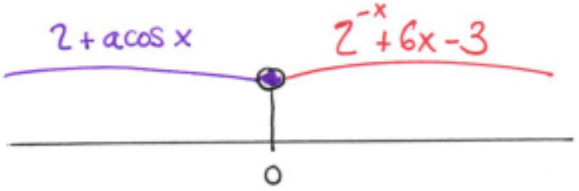
$f(2) = 3a^2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \to \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} 3a^x = 3a^2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{12}{x-1} = 12 \end{cases} \Rightarrow 3a^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 4 \begin{cases} a = -2 \\ a = +2 \end{cases}$$

Si $a = -2$ o $a = 2$ ⇒ Continua en $x=2$ y por tanto en $\mathbb{R}$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ ⇒ $\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ⇒ Discontinuidad de SALTO FINITO en $x=2$

d) $f(x) = \begin{cases} 2 + a\cos x & \text{si } x \le 0 \\ 2^{-x} + 6x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$






©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x<0$ $\rightarrow f(x) = 2+a\cdot\cos x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 0)$

Si $x>0$ $\rightarrow f(x) = 2^{-x}+6x-3 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(0, +\infty)$

Si $x=0$

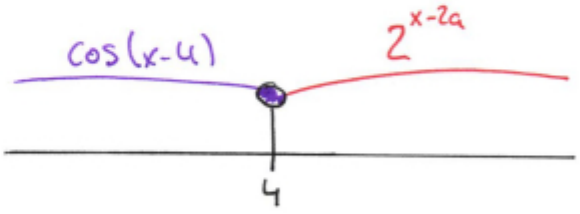
$f(0) = 2+a\cdot\cos 0 = 2+a$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}(2+a\cos x) = 2+a \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(2^{-x}+6x-3) = -2 \end{cases} \quad 2+a=-2 \Rightarrow a=-4$$

Si $a=-4 \Rightarrow$ Continua en $x=0$ y por tanto en $\mathbb{R}$

Si $a\neq -4 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de SALTO FINITO en $x=0$

f) $$f(x) = \begin{cases} \cos(x-4) & \text{si } x\leq 4 \\ 2^{x-2a} & \text{si } x>4 \end{cases}$$




Si $x<4 \rightarrow f(x) = \cos(x-4) \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, 4)$

Si $x>4 \rightarrow f(x) = 2^{x-2a} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(4, +\infty)$

WuangBertoomeu



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = 4$

$f(4) = \cos(4-4) = \cos 0 = 1$

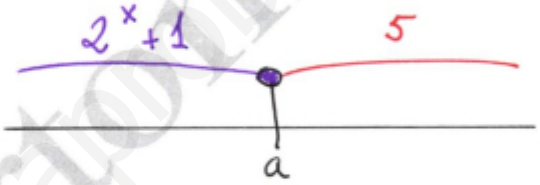
$$\lim_{x\to 4} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} \cos(x-4) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} 2^{x-2a} = 2^{4-2a} \end{cases} \quad 2^{4-2a} = 1 \Rightarrow 2^{4-2a} = 2^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-2a = 0 \Rightarrow a = 2$$

Si $a = 2 \Rightarrow$ Continua en $x = 4$ y por tanto en $\mathbb{R}$

Si $a \neq 2 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 4} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de salto finito en $x = 4$

g) $$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & \text{si } x \leq a \\ 5 & \text{si } x > a \end{cases}$$




Si $x < a \rightarrow f(x) = 2^x + 1 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, a)$

Si $x > a \rightarrow f(x) = 5 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(a, +\infty)$

Si $x = a$

$f(a) = 2^a + 1$

$$\lim_{x\to a} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} (2^x + 1) = 2^a + 1 \\ \lim\limits_{x\to a^+} 5 = 5 \end{cases} \quad 2^a + 1 = 5 \Rightarrow 2^a = 4 \Rightarrow 2^a = 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 2$$

Si $a = 2 \Rightarrow$ Continua en $x = 2$ y por tanto en $\mathbb{R}$

Si $a \neq 2 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de salto finito en $x = a$

Juan Bertomeu Ferrer



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

**Si $x = 2$**

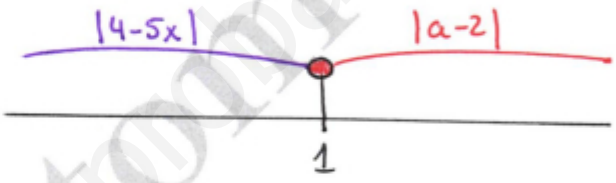
$$f(2) = a^2 - 2$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} |3x-4| = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} a^x - x = a^2 - 2 \end{array} \right\} \; a^2 - 2 = 2 \Rightarrow a^2 = 4 \begin{array}{l} \nearrow a = -2 \\ \searrow a = +2 \end{array}$$

Si $a = -2$ o $a = +2 \Rightarrow$ Continua en $x = 2$ y por tanto en $\mathbb{R}$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 2 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de SALTO FINITO en $x = 2$

j) $$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} |4-5x| & \text{si } x < 1 \\ |a-2| & \text{si } x \geq 1 \end{array} \right.$$




**Si $x < 1$** $\longrightarrow f(x) = |4-5x| \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, 1)$

**Si $x > 1$** $\longrightarrow f(x) = |a-2| \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(1, +\infty)$

**Si $x = 1$**

$$f(1) = |a-2|$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} |4-5x| = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} |a-2| = |a-2| \end{array} \right\} \; |a-2| = 1 \Rightarrow a - 2 = \pm 1$$

$\rightarrow a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3$

$\rightarrow a - 2 = -1 \Rightarrow a = 1$

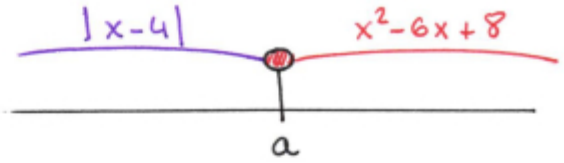
Si $a = 1$ o $a = 3 \Rightarrow$ Continua en $x = 1$ y por tanto en $\mathbb{R}$

Si $a \neq 1$ y $a \neq 3 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de salto finito en $x = 1$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

k) $f(x) = \begin{cases} |x-4| & \text{si } x < a \\ x^2-6x+8 & \text{si } x \geq a \end{cases}$




Si $x<a$ → $f(x) = |x-4|$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, a)$

Si $x>a$ → $f(x) = x^2-6x+8$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(a, +\infty)$

Si $x=a$

$f(a) = a^2-6a+8$

$\lim_{x\to a} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to a^-} |x-4| = |a-4| \\ \lim_{x\to a^+} (x^2-6x+8) = a^2-6a+8 \end{cases} \Big\} \; |a-4| = a^2-6a+8 \Rightarrow$

$\Rightarrow a-4 = \pm(a^2-6a+8)$

↳ $a-4 = a^2-6a+8 \Rightarrow a^2-7a+12=0 \begin{cases} a=3 \\ a=4 \end{cases}$

↳ $a-4 = -a^2+6a-8 \Rightarrow a^2-5a+4=0 \begin{cases} a=1 \\ a=4 \end{cases}$

Si $a=1$ o $a=3$ o $a=4$ ⇒ Continua en $x=a$, y por tanto en $\mathbb{R}$

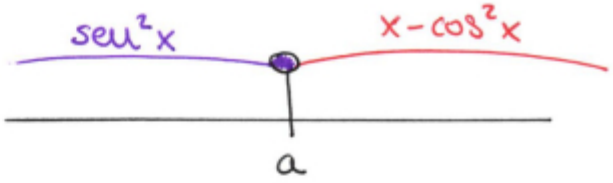
Si $a\neq 1$ y $a\neq 3$ y $a\neq 4$ ⇒ $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ ⇒ Discontinuidad de salto finito en $x=a$

Juan Bertomeu



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

l) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x & \text{si } x \le a \\ x - \cos^2 x & \text{si } x > a \end{cases}$




Si $x < a$ → $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, a)$

Si $x > a$ → $f(x) = x - \cos^2 x$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(a, +\infty)$

Si $x = a$

$f(a) = \operatorname{sen}^2(a)$

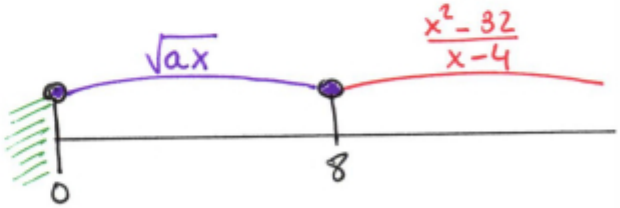
$\lim_{x \to a} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to a^-} \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2(a) \\ \lim_{x \to a^+} (x - \cos^2 x) = a - \cos^2(a) \end{cases}$ $\operatorname{sen}^2(a) = a - \cos^2(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \cos^2(a) = a - \cos^2(a) \Rightarrow a = 1$

Si $a = 1$ ⇒ Continua en $x = 1$ y por tanto en $\mathbb{R}$

Si $a \neq 1$ ⇒ $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$ ⇒ Discontinuidad de SALTO FINITO en $x = a$

m) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$




Si $0 \le x < 8$ → $f(x) = \sqrt{ax}$ ⇒ Continua en $[0, +\infty)$ si $a > 0$

↳ Continua en $[0, 8)$ si $a \ge 0$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x > 8 \rightarrow f(x) = \dfrac{x^2-32}{x-4} \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} - \{4\}$ ↑ NO AFECTA

↳ Continua en $(8, +\infty)$

Si $x = 8$

$f(8) = \sqrt{a \cdot 8} = 2\sqrt{2a}$

$$\lim_{x \to 8} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 8^-} \sqrt{ax} = 2\sqrt{2a} \\ \lim\limits_{x \to 8^+} \dfrac{x^2-32}{x-4} = \dfrac{32}{4} = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2a} = 8 \Rightarrow \sqrt{2a} = 4 \\ \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8 \end{cases}$$

Si $a = 8 \Rightarrow$ Continua en $x = 8$ y por tanto en $[0, +\infty)$

Si $a \in [0,8) \cup (8, +\infty) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 8} f(x) \Rightarrow$ Discontinuidad de salto finito en $x = 8$

Si $a < 0 \Rightarrow \nexists f(x)$ en $(0,8]$ y $f(x)$ es continua en $(8, +\infty)$

**(55)** Estudia la continuidad de las siguientes funciones en función de los parámetros "a" y "b".

a) $$f(x) = \begin{cases} a - x + 3 & \text{si } x \leq -2 \\ ax + b & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ \dfrac{2}{2-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ bx^2 + 5 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2\sqrt{x+3} + a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

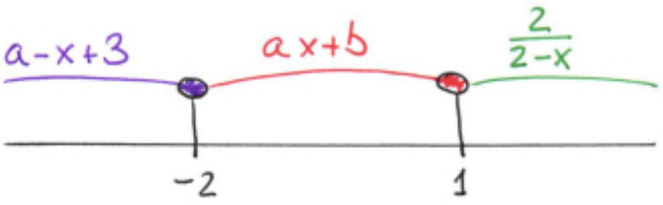
c) $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ a \operatorname{sen} x + b & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ (x-\pi)^2 + a & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

d) $$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax^2 + bx & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 2^x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

a) $f(x) = \begin{cases} a-x+3 & \text{si } x \leq -2 \\ ax+b & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ \dfrac{2}{2-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$




Si $x < -2$ → $f(x) = a-x+3$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, -2)$

Si $-2 < x < 1$ → $f(x) = ax+b$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-2, 1)$

Si $x > 1$ → $f(x) = \dfrac{2}{2-x}$ ⇒ Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$ ↑ SI QUE AFECTA

↳ Continua en $(1,2) \cup (2, +\infty)$

$f(x)$ presenta una discontinuidad en $x = 2$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2}{2-x} = \left[\frac{2}{0}\right] \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2}{2-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2}{2-x} = -\infty \end{cases}$$

$x = 2$ es una discontinuidad de SALTO INFINITO

Si $x = -2$

$f(-2) = a-(-2)+3 = a+5$

$$\lim_{x \to -2} f(x) \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} (a-x+3) = a+5 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} (ax+b) = -2a+b \end{cases} \quad a+5 = -2a+b \Rightarrow \quad -3a+b = 5$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = 1$

$f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} (ax+b) = a+b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{2-x} = 2 \end{array} \right\} \quad a+b = 2$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} -3a+b = 5 \\ a+b = 2 \end{array} \right\} E_2 - E_1 \longrightarrow 4a = -3 \Rightarrow a = \frac{-3}{4} \Rightarrow b = \frac{11}{4}$$

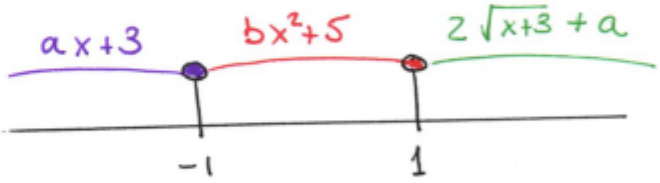
Si $a = \frac{-3}{4}$ y $b = \frac{11}{4}$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

Si $-3a+b = 5$ y $a+b \neq 2$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$

Si $-3a+b \neq 5$ y $a+b = 2$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Si $-3a+b \neq 5$ y $a+b \neq 2$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1, -2, 2\}$

b) $$f(x) = \begin{cases} ax+3 & \text{si } x \leq -1 \\ bx^2+5 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2\sqrt{x+3} + a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$




Si $x < -1$ $\longrightarrow$ $f(x) = ax+3$ $\Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-\infty, -1)$

Si $-1 < x < 1$ $\longrightarrow$ $f(x) = bx^2+5$ $\Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(-1, 1)$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x > 1 \longrightarrow f(x) = 2\sqrt{x+3} + a \Rightarrow$ Continua en $[-3, +\infty)$

$\hookrightarrow$ Continua $(1, +\infty)$

Si $x = -1$

$f(-1) = a \cdot (-1) + 3 = 3 - a$

$$\lim_{x \to -1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} (ax+3) = 3-a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (bx^2+5) = b+5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3-a = b+5 \Rightarrow \\ \Rightarrow a+b = -2 \end{array}$$

Si $x = 1$

$f(1) = b \cdot 1 + 5 = b + 5$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} bx^2+5 = b+5 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 2\sqrt{x+3} + a = a+4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a+4 = b+5 \Rightarrow \\ \Rightarrow a-b = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+b = -2 \\ a-b = 1 \end{array} \right\} E_1 + E_2 \longrightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{2} \Rightarrow b = \frac{-3}{2}$$

Si $a = \frac{-1}{2}$ y $b = \frac{-3}{2} \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

Si $a+b = -2$ y $a-b \neq 1 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

Si $a+b \neq -2$ y $a-b = 1 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

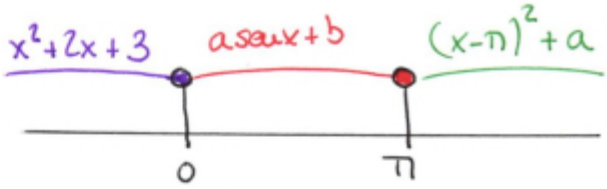
Si $a+b \neq -2$ y $a-b \neq 1 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

www.JuanBertomeu.net



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

c) $$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3 & \text{si } x\le 0 \\ a\cdot \operatorname{sen} x+b & \text{si } 0<x\le \pi \\ (x-\pi)^2+a & \text{si } x>\pi \end{cases}$$




Si $x<0$ → $f(x)=x^2+2x+3$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty,0)$

Si $0<x<\pi$ → $f(x)=a\operatorname{sen}x+b$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(0,\pi)$

Si $x>\pi$ → $f(x)=(x-\pi)^2+a$ ⇒ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(\pi,+\infty)$

Si $x=0$

$f(0)=0^2+2\cdot 0+3=3$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+2x+3)=3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(a\operatorname{sen}x+b)=b \end{array} \right\} \quad b=3$$

Si $x=\pi$

$f(\pi)=a\cdot\operatorname{sen}(\pi)+b=b$

$$\lim_{x\to \pi} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \pi^-}(a\operatorname{sen}x+b)=b \\ \lim\limits_{x\to \pi^+}(x-\pi)^2+a=a \end{array} \right\} \quad a=b$$

Juan Bertomeu



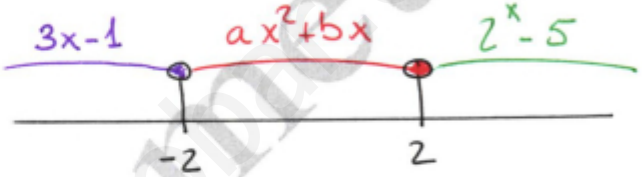
©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Por tanto

Si $b = 3$
- $a = 3 \rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$
- $a \neq 3 \rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{\pi\}$

Si $b \neq 3$
- $a = b \rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$
- $a \neq b \rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0, \pi\}$

d) $$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax^2 + bx & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 2^x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$




Si $x < -2 \rightarrow f(x) = 3x - 1 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-\infty, -2)$

Si $-2 < x < 2 \rightarrow f(x) = ax^2 + bx \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(-2, 2)$

Si $x > 2 \rightarrow f(x) = 2^x - 5 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

↳ Continua en $(2, +\infty)$

Si $x = -2$

$f(-2) = 3 \cdot (-2) - 1 = -7$

$$\lim_{x \to -2} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to -2^-} (3x - 1) = -7 \\ \lim_{x \to -2^+} (ax^2 + bx) = 4a - 2b \end{array} \right\} \; 4a - 2b = -7$$

www.JuanBertoomeu.cat



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Si $x = 2$

$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 = 4a + 2b$

$$\lim_{x \to 2} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} ax^2 + bx = 4a + 2b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} 2^x - 5 = -1 \end{array} \right\} \; 4a + 2b = -1$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4a - 2b = -7 \\ 4a + 2b = -1 \end{array} \right\} E_1 + E_2 \longrightarrow 8a = -8 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

Si $a = -1$ y $b = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

Si $4a - 2b = -7$ y $4a + 2b \neq -1 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

Si $4a - 2b \neq -7$ y $4a + 2b = -1 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$

Si $4a - 2b \neq -7$ y $4a + 2b \neq -1 \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

(56) Estudia y clasifica las discontinuidades que presenta la función $f(x) = \dfrac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$ según los valores de "m".

$$f(x) = \frac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9} \; ; \; x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \left\{ \begin{array}{l} x = -3 \\ x = +3 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

$f(x)$ presenta discontinuidades en $x = -3$ y en $x = 3$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+mx^2+9}{x^2-9}=\left[\frac{9m-18}{0}\right] \quad 9m-18=0 \Rightarrow m=2$$

↳ Si $m=2$:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+2x^2+9}{x^2-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=(*)$$

| | 1 | 2 | 0 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| -3 | | -3 | 3 | -9 |
| | 1 | -1 | 3 | 0 |

| | 1 | 0 | -9 |
|---|---|---|---|
| -3 | | -3 | +9 |
| | 1 | -3 | 0 |

$$(*)=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2-x+3)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-x+3}{x-3}=-\frac{15}{6}$$

$\Rightarrow x=-3$ es discontinuidad EVITABLE

↳ Si $m\neq 2$:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+mx^2+9}{x^2-9}=\left[\frac{9m-18}{0}\right] \Rightarrow x=-3 \text{ es discontinuidad de SALTO INFINITO}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3+mx^2+9}{x^2-9}=\left[\frac{9m+36}{0}\right] \quad 9m+36=0 \Rightarrow m=-4$$

↳ Si $m=-4$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2+9}{x^2-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=(*)$$

| | 1 | -4 | 0 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | | 3 | -3 | -9 |
| | 1 | -1 | -3 | 0 |

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2-x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-3}{x+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow x=3$ es discontinuidad EVITABLE

↳ Si $m\neq -4$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3+mx^2+9}{x^2-9}=\left[\frac{9m+36}{0}\right] \Rightarrow x=3 \text{ es discontinuidad de SALTO INFINITO}$$

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

En resumen:

Si $m \neq -4$ y $m \neq 2$ $\Rightarrow$ Discontinuidades de salto infinito en $x=-3$ y en $x=3$

Si $m=2$ $\Rightarrow$ Discontinuidad evitable en $x=-3$ y de salto infinito en $x=3$

Si $m=4$ $\Rightarrow$ Discontinuidad de salto infinito en $x=-3$ y evitable en $x=3$.

(57) Estudia la continuidad de la función real de variable real $f(x) = \dfrac{x^m+1}{x^m-1}$ donde "m" es un entero positivo.

$f(x) = \dfrac{x^m+1}{x^m-1}$ ; $x^m-1=0 \Rightarrow x^m=1$

$\Rightarrow$ Si m es par:

$x^m = 1 \begin{cases} \nearrow x=-1 \\ \searrow x=+1 \end{cases} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f(x)$ presentará discontinuidades en $x=-1$ y en $x=1$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^m+1}{x^m-1} = \left[\dfrac{2}{0}\right] \Rightarrow x=-1$ discontinuidad de salto infinito

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m+1}{x^m-1} = \left[\dfrac{2}{0}\right] \Rightarrow x=1$ discontinuidad de salto infinito



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$\Rightarrow$ Si m es impar:

$x^m = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{1\}$

$f(x)$ presentará una discontinuidad en $x = 1$

$\lim_{x \to 1} \frac{x^m + 1}{x^m - 1} = \left[\frac{2}{0}\right] \Rightarrow x = 1$ discontinuidad de salto infinito.

(58) Demuestra que la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $(1,2)$

La función $f(x) = x^3 - 3x - 1$ es continua en $\mathbb{R}$, y por tanto también lo será en el intervalo $[1,2]$

Además:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 - 1 = -3 \\ f(2) = 2^3 - 3\cdot 2 - 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)\cdot f(2) < 0$$

Por el TEOREMA DE BOLZANO, podemos asegurar que existe al menos un punto $c \in (1,2)$ tal que $f(c) = 0$

$\Rightarrow x^3 - 3x - 1 = 0$ en $c \in (1,2)$ como queríamos demostrar.

Juan Bertomeu Ferrer



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(59) Dada la función $f(x) = \sqrt{x} + \ln(x) - 2$, demuestra que existe "a" tal que $(a,0)$ es un punto de la función.

Si $(a,0)$ es un punto de la función entonces $f(a) = 0$

La función $f(a) = \sqrt{a} + \ln(a) - 2$ es continua $\forall a \in (0,+\infty)$

Busquemos un intervalo en que $f(a)$ cambie de signo:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = \sqrt{1} + \ln(1) - 2 = -1 \\ f(2) = \sqrt{2} + \ln(2) - 2 = 0'1074 \end{array}\right\} \; f(1)\cdot f(2) < 0$$

Acabamos de ver que al ser continua $f(a)$ en $(0,+\infty)$ lo será también en $[1,2]$. En ese intervalo, $f(a)$ cambia de signo y, por el TEOREMA DE BOLZANO, existirá un punto $a \in (1,2)$ tal que $f(a) = 0$, como queríamos demostrar.

(60) Prueba que la función $f(x) = x^2 - 1 - \sqrt{x}$ corta al menos en un punto al eje OX. Sitúa ese punto en un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$.

La función $f(x) = x^2 - 1 - \sqrt{x}$ es continua $\forall x \in [0,+\infty)$

Busquemos un intervalo en que $f(x)$ cambie de signo:



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

$f(0) = 0^2 - 1 - \sqrt{0} = -1$

$f(1) = 1^2 - 1 - \sqrt{1} = -1$

$f(2) = 2^2 - 1 - \sqrt{2} = 1'586$

$\Big\}\ f(1)\cdot f(2) < 0 \Rightarrow \exists\, x \in (1,2) / f(x) = 0$

↑ Bolzano

$f(1'5) = 1'5^2 - 1 - \sqrt{1'5} = 0'02 \Rightarrow \exists\, x \in (1, 1'5) / f(x) = 0$

$f(1'25) = 1'25^2 - 1 - \sqrt{1'25} = -0'56 \Rightarrow \exists x \in (1'25, 1'5) / f(x) = 0$

$f(x)$ corta al eje X ($f(x)=0$) en algún punto $x \in (1'25, 1'5)$ como queríamos demostrar.

(61) Dadas las funciones $f(x) = 2\operatorname{sen} x$ y $g(x) = -3x+1$, demostrar que se cortan al menos en un punto.

Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan cuando $f(x) = g(x)$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen}(x) = -3x+1 \Rightarrow 2\operatorname{sen}(x) + 3x - 1 = 0$

Sea $h(x) = 2\operatorname{sen}(x) + 3x - 1$. La función $h(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

Busquemos un intervalo en que $h(x)$ cambie de signo

$h(0) = 2\operatorname{sen}(0) + 3\cdot 0 - 1 = -1$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\cdot\frac{\pi}{2} - 1 = 1 + \frac{3\pi}{2} \approx 5'71$

$\Big\}\ h(0)\cdot h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0.$

$\Rightarrow$ La función $h(x)$ es continua en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y en ese intervalo cambia de signo, por lo que, por el teorema de Bolzano, $h(x) = 0$ en algún $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Como $h(x)$ es $h(x) = f(x) - g(x)$, si $h(x) = 0$, entonces

$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow f(x)$ y $g(x)$ se cortan en algún $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ como queríamos demostrar.

(62) Calcula de forma aproximada una solución positiva para la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ con tres decimales.

$f(x) = x^3 + x - 1$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

Busquemos un intervalo en que $f(x)$ cambie de signo:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0^3 + 0 - 1 = -1 \\ f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1 \end{array}\right\} f(0)\cdot f(1) < 0 \Rightarrow \exists\, x \in (0,1) \,/\, f(x) = 0$$

↑ Bolzano

$f(0'5) = 0'5^3 + 0'5 - 1 = -0'375 \Rightarrow \exists\, x \in (0'5, 1) \,/\, f(x) = 0$

$f(0'6) = -0'184 \Rightarrow \exists\, x \in (0'6, 1) \,/\, f(x) = 0$

$f(0'7) = 0'043 \Rightarrow \exists\, x \in (0'6, 0'7) \,/\, f(x) = 0$

$f(0'68) = -0'005 \Rightarrow \exists\, x \in (0'68, 0'7) \,/\, f(x) = 0$

$f(0'69) = 0'018 \Rightarrow \exists\, x \in (0'68, 0'69) \,/\, f(x) = 0$

$f(0'685) = 0'006 \Rightarrow \exists\, x \in (0'68, 0'685) \,/\, f(x) = 0$

$f(0'682) = -0'0007 \Rightarrow \exists\, x \in (0'682, 0'685) \,/\, f(x) = 0$

$\Rightarrow x = 0'682$ es una solución APROXIMADA de $x^3 + x - 1 = 0$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(63) Demuestra que si una función es continua en el intervalo $[a,b]$ y existe un número $K$ tal que $f(b)<K<f(a)$, entonces existe un número $c \in (a,b) / f(c)=K$

Queremos demostrar que $f(x)=K$ en $x \in (a,b)$

Sea $g(x)$ la función $g(x)=f(x)-K$. Como $f(x)$ es continua en $[a,b]$, por el álgebra de funciones continuas, $g(x)$ también será continua en $[a,b]$. Veamos que ocurre con su signo:

$g(x)=f(x)-K$, continua en $[a,b]$

$g(a)=f(a)-K \Rightarrow$ Como $K<f(a) \Rightarrow f(a)-K>0 \Rightarrow g(a)>0$

$g(b)=f(b)-K \Rightarrow$ Como $f(b)<K \Rightarrow f(b)-K<0 \Rightarrow g(b)<0$

$\Rightarrow$ Como $g(a)\cdot g(b)<0 \Longrightarrow g(x)=0$ en $x \in (a,b)$ (Bolzano)

$\Rightarrow g(x)=0 \Rightarrow f(x)-K=0 \Rightarrow f(x)=K$ en $x \in (a,b)$

como queríamos demostrar.

Nota: → Este ejercicio resulta ser la demostración del TEOREMA DE DARBOUX de los valores intermedios que no vemos en profundidad ya que siempre podremos aplicar el teorema de Bolzano.



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

(64) La función $f(x)$ proporciona los ingresos en miles de euros que se generan en #BertoBlog transcurridos "x" años:

$$f(x) = -2x^2+10x$$

Justificar que durante los 4 primeros años, en algún momento se llegaron a ingresar 10000 €.

$f(x) = -2x^2+10x$ ; $f(x)$ en miles de euros y $x$ en años ($x>0$!!)

Tenemos que justificar que algún momento $x \in (0,4)$ se tuvo $f(x) = 10$

$\Rightarrow -2x^2+10x = 10 \Rightarrow -2x^2+10x-10 = 0$

Sea $g(x) = -2x^2+10x-10$. La función $g(x)$ es continua $\forall x \in [0,+\infty)$ y por tanto, también lo será en $[0,4]$.

Además:

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = -10 \\ g(1) = -2 \\ g(2) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow g(1)\cdot g(2) < 0 \xRightarrow{\text{Bolzano}} \exists\, x \in (1,2) \,/\, g(x) = 0$$

Como $g(x) = f(x) - 10$, si $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) - 10 = 0 \Rightarrow f(x) = 10$

$\Rightarrow f(x) = 10$ en algún $x \in (1,2)$, como queríamos demostrar



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

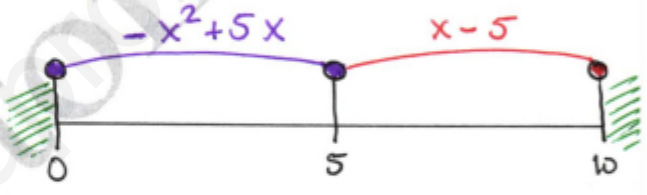
(65) Estudia la continuidad y haz una representación gráfica de las funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2+5x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ x-5 & \text{si } 5 < x \le 10 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2-2x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x-x^2 & \text{si } x \le 3 \\ x-3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 1 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2+5x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ x-5 & \text{si } 5 < x \le 10 \end{cases}$




Si $0 \le x < 5$ $\rightarrow f(x) = -x^2+5x \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $[0,5)$

Si $5 < x \le 10$ $\rightarrow f(x) = x-5 \Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Continua en $(5,10]$

Si $x = 5$

$f(5) = -5^2+5\cdot 5 = 0$

$$\lim_{x\to 5} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 5^-} (-x^2+5x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} (x-5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 5} f(x) = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ es continua en $x=5$, y por tanto en $[0,10]$

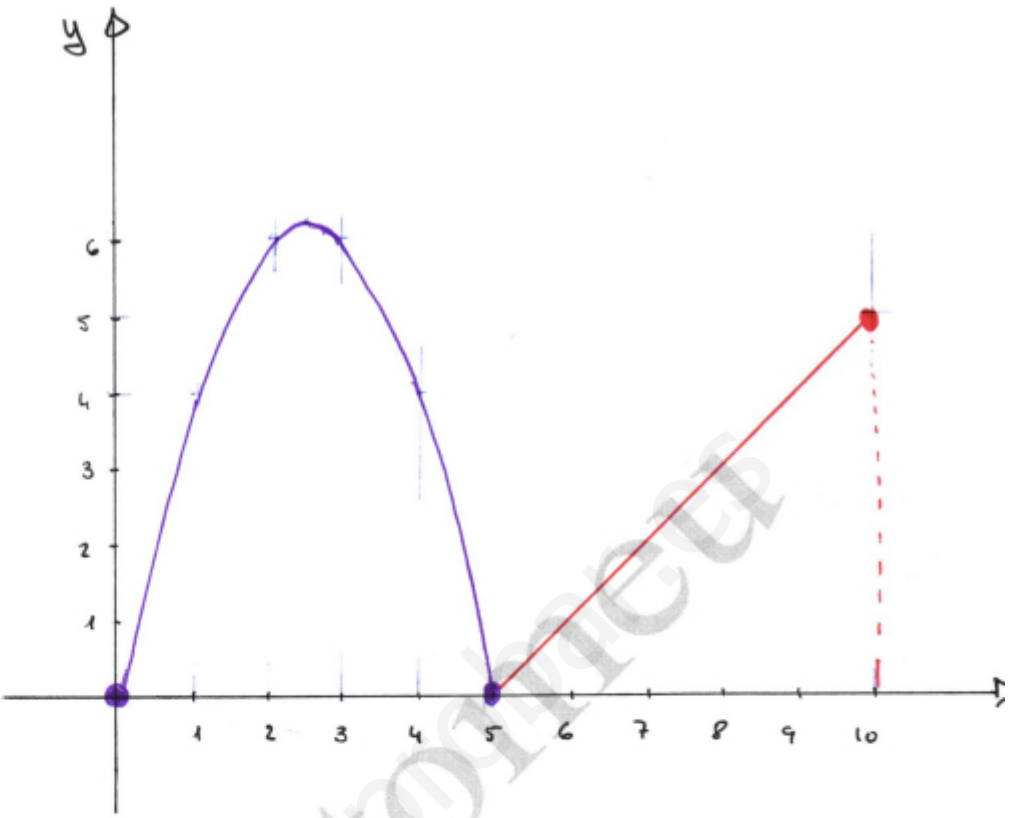
Para representar, basta con hacer una tabla de valores.



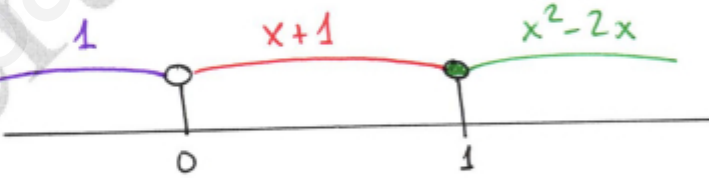
©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

| $x$ | $f(x)=-x^2+5x$ | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | SI |
| 1 | 4 | |
| 2 | 6 | |
| 3 | 6 | |
| 4 | 4 | |
| 5 | 0 | SI |

| $x$ | $f(x)=x-5$ | |
|---|---|---|
| 5 | 0 | NO |
| 10 | 5 | SI |




b) $$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } 0<x<1 \\ x^2-2x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$




Si $x<0$ → $f(x)=1$ ⇒ Continua en $(-\infty,0)$

Si $0<x<1$ → $f(x)=x+1$ ⇒ Continua en $(0,1)$

Si $x>1$ → $f(x)=x^2-2x$ ⇒ Continua en $(1,+\infty)$

Si $x=0$:

$\nexists f(0)$ ; $\lim_{x\to 0} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} 1 = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

⇒ $x=0$ es una discontinuidad EVITABLE.

Si $x=1$

$f(1)=1-2=-1$ ; $\lim_{x\to 1} f(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} (x^2-2x) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$

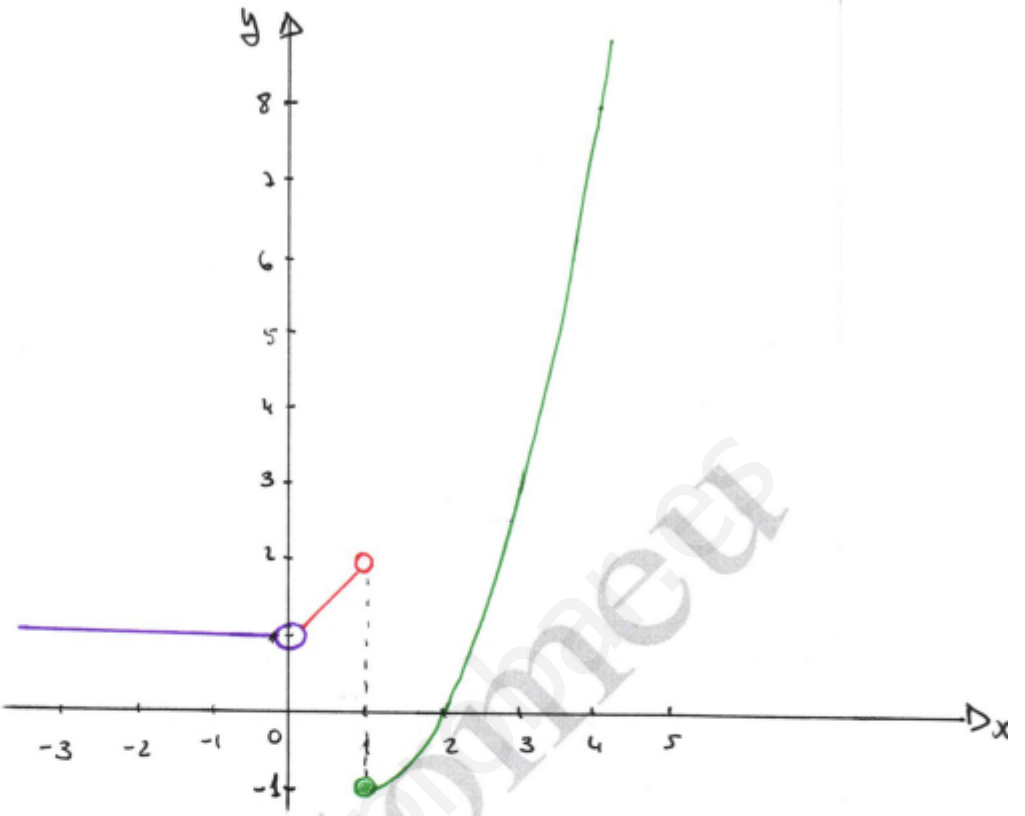
⇒ $x=1$ discontinuidad de salto finito.

©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

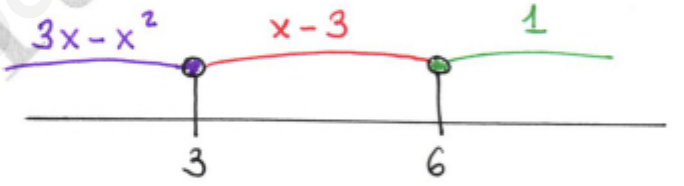
| x | $f(x)=1$ |
|---|---|
| 0 | 1 NO |

| x | $f(x)=x+1$ |
|---|---|
| 0 | 1 NO |
| 1 | 2 NO |

| x | $f(x)=x^2-2x$ |
|---|---|
| 1 | -1 SI |
| 2 | 0 |
| 3 | 3 |
| 4 | 8 |




c) $$f(x)=\begin{cases} 3x-x^2 & \text{si } x\leq 3 \\ x-3 & \text{si } 3<x<6 \\ 1 & \text{si } x\geq 6 \end{cases}$$




Si $x<3$ → $f(x)=3x-x^2$ → Continua en $(-\infty,3)$

Si $3<x<6$ → $f(x)=x-3$ → Continua en $(3,6)$

Si $x>6$ → $f(x)=1$ → Continua en $(6,+\infty)$

Si $x=3$

$f(3)=3\cdot 3-3^2=0$

$$\lim_{x\to 3} f(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-}(3x-x^2)=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+}(x-3)=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x)=0$$

$\Rightarrow f(x)$ es continua en $x=3$



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

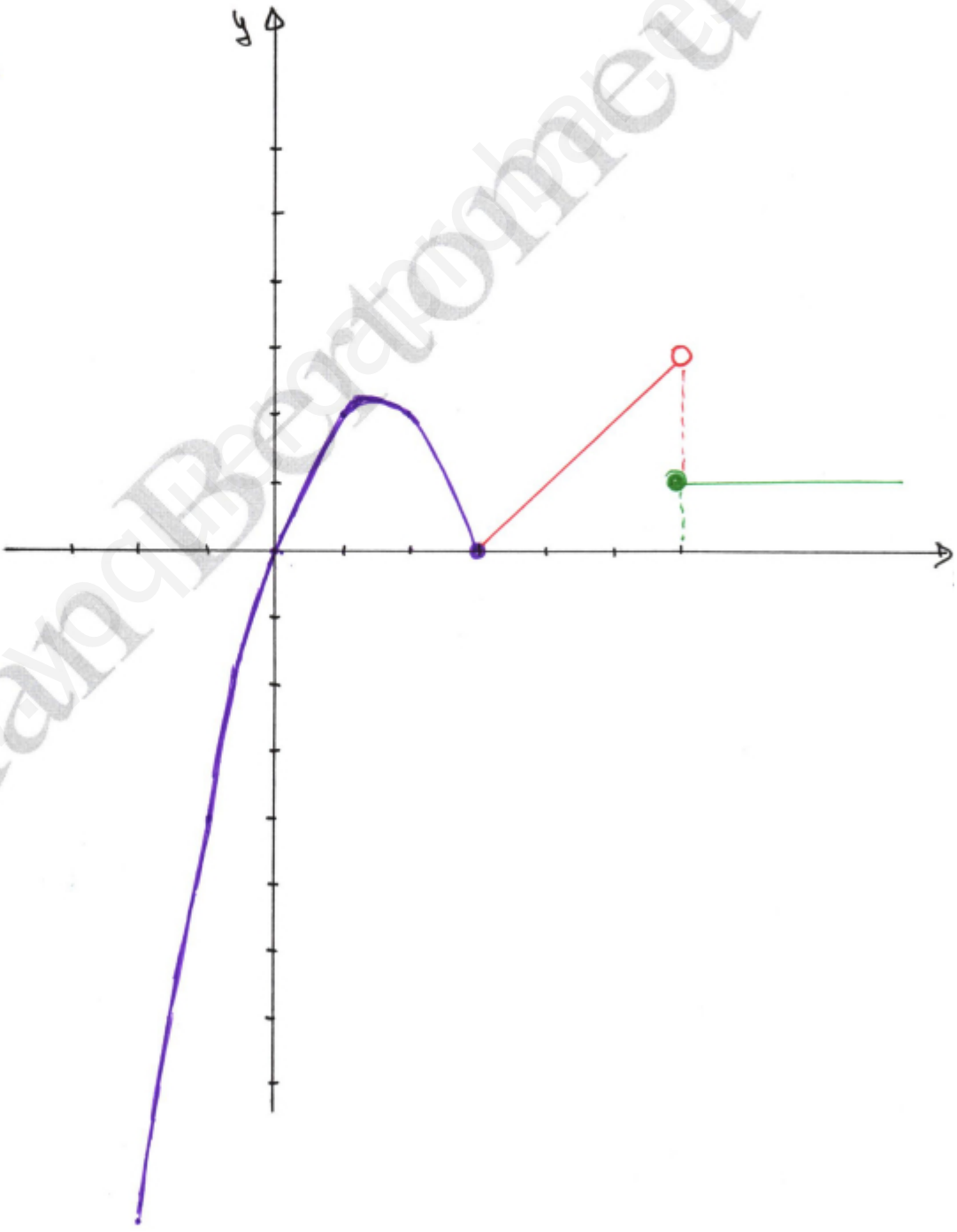
Si $x = 6$

$$f(6) = 1$$

$$\lim_{x \to 6} f(x) \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 6^-} (x-3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 6^+} 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 6} f(x)$$

$\Rightarrow f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 6$

| $x$ | $f(x) = 3x - x^2$ | |
|---|---|---|
| $-3$ | $-39$ | |
| $-2$ | $-10$ | |
| $-1$ | $-4$ | |
| $0$ | $0$ | |
| $1$ | $2$ | |
| $2$ | $2$ | |
| $3$ | $0$ | SI |
| $x$ | $f(x) = x-3$ | |
| $3$ | $0$ | NO |
| $6$ | $3$ | NO |
| $x$ | $f(x) = 6$ | |
| $1$ | $6$ | SI |




©Juan Bertomeu



©Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

www.yoquieroaprobar.es