

① Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 1 \quad b) f(x) = \frac{3}{2-x} \quad c) f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$$

$$d) f(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{x-3}} \quad e) f(x) = \frac{3x-1}{x^3-25x^2} \quad f) f(x) = \frac{1}{(x-5)(x+3)}$$

$$g) f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 12} \quad h) f(x) = \frac{x-8}{\sqrt{x^4-1}} \quad i) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}}$$

$$j) f(x) = \frac{1}{2-2^{1/x}} \quad k) f(x) = \ln(x^2-1) \quad l) f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{4-x}\right)$$

$$m) f(x) = \sqrt[3]{x^2-5} \quad n) f(x) = \sqrt[5]{e^{x^2+5}} \quad o) f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2-4}}$$

$$p) f(x) = e^{x^2+3x} \quad q) f(x) = 5^{\frac{x+1}{3}} \quad r) f(x) = 2^{\frac{x^2-1}{x+3}}$$

$$s) f(x) = \operatorname{sen}(2x+8) \quad t) f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad u) f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

$$v) f(x) = \cos(e^x) \quad w) f(x) = \cos(\ln(x^2-1)) \quad x) f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

$$y) f(x) = \operatorname{tg}(x) \quad z) f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \quad \alpha) f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2-x}\right)$$

$$\beta) f(x) = \frac{x}{\ln x} \quad \gamma) f(x) = \frac{x-2}{\ln x - 4} \quad \delta) f(x) = \frac{5}{\ln(|x-2|)}$$

$$E) f(x) = \frac{x+8}{|x|-3} \quad 5) f(x) = \frac{|x|}{1+|x|} \quad 7) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{9-3^{|x|}}$$

$$a) f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 1 \rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$b) f(x) = \frac{3}{2-x} ; 2-x=0 \Rightarrow x=2 \rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$c) f(x) = \sqrt{x^2-25} ; x^2-25 \geq 0$$

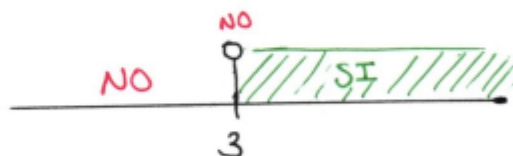
$$x^2-25=0 \begin{cases} x=-5 \\ x=+5 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$$

$$d) f(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{x-3}} ; x-3 > 0$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (3, +\infty)$$

$$e) f(x) = \frac{3x-1}{x^3-25x^2} ; x^3-25x^2=0 \Rightarrow x^2(x-25)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=25 \end{cases}$$

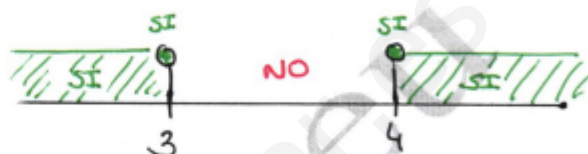
$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0, 25\}$$

$$f) f(x) = \frac{1}{(x-5)(x+3)} ; (x-5) \cdot (x+3) = 0 \begin{cases} \rightarrow x=5 \\ \rightarrow x=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-3, 5\}$$

$$g) f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 12} ; x^2 - 7x + 12 \geq 0$$

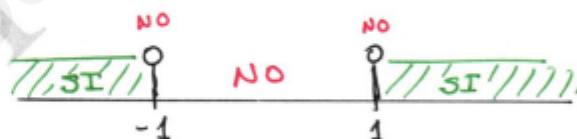
$$x^2 - 7x + 12 = 0 \begin{cases} \rightarrow x=3 \\ \rightarrow x=4 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, 3] \cup [4, +\infty)$$

$$h) f(x) = \frac{x-8}{\sqrt{x^4-1}} ; x^4 - 1 > 0$$

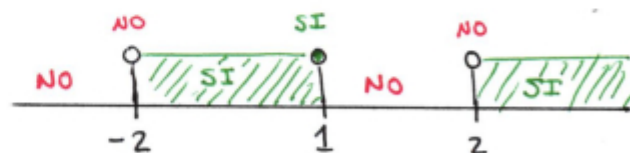
$$x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \begin{cases} \rightarrow x=-1 \\ \rightarrow x=1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$i) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}} ; \frac{x-1}{x^2-4} \geq 0$$

$$\frac{x-1}{x^2-4} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x^2-4=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-2, 1] \cup (2, +\infty)$$

$$j) f(x) = \frac{1}{2 - 2^{1/x}} \begin{array}{l} \nearrow x=0 \\ \searrow 2 - 2^{1/x} = 0 \Rightarrow 2 = 2^{1/x} \Rightarrow 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x=1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$k) f(x) = \ln(x^2 - 1); \quad x^2 - 1 > 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \begin{array}{l} \nearrow x = -1 \\ \searrow x = +1 \end{array}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$l) f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{4-x}\right); \quad \frac{x+1}{4-x} > 0$$

$$\frac{x+1}{4-x} > 0 \rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ 4-x=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-1, 4)$$

$$m) f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5} \rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$n) f(x) = \sqrt[5]{e^{x^2+5}} \rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$o) f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2-4}} \quad ; \quad x^2-4=0 \begin{cases} x=-2 \\ x=+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$$

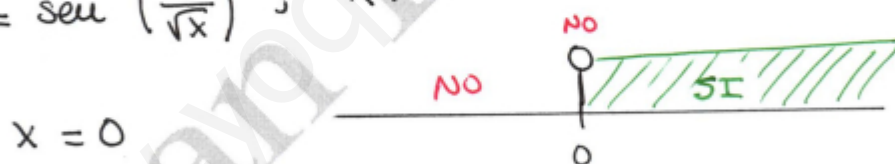
$$p) f(x) = e^{x^2+3x} \rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$q) f(x) = 5^{\frac{x+1}{3}} \rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$r) f(x) = 2^{\frac{x^2-1}{x+3}} \quad ; \quad x+3=0 \Rightarrow x=-3 \rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-3\}$$

$$s) f(x) = \text{sen}(2x+8) \rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$t) f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad ; \quad x > 0$$



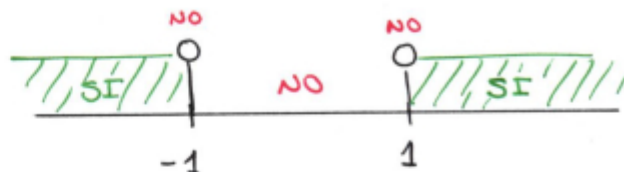
$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (0, +\infty)$$

$$u) f(x) = \text{sen}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \quad ; \quad x-2=0 \Rightarrow x=2 \rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$v) f(x) = \cos(e^x) \rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$w) f(x) = \cos(\ln(x^2-1)) ; x^2-1 > 0$$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \begin{cases} x=-1 \\ x=+1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$x) f(x) = \frac{e^x}{x^2} ; x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$y) f(x) = \text{tg}(x) = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = \arccos(0) \rightarrow \begin{cases} x = \pi/2 + k \cdot 2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$z) f(x) = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = \arccos(0) \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

$$\Rightarrow x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \left\{ \pi + k \cdot 2\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\alpha) f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{3}{2-x} \right) = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{3}{2-x} \right)}{\cos \left(\frac{3}{2-x} \right)}$$

$$2-x=0 \Rightarrow x=2$$

$$\cos \left(\frac{3}{2-x} \right) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2-x} = \arccos(0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2-x} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ \frac{3}{2-x} = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\frac{3}{2-x} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$$

$$\frac{3}{\frac{\pi}{2} + k\pi} = 2-x \Rightarrow x = 2 - \frac{3}{\frac{\pi}{2} + k\pi} = \frac{\pi + k \cdot 2\pi - 3}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi - 3 + k \cdot 2\pi}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \left\{ 2 - \frac{\pi - 3 + k \cdot 2\pi}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\beta) f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

$$\rightarrow x > 0$$

$$\rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Dom}(f(x)) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\gamma) f(x) = \frac{x-2}{\ln x - 4}$$

$$\rightarrow x > 0$$

$$\rightarrow \ln x - 4 = 0 \Rightarrow x = e^4$$

$$\Rightarrow \operatorname{Dom}(f(x)) = (0, e^4) \cup (e^4, +\infty)$$

$$5) f(x) = \frac{5}{\ln(|x-2|)}$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$\ln|x-2|=0 \Rightarrow |x-2|=e^0 \Rightarrow |x-2|=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2 = \pm 1 \quad \begin{cases} \nearrow x-2=1 \Rightarrow x=3 \\ \searrow x-2=-1 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$$

$$6) f(x) = \frac{x+8}{|x|-3} ; |x|-3=0 \Rightarrow |x|=3 \Rightarrow x=\pm 3$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-3, +3\}$$

$$7) f(x) = \frac{|x|}{1+|x|} ; 1+|x|=0 \Rightarrow |x|=-1 \text{ (Absurdo!!)}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$8) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{9-3^{|x|}}$$

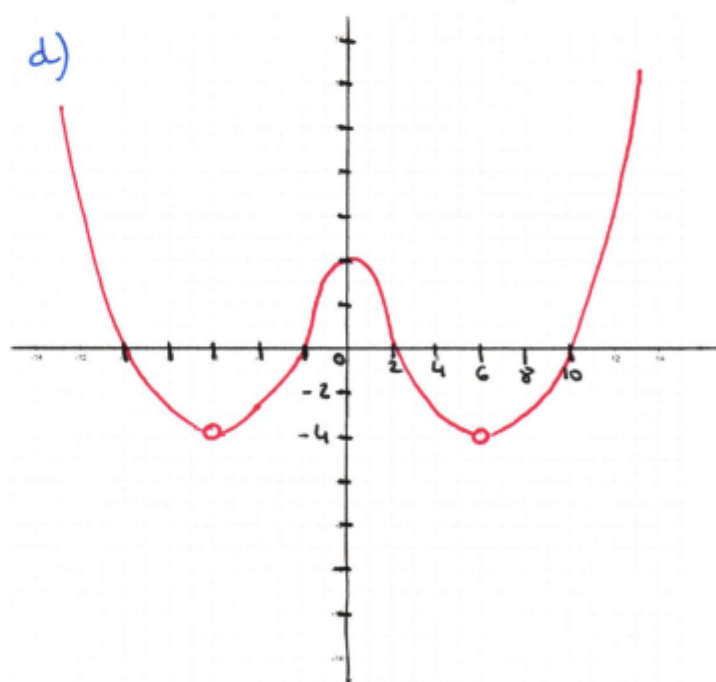
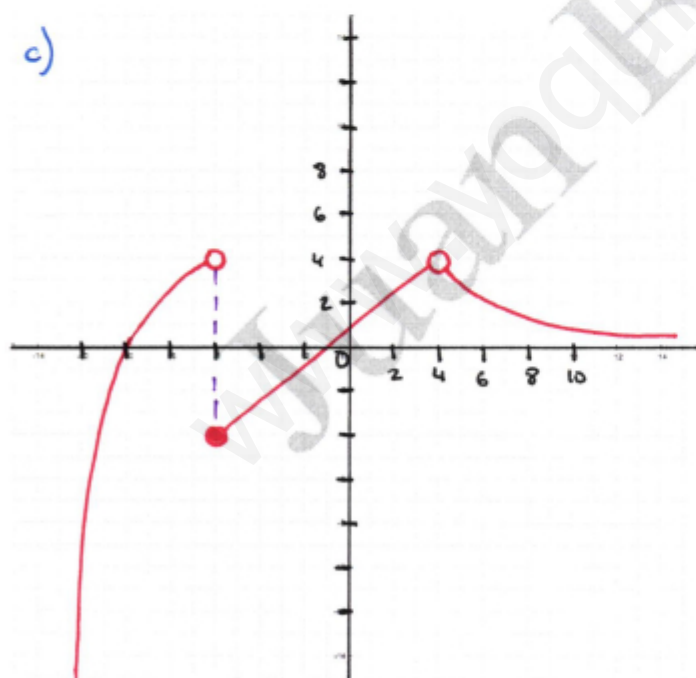
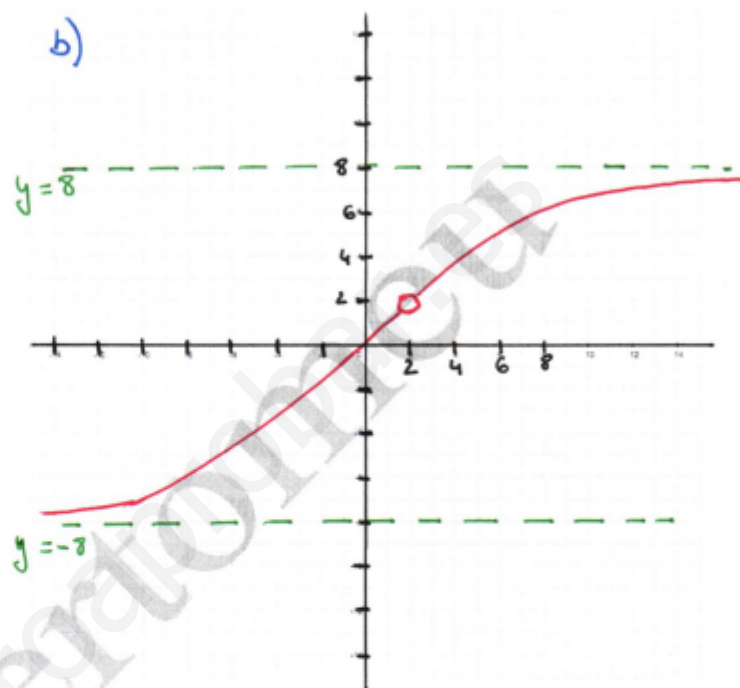
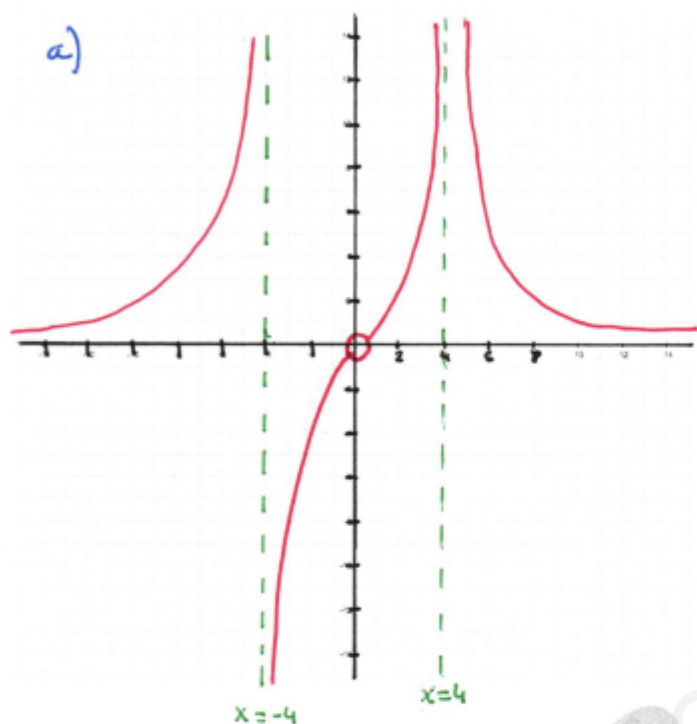
$$\begin{array}{l} \nearrow x \geq 0 \quad \leftarrow \text{No sirve} \\ \searrow 9-3^{|x|}=0 \Rightarrow 3^{|x|}=9 \Rightarrow 3^{|x|}=3^2 \Rightarrow |x|=2 \end{array}$$

$$x = -2$$

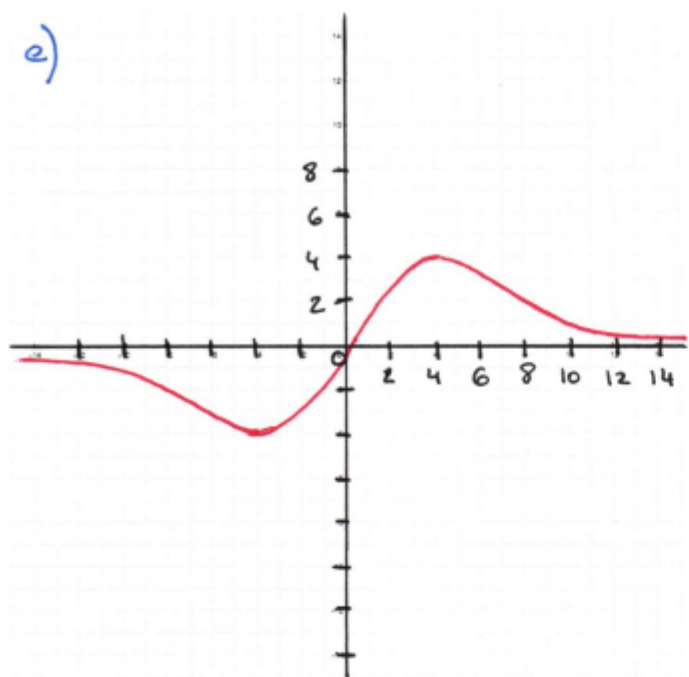
$$x = +2$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [0, 2) \cup (2, +\infty)$$

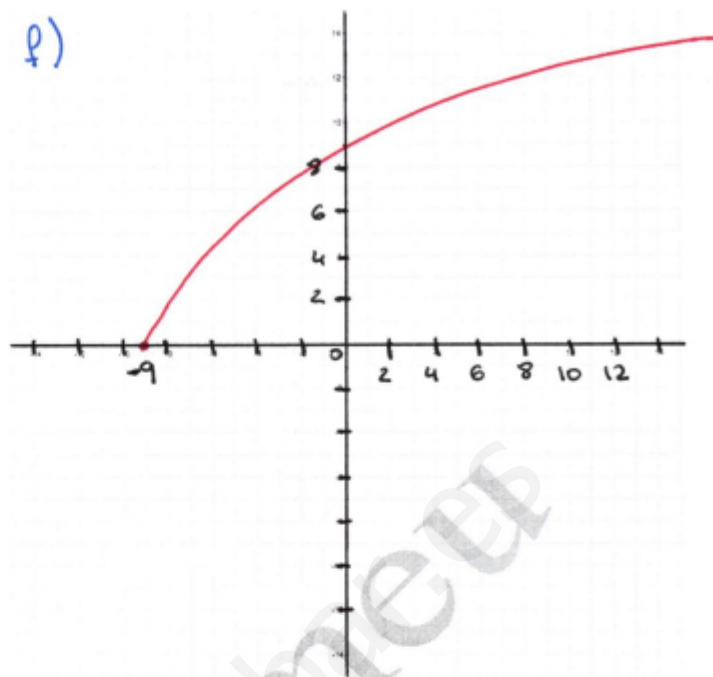
② A continuación se dan las gráficas de algunas funciones de las que debes dar su dominio y su recorrido:



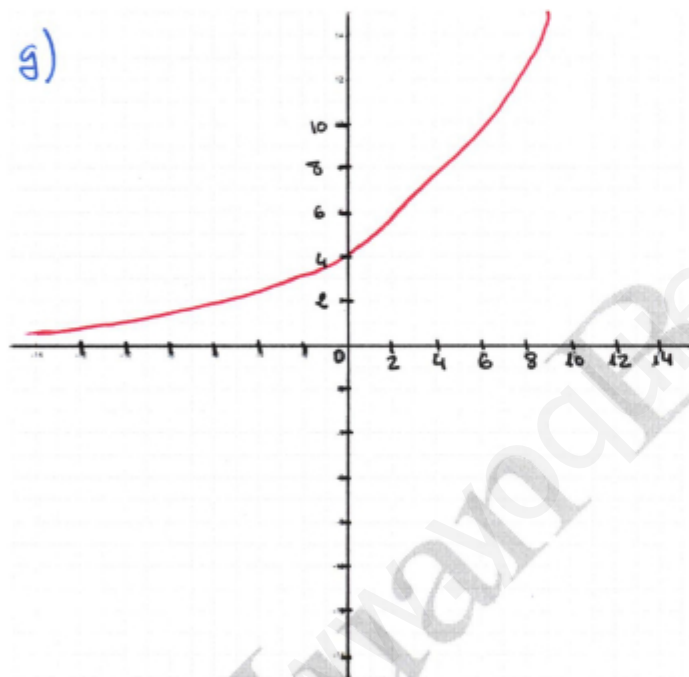
e)



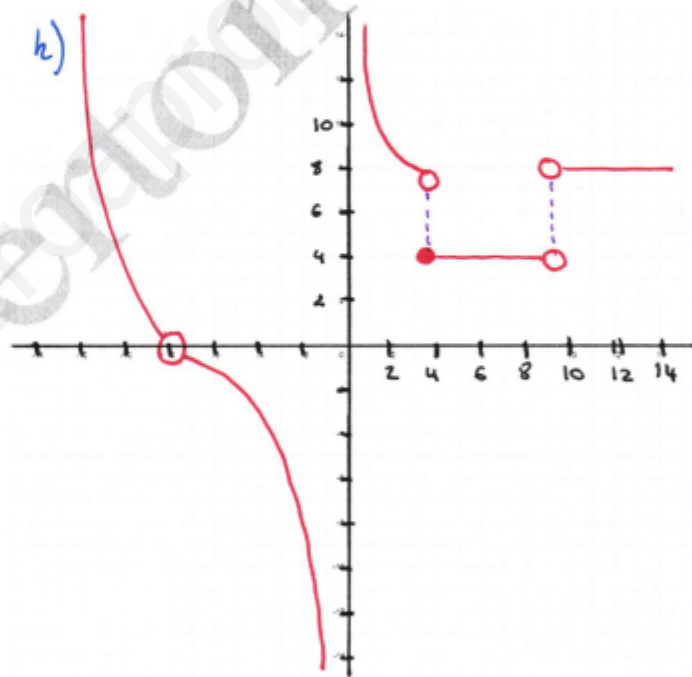
f)



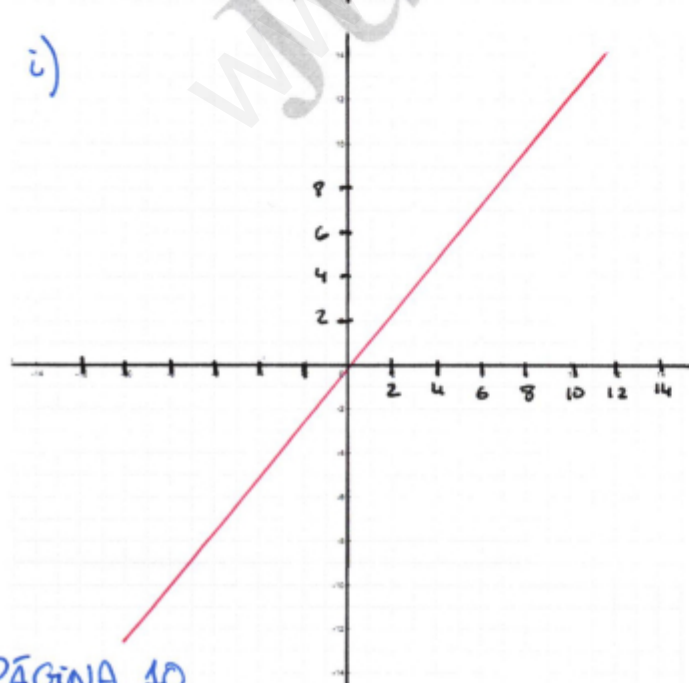
g)



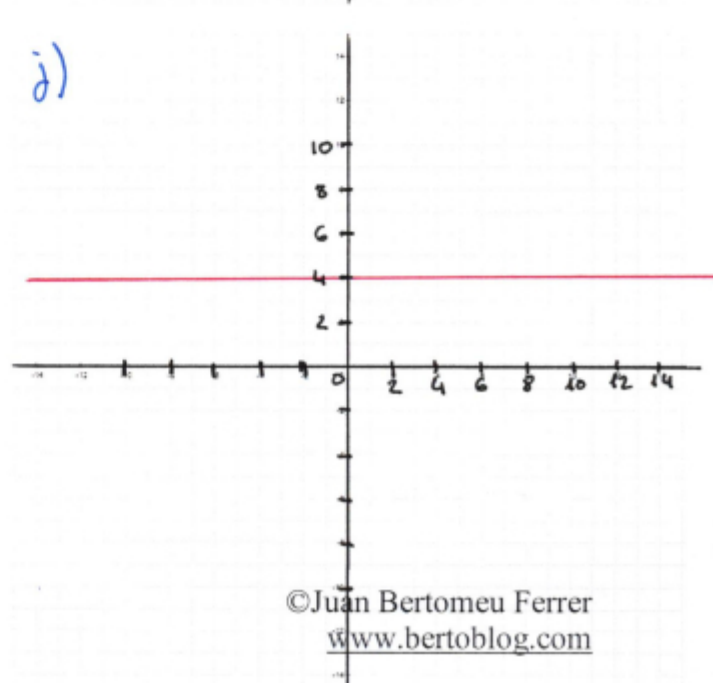
h)



i)



j)



$$\begin{array}{ll} \text{a)} \text{ Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-4, 0, 4\} & \text{f)} \text{ Dom}(f(x)) = [-9, +\infty) \\ \text{Imag}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\} & \text{Imag}(f(x)) = [0, +\infty) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{b)} \text{ Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{2\} & \text{g)} \text{ Dom}(f(x)) = \mathbb{R} \\ \text{Imag}(f(x)) = (-8, 2) \cup (2, 8) & \text{Imag}(f(x)) = (0, +\infty) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} \text{ Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{4\} & \text{h)} \text{ Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-8, 0, 10\} \\ \text{Imag}(f(x)) = (-\infty, 4) & \text{Imag}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0, 8\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{d)} \text{ Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-6, 6\} & \text{i)} \text{ Dom}(f(x)) = \mathbb{R} \\ \text{Imag}(f(x)) = (-4, +\infty) & \text{Imag}(f(x)) = \mathbb{R} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{e)} \text{ Dom}(f(x)) = \mathbb{R} & \text{j)} \text{ Dom}(f(x)) = \mathbb{R} \\ \text{Imag}(f(x)) = [-4, 4] & \text{Imag}(f(x)) = 4 \end{array}$$

③ Determina el dominio de las siguientes funciones:

$$\text{a)} f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{b)} f(x) = \sqrt{x - 1} \quad \text{c)} f(x) = \sqrt{1 - x}$$

$$\text{d)} f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4} \quad \text{e)} f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{f)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\text{g)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}} \quad \text{h)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 4} \quad \text{i)} f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4 - x^2}}$$

j) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

k) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

l) $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

m) $f(x) = \sqrt{x^2+3x+4}$

n) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

o) $f(x) = \ln(1-x^2)$

p) $f(x) = \sqrt{2^x}$

q) $f(x) = \log_2(x+3)$

r) $f(x) = \frac{x+8}{\log_2(x)-4}$

s) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x+3}$

t) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{8-x}$

u) $f(x) = \sqrt{2x-4} \cdot \sqrt{1-x}$

v) $f(x) = \frac{7x}{2 - \sqrt{x-5}}$

w) $f(x) = \frac{\sqrt{3x-1}}{4 - \sqrt{x+1}}$

x) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$

y) $f(x) = 3^{\ln x}$

z) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$

a) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$; $x^2-1 \geq 0$

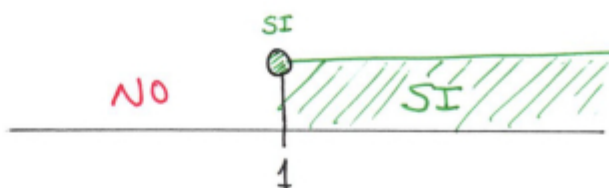
$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \begin{cases} \rightarrow x=-1 \\ \rightarrow x=+1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$b) f(x) = \sqrt{x-1} ; x-1 \geq 0$$

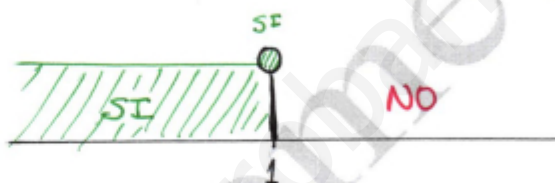
$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [1, +\infty)$$

$$c) f(x) = \sqrt{1-x} ; 1-x \geq 0$$

$$1-x=0 \Rightarrow x=1$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, 1]$$

$$d) f(x) = \sqrt[3]{x^2-4} ; \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$e) f(x) = \sqrt{4-x^2} ; 4-x^2 \geq 0$$

$$4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \begin{cases} \rightarrow x=-2 \\ \rightarrow x=+2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [-2, 2]$$

$$f) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} ; x^2-1 > 0$$

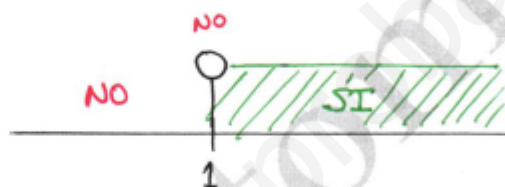
$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \begin{cases} x=-1 \\ x=+1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$g) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} ; x-1 > 0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$



$$h) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-4}$$

$$\begin{cases} x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{cases} \sqrt{x}-4=0 \Rightarrow \sqrt{x}=4 \Rightarrow x=16 \end{cases} \right\} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [0, 16) \cup (16, +\infty)$$

$$i) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4-x^2}} ; 4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \begin{cases} x=-2 \\ x=+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$$

$$j) f(x) = \frac{1}{x^2} ; x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$k) f(x) = \frac{1}{x^2+1} ; x^2+1 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$l) f(x) = \frac{1}{x^3+1} ; x^3+1=0 ; x^3=-1 ; x=\sqrt[3]{-1}=-1$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$m) f(x) = \sqrt{x^2+3x+4} ; x^2+3x+4 > 0$$

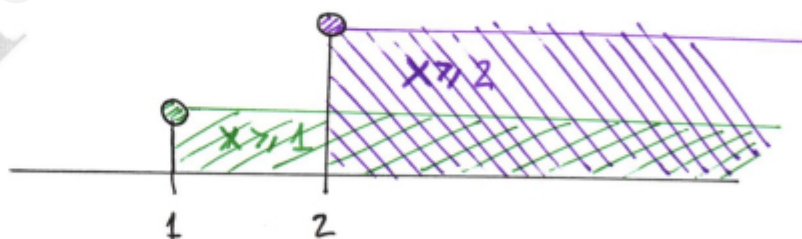
$$x^2+3x+4=0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$



$$n) f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$$

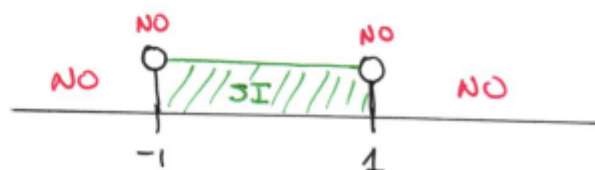
$$\left. \begin{array}{l} x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x > 1 \\ x > 2 \end{array}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [2, +\infty)$$

$$o) f(x) = \ln(1-x^2) ; 1-x^2 > 0$$

$$1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \begin{cases} \rightarrow x=-1 \\ \rightarrow x=1 \end{cases}$$

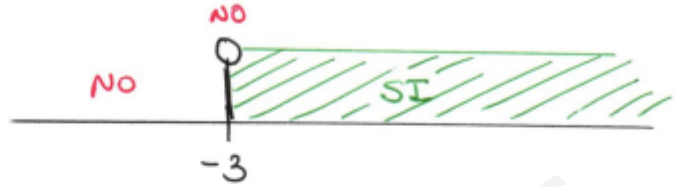


$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-1, 1)$$

p) $f(x) = \sqrt{2^x} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

q) $f(x) = \log_2(x+3); x+3 > 0$

$x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$



$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (-3, +\infty)$

r) $f(x) = \frac{x+8}{\log_2(x)-4}$

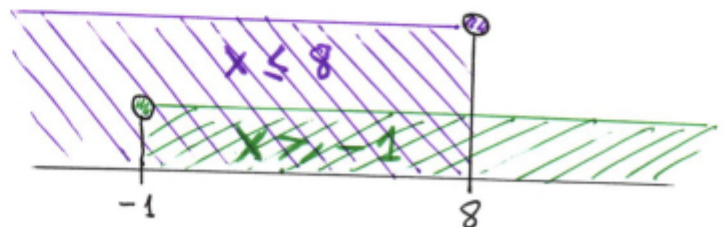
$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \log_2(x) - 4 = 0; \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \end{array} \right\} \text{Dom}(f(x)) = (0, 16) \cup (16, +\infty)$

s) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x+3}$

$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \end{array} \right\} \text{Dom}(f(x)) = [-3, 0) \cup (0, +\infty)$

t) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{8-x}$

$\left. \begin{array}{l} x+1 > 0 \\ 8-x > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x > -1 \\ -x > -8 \Rightarrow x \leq 8 \end{array}$



$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [-1, 8]$

$$u) f(x) = \sqrt{2x-4} \cdot \sqrt{1-x}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x-4 > 0 \\ 1-x > 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x > 4 \\ -x > -1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x > 2 \\ x \leq 1 \end{array} \right\}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \emptyset$$

$$v) f(x) = \frac{7x}{2 - \sqrt{x-5}}$$

$$\left. \begin{array}{l} x-5 > 0 \Rightarrow x > 5 \\ 2 - \sqrt{x-5} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-5} = 2 \Rightarrow x-5 = 4 \Rightarrow x = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [5, 9) \cup (9, +\infty)$$

$$w) f(x) = \frac{\sqrt{3x-1}}{4 - \sqrt{x+1}}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x-1 > 0 \Rightarrow 3x > 1 \Rightarrow x > 1/3 \\ x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ 4 - \sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 4 \Rightarrow x+1 = 16 \Rightarrow x = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \left[\frac{1}{3}, 15 \right) \cup (15, +\infty)$$

$$x) f(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$y) f(x) = 3^{\ln x}; x > 0 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (0, +\infty)$$

$$z) f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow x > 0 \\ \rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{No sirve} \\ x = -1 \\ x = +1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

④ Halla las funciones $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$, $(f \circ g)(x)$, y $(g \circ f)(x)$ siendo $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = \frac{x}{2}$

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{2} = \frac{2+x(x+1)}{2(x+1)} = \frac{x^2+x+2}{2x+2}$$

$$(f-g)(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x}{2} = \frac{2-x(x+1)}{2(x+1)} = \frac{-x^2-x+2}{2x+2}$$

$$(fg)(x) = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{2x+2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1/(x+1)}{x/2} = \frac{2}{x^2+x}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\frac{x}{2}+1} = \frac{2}{x+2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{\frac{1}{x+1}}{2} = \frac{1}{2x+2}$$

⑤ obtén las expresiones de $f \circ g$ y $g \circ f$ siendo:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$

c) $f(x) = 3x^2 - 5$ y $g(x) = \sqrt{2^{x-1}}$

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 - 5x^2 + 3 = x^4 - 5x^2 + 3$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 5x + 3) = (x^2 - 5x + 3)^2$$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}(x) + \frac{\pi}{2}$$

c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2^{x-1}}) = 3 \cdot (\sqrt{2^{x-1}})^2 - 5 = 3 \cdot 2^{x-1} - 5$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 - 5) = \sqrt{2^{3x^2 - 5 - 1}} = \sqrt{2^{3x^2 - 6}}$$

⑥ Dadas las funciones

$$f(x) = x^2 + 1 ; g(x) = \frac{3}{x-2} ; h(x) = \sqrt{x-3}$$

obtén el dominio y las expresiones de:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ h$

d) $g \circ h$ e) $h \circ f$ f) $h \circ g$

$$\begin{aligned} \text{a) } (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f\left(\frac{3}{x-2}\right) = \left(\frac{3}{x-2}\right)^2 + 1 = \frac{9 + (x-2)^2}{(x-2)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 4x + 13}{(x-2)^2} \Rightarrow \text{Dom}(f \circ g(x)) = \mathbb{R} - \{2\} \end{aligned}$$

$$\text{b) } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \frac{3}{x^2 + 1 - 2} = \frac{3}{x^2 - 1}$$

$$x^2 - 1 = 0 \begin{cases} \rightarrow x = -1 \\ \rightarrow x = +1 \end{cases} \Rightarrow \text{Dom}(g \circ f(x)) = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (f \circ h)(x) &= f(h(x)) = f(\sqrt{x-3}) = (\sqrt{x-3})^2 + 1 = x - 2 \\ &\Rightarrow \text{Dom}(f \circ h(x)) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{d) } (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\sqrt{x-3}) = \frac{3}{\sqrt{x-3} - 2}$$

$$\rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

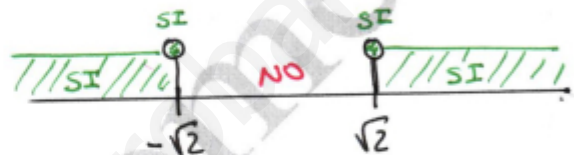
$$\rightarrow \sqrt{x-3} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow x-3 = 4 \Rightarrow x = 7$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(g \circ h(x)) = [3, 7) \cup (7, +\infty)$$

$$e) (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x^2+1) = \sqrt{x^2+1-3} = \sqrt{x^2-2}$$

$$x^2-2 > 0$$

$$x^2-2=0 \Rightarrow x^2=2 \begin{cases} \rightarrow x=-\sqrt{2} \\ \rightarrow x=+\sqrt{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(h \circ f(x)) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$$

$$f) (h \circ g)(x) = h(g(x)) = h\left(\frac{3}{x-2}\right) = \sqrt{\frac{3}{x-2} - 3} = \sqrt{\frac{3-3(x-2)}{x-2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{-3x+9}{x-2}}; \quad \frac{-3x+9}{x-2} > 0$$

$$\frac{-3x+9}{x-2} > 0 \rightarrow \begin{cases} -3x+9=0 \Rightarrow x=3 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(h \circ g(x)) = (2, 3]$$

⑥ obtén las expresiones de las funciones $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$, $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f \circ f)(x)$ y $(g \circ g)(x)$, siendo:

$$a) f(x) = \frac{x}{x+1} \quad y \quad g(x) = 3x^2 - 1$$

$$b) f(x) = \sqrt{x^5} \quad y \quad g(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$$

$$c) f(x) = x^2 \quad y \quad g(x) = \frac{1}{2x-1}$$

$$a) (f+g)(x) = \frac{x}{x+1} + 3x^2 - 1 = \frac{x + (3x^2 - 1)(x+1)}{x+1} = \frac{\cancel{x} + 3x^3 + 3x^2 - \cancel{x} - 1}{x+1} =$$

$$= \frac{3x^3 + 3x^2 - 1}{x+1}$$

$$(f-g)(x) = \frac{x}{x+1} - (3x^2 - 1) = \frac{x - (3x^2 - 1)(x+1)}{x+1} = \frac{x - (3x^3 + 3x^2 - x - 1)}{x+1} =$$

$$= \frac{-3x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{x+1}$$

$$(f \cdot g)(x) = \frac{x}{x+1} \cdot 3x^2 - 1 = \frac{3x^3 - x}{x+1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{3x^2 - 1} = \frac{x}{(x+1)(3x^2 - 1)} = \frac{x}{3x^3 + 3x^2 - x - 1}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x^2 - 1) = \frac{3x^2 - 1}{3x^2 - 1 + 1} = \frac{3x^2 - 1}{3x^2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{x+1}\right) = 3 \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 1 = \frac{3x^2}{(x+1)^2} - 1 =$$

$$= \frac{3x^2 - (x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{3x^2 - (x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{(x+1)^2}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x + x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(3x^2 - 1) = 3 \cdot (3x^2 - 1)^2 - 1 = 3(9x^4 - 6x^2 + 1) - 1 =$$

$$= 27x^4 - 18x^2 + 2$$

$$b) (f+g)(x) = \sqrt{x^5} + \frac{x^2+3}{x+1} = \frac{(x+1)\sqrt{x^5} + x^2 + 3}{x+1}$$

$$(f-g)(x) = \sqrt{x^5} - \frac{x^2+3}{x+1} = \frac{(x+1)\sqrt{x^5} - x^2 - 3}{x+1}$$

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^5} \cdot \frac{x^2+3}{x+1} = \frac{(x^2+3)\sqrt{x^5}}{x+1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x^5}}{\frac{x^2+3}{x+1}} = \frac{(x+1)\sqrt{x^5}}{x^2+3}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right) = \sqrt{\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)^5}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^5}) = \frac{(\sqrt{x^5})^2 + 3}{\sqrt{x^5} + 1} = \frac{x^5 + 3}{\sqrt{x^5} + 1}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x^5}) = \sqrt{(\sqrt{x^5})^5} = \sqrt{\sqrt{x^{25}}} = \sqrt[4]{x^{25}}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right) = \frac{\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)^2 + 3}{\frac{x^2+3}{x+1} + 1} = \frac{\frac{(x^2+3)^2 + 3(x+1)^2}{(x+1)^2}}{\frac{x^2+3 + (x+1)}{x+1}} =$$

$$= \frac{(x^2+3)^2 + 3(x+1)^2}{(x+1) \cdot (x^2+x+4)} = \frac{x^4 + 6x^2 + 9 + 3(x^2+2x+1)}{x^3 + x^2 + 4x + x^2 + x + 4} = \frac{x^4 + 9x^2 + 6x + 12}{x^3 + 2x^2 + 5x + 4}$$

$$c) (f+g)(x) = x^2 + \frac{1}{2x-1} = \frac{x^2(2x-1) + 1}{2x-1} = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{2x-1}$$

$$(f-g)(x) = x^2 - \frac{1}{2x-1} = \frac{x^2(2x-1) - 1}{2x-1} = \frac{2x^3 - x^2 - 1}{2x-1}$$

$$(f \cdot g)(x) = x^2 \cdot \frac{1}{2x-1} = \frac{x^2}{2x-1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{\frac{1}{2x-1}} = x^2(2x-1) = 2x^3 - x^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2x-1}\right) = \left(\frac{1}{2x-1}\right)^2 = \frac{1}{(2x-1)^2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{1}{2x^2-1}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{1}{2x-1}\right) = \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1}{2x-1}\right) - 1} = \frac{1}{\frac{2 - (2x-1)}{2x-1}} = \frac{2x-1}{3-2x}$$

⑦ Dadas $f(x) = \sqrt{2x^3}$ y $g(x) = x-4$, determina las funciones compuestas $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$. Después, calcula el valor que toman esas funciones compuestas en el punto de abscisa $x=5$. ¿Qué conclusión puedes extraer?

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-4) = \sqrt{2(x-4)^3}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(5) = \sqrt{2(5-4)^3} = \sqrt{2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{2x^3}) = \sqrt{2x^3} - 4$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(5) = \sqrt{2 \cdot 125} - 4 = \sqrt{250} - 4 = 5\sqrt{10} - 4$$

Como vemos, $\sqrt{2} \neq 5\sqrt{10} - 4 \Rightarrow$

La composición de funciones no es conmutativa

⑧ La composición entre las funciones:

$$f(x) = 2^{x-1} ; g(x) = \sqrt{x} + 2 ; h(x) = \frac{1}{x-3}$$

tiene como resultado a las funciones:

$$a) m(x) = 2^{\sqrt{x}+1} \quad b) n(x) = \sqrt{2^{x-1}} + 2 \quad c) p(x) = \sqrt{\frac{1}{x-3}} + 2$$

$$d) q(x) = 2^{\frac{4-x}{x-3}} \quad e) r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \quad f) s(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}-1}$$

Averigua que composición entre $f(x)$, $g(x)$, y $h(x)$ tiene como resultado a cada una de ellas.

$$a) m(x) = 2^{\sqrt{x}+1} \\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}+2) = 2^{(\sqrt{x}+2)-1} = 2^{\sqrt{x}+1}$$

$$b) n(x) = \sqrt{2^{x-1}} + 2 \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^{x-1}) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$$

$$c) p(x) = \sqrt{\frac{1}{x-3}} + 2 \\ (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\frac{1}{x-3}} + 2$$

$$d) q(x) = 2^{\frac{4-x}{x-3}} \\ (f \circ h)(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{1}{x-3}\right) = 2^{\frac{1}{x-3}-1} = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$$

$$e) r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \\ (h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(\sqrt{x}+2) = \frac{1}{\sqrt{x}+2-3} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$f) \quad s(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}} - 1}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^{x-1}) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(\sqrt{2^{x-1}} + 2) = \frac{1}{(\sqrt{2^{x-1}} + 2) - 3} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}} - 1}$$

9) Calcular, comprobando el resultado, la función inversa $f^{-1}(x)$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = 2x+4$ c) $f(x) = \frac{9}{x}$, $x \in [3, 9]$

d) $f(x) = 2^x$, $x > 0$ e) $f(x) = \log_2 x$, $x \in [8, 32]$ f) $f(x) = 3x-2$

g) $f(x) = \frac{x+3}{2}$ h) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ i) $f(x) = 1+2^x$

j) $f(x) = 2 + \log_3 x$ k) $f(x) = 4 - x^2$, $x > 0$ l) $f(x) = 2x-1$

m) $f(x) = x^2 - 5$ n) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ o) $f(x) = x^2 + x$, $x > -\frac{1}{2}$

p) $f(x) = \sqrt{2-5x}$ q) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ r) $f(x) = \ln(x+3)$

$$s) f(x) = 3 + 4 \cdot 5^x \quad t) f(x) = \frac{1 + \lg(x)}{2} \quad u) f(x) = \operatorname{sen}(2x)$$

$$v) f(x) = |x+1| \quad w) f(x) = \frac{1 + \log_2 x}{5} \quad x) f(x) = e^{x-1}$$

$$a) y = 2x \rightarrow x = 2y \rightarrow y = \frac{x}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$$

$$b) y = 2x + 4 \rightarrow x = 2y + 4 \rightarrow x - 4 = 2y \rightarrow y = \frac{x-4}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{x-4}{2}\right) + 4 = x$$

$$c) y = \frac{9}{x} \rightarrow x = \frac{9}{y} \rightarrow y = \frac{9}{x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{9}{x} \quad x \in [1, 3]$$

$\hookrightarrow x \in [3, 9] \begin{cases} x=3 \Rightarrow y = \frac{9}{3} = 3 \\ x=9 \Rightarrow y = \frac{9}{9} = 1 \end{cases}$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{9}{x}\right) = \frac{9}{\frac{9}{x}} = \frac{9x}{9} = x$$

$$d) y = 2^x \rightarrow x = 2^y \rightarrow \log_2 x = \log_2 2^y \rightarrow y = \log_2 x$$

$$\hookrightarrow x > 0 \rightarrow y > 2^0 \rightarrow y > 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 x, \quad x > 1$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = 2^{\log_2 x} = x$$

$$e) y = \log_2 x \rightarrow x = \log_2 y \rightarrow y = 2^x \Rightarrow f^{-1}(x) = 2^x, x \in [3, 5]$$

$$\hookrightarrow x \in [8, 32] \begin{cases} x=8 \Rightarrow y = \log_2 8 = 3 \\ x=32 \Rightarrow y = \log_2 32 = 5 \end{cases}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(2^x) = \log_2 2^x = x$$

$$f) y = 3x - 2 \rightarrow x = \frac{y+2}{3} \rightarrow y = \frac{x+2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{x+2}{3}\right) - 2 = x$$

$$g) y = \frac{x+3}{2} \rightarrow x = \frac{y+3}{2} \rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 3$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(2x - 3) = \frac{(2x - 3) + 3}{2} = x$$

$$h) y = \sqrt{2x+1} \rightarrow x = \frac{y^2-1}{2} \Rightarrow x^2 = 2y+1 \rightarrow y = \frac{x^2-1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2}; (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x^2-1}{2}\right) = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{x^2-1}{2}\right) + 1} = x$$

$$i) y = 1 + 2^x \rightarrow x = \log_2(y-1) \rightarrow x-1 = 2^y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2(x-1) = \log_2 2^y \Rightarrow y = \log_2(x-1) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2(x-1)$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\log_2(x-1)) = 1 + 2^{\log_2(x-1)} = 1 + x - 1 = x$$

$$j) f(x) = 2 + \log_3(x) \Rightarrow x = 2 + \log_3 y \Rightarrow x - 2 = \log_3 y \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 3^{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = 3^{x-2}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(3^{x-2}) = 2 + \log_3 3^{x-2} = 2 + x - 2 = x$$

$$k) y = 4 - x^2 \rightarrow x = 4 - y^2 \rightarrow y^2 = 4 - x \rightarrow y = +\sqrt{4-x} \\ \hookrightarrow x \geq 0 \rightarrow y_{\max} = 4 - 0 = 4 \Rightarrow f^{-1}(x) = +\sqrt{4-x} \text{ con } x \leq 4$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(+\sqrt{4-x}) = 4 - (\sqrt{4-x})^2 = 4 - 4 + x = x$$

$$l) f(x) = 2x - 1 \rightarrow x = 2y - 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = x$$

$$m) f(x) = x^2 - 5 \rightarrow x = y^2 - 5 \Rightarrow y^2 = x + 5 \begin{cases} y = +\sqrt{x+5} \\ y = -\sqrt{x+5} \end{cases}$$

¡Ojo!! $\rightarrow f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x+5}$ no es una función, ya que

para cada valor de x se obtendrían dos valores para $f^{-1}(x)$.

Para poder obtener esta función inversa, el enunciado debería haber especificado qué valores puede tomar " x " para así nosotros decir cuál de nuestras opciones de función inversa es la correcta (como ha sucedido en el apartado k) de este mismo ejercicio!!)

Así, si nos hubieran dicho:

$$f(x) = x^2 - 5 \text{ con } x \geq 0 \text{ entonces } f^{-1}(x) = +\sqrt{x+5} \text{ con } x \geq -5$$

$$\hookrightarrow x \geq 0 \rightarrow y_{\min} = -5$$

o bien

$$f(x) = x^2 - 5 \text{ con } x < 0 \text{ entonces } f^{-1}(x) = -\sqrt{x+5} \text{ con } x \geq -5$$

$$\hookrightarrow x < 0 \rightarrow y \geq -5$$

$$n) f(x) = \frac{1}{x+2} \rightarrow x = \frac{1}{y+2} \rightarrow y+2 = \frac{1}{x} \rightarrow y = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1-2x}{x} ; (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1-2x}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1-2x}{x} + 2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1-2x+2x}{x}} = x$$

$$o) y = x^2 + x \rightarrow x = y^2 + y \Rightarrow y^2 + y - x = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4x}}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-1 + \sqrt{1+4x}}{2} \text{ con } x \geq -\frac{1}{4}$$

$$x \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow y_{\min} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{-1 + \sqrt{1+4x}}{2}\right) = \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4x}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{1+4x}}{2} + \frac{1}{4} + x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4x}}{2} = x$$

$$p) \ y = \sqrt{2-5x} \rightarrow x = \sqrt{2-5y} \rightarrow x^2 = 2-5y \rightarrow y = \frac{2-x^2}{5}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2-x^2}{5} ;$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{2-x^2}{5}\right) = \sqrt{2-5\left(\frac{2-x^2}{5}\right)} = \sqrt{2-2+x^2} = x$$

$$q) \ y = \frac{1}{x-2} ; \ x = \frac{1}{y-2} \Rightarrow y-2 = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{1}{x} + 2 = \frac{1+2x}{x}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x} ;$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1+2x}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1+2x}{x}-2} = \frac{1}{\frac{1+2x-2x}{x}} = x$$

$$r) \ y = \ln(x+3) \rightarrow x = \ln(y+3) \rightarrow y+3 = e^x \rightarrow y = e^x - 3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = e^x - 3 ; \ (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(e^x - 3) = \ln(e^x - 3 + 3) = \ln e^x = x$$

$$s) \ y = 3 + 4 \cdot 5^x \rightarrow x = 3 + 4 \cdot 5^y \rightarrow \frac{x-3}{4} = 5^y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5\left(\frac{x-3}{4}\right) = \log_5 5^y \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_5\left(\frac{x-3}{4}\right)$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\log_5\left(\frac{x-3}{4}\right)\right) = 3 + 4 \cdot 5^{\log_5\left(\frac{x-3}{4}\right)} = 3 + 4 \cdot \left(\frac{x-3}{4}\right) = x$$

$$t) \quad y = \frac{1 + \operatorname{tg}(x)}{2} \Rightarrow x = \frac{1 + \operatorname{tg}(y)}{2} \Rightarrow 2x = 1 + \operatorname{tg}(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = \operatorname{tg}(y) \Rightarrow y = \operatorname{arctg}(2x - 1) \Rightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(2x - 1)$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\operatorname{arctg}(2x - 1)) = \frac{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(2x - 1))}{2} =$$

$$= \frac{1 + 2x - 1}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

$$u) \quad y = \operatorname{sen}(2x) \Rightarrow x = \operatorname{sen}(2y) \Rightarrow \operatorname{arcsen}(x) = 2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{2}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{\operatorname{arcsen}(x)}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\cancel{2} \cdot \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{\cancel{2}}\right) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) = x$$

$$v) \quad y = |x + 1| \Rightarrow x = |y + 1| \Rightarrow y + 1 = \pm x \begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

Ojo!! $\rightarrow$ Como ya nos sucedió en el apartado m), tenemos dos opciones de función inversa y eso no puede ser. El enunciado debería especificar qué valores de "x" puede tomar la función dada para así nosotros poder decidir cuál de nuestras opciones de función inversa es la correcta para esos valores

Así, si nos hubieran dicho:

$$f(x) = |x+1| \text{ con } x > -1 \text{ entonces } f^{-1}(x) = x-1 \text{ con } x > 0$$

$$\hookrightarrow x > -1 \rightarrow y_{\min} = |-1+1| = 0 \text{ ---}$$

O bien

$$f(x) = |x+1| \text{ con } x < -1 \text{ entonces } f^{-1}(x) = -x-1 \text{ con } x > 0$$

$$\hookrightarrow x < -1 \rightarrow y_{\max} = |-1+1| = 0 \text{ ---}$$

$$w) y = \frac{1 + \log_2 x}{5} \Rightarrow x = \frac{1 + \log_2 y}{5} \Rightarrow 5x = 1 + \log_2 y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x - 1 = \log_2 y \Rightarrow y = 2^{5x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2^{5x-1}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(2^{5x-1}) = \frac{1 + \log_2 2^{5x-1}}{5} = \frac{1 + 5x - 1}{5} = x$$

$$x) y = e^{x-1} \Rightarrow x = e^{y-1} \Rightarrow \ln x = \ln e^{y-1} \Rightarrow \ln x = y-1$$

$$\Rightarrow y = \ln x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln x + 1$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\ln x + 1) = e^{\ln x + 1 - 1} = e^{\ln x} = x$$

10) Comprueba si las siguientes funciones $f(x)$ y $g(x)$ dadas son inversa una de la otra.

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ y $g(x) = \frac{1}{x} - 2$

b) $f(x) = \sqrt{2x+3}$ y $g(x) = \frac{x^2+2}{3}$

c) $f(x) = 1 + \log_2\left(\frac{x}{3}\right)$ y $g(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$

d) $f(x) = 2x-5$ y $g(x) = \frac{x+5}{2}$

e) $f(x) = \frac{3-x}{4}$ y $g(x) = 3-4x$

f) $f(x) = x^3+1$ y $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ serán una inversa de la otra si se verifica que $(f \circ g)(x) = x$. Así:

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x} - 2\right) = \frac{1}{\frac{1}{x} - 2 + 2} = x$

$\Rightarrow$ Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son inversas

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x^2+2}{3}\right) = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{x^2+2}{3}\right) + 3} = \sqrt{\frac{2x^2+13}{3}}$

$\Rightarrow$ Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ no son inversas

$$c) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3 \cdot 2^{x-1}) = 1 + \log_2 \left(\frac{3 \cdot 2^{x-1}}{3} \right) =$$

$$= 1 + \log_2 2^{x-1} = 1 + x - 1 = x$$

$\Rightarrow$ Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son inversas.

$$d) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+5}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{x+5}{2}\right) - 5 = x + 5 - 5 = x$$

$\Rightarrow$ Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son inversas.

$$e) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3-4x) = \frac{3 - (3-4x)}{4} = \frac{4x}{4} = x$$

$\Rightarrow$ Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son inversas.

$$f) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-1}) = (\sqrt[3]{x-1})^3 + 1 = x - 1 + 1 = x$$

$\Rightarrow$ Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son inversas.

11) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^3 - 5$, calcula $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f^{-1} \circ g)(x)$, $(g \circ f^{-1})(x)$, $(f \circ g^{-1})(x)$, $(g^{-1} \circ f)(x)$, $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ y $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2$$

$$y = x^3 - 5 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+5} \Rightarrow y^3 = x+5 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x+5} \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+5}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3 - 5) = \sqrt{x^3 - 5}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^3 - 5 = \sqrt{x^3} - 5$$

$$(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(x^3 - 5) = (x^3 - 5)^2 = x^6 - 10x^3 + 25$$

$$(g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = g(x^2) = (x^2)^3 - 5 = x^6 - 5$$

$$(f \circ g^{-1})(x) = f(g^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x+5}) = \sqrt{\sqrt[3]{x+5}} = \sqrt[6]{x+5}$$

$$(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}(f(x)) = g^{-1}(\sqrt{x}) = \sqrt[3]{\sqrt{x} + 5}$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(\sqrt[3]{x+5}) = (\sqrt[3]{x+5})^2 = \sqrt[3]{(x+5)^2}$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(x^2) = \sqrt[3]{x^2 + 5}$$

- 12) Calcular $(f \circ g)(2)$ si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones que verifican que $f(10) + 5 = 0$ y $g(2) - 10 = 0$

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(10) = -5$$

- 13) Para cada una de las funciones $h(x)$ que se dan a continuación, encuentra dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que verifiquen que $(f \circ g)(x) = h(x)$, siendo:

a) $h(x) = \sqrt{x-3}$

c) $h(x) = (3x-1)^4$

b) $h(x) = \sqrt{x} - 3$

d) $h(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2} + 1}$

$$a) \quad h(x) = \sqrt{x-3}$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x-3 \\ f(x) = \sqrt{x} \end{array} \right\} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = \sqrt{x-3}$$

$$b) \quad h(x) = \sqrt{x} - 3$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = \sqrt{x} \\ f(x) = x-3 \end{array} \right\} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 3$$

$$c) \quad h(x) = (3x-1)^4$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = 3x-1 \\ f(x) = x^4 \end{array} \right\} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x-1) = (3x-1)^4$$

$$d) \quad h(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2} + 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = \frac{1}{x-2} \\ f(x) = \sqrt{x+1} \end{array} \right\} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-2}\right) = \sqrt{\frac{1}{x-2} + 1}$$

14) Explica qué composición entre las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} ; g(x) = 5x+1 ; h(x) = \frac{2}{x+1}$$

tendría como resultado a la función:

$$a) \quad m(x) = 5\sqrt{x^2+4} + 1$$

$$c) \quad p(x) = \frac{x+1}{x+1}$$

$$b) \quad n(x) = 25x+6$$

$$d) \quad q(x) = \sqrt{x^2+8}$$

$$a) m(x) = 5\sqrt{x^2+4} + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2+4}) = 5\sqrt{x^2+4} + 1$$

$$b) n(x) = 25x + 6$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(5x+1) = 5 \cdot (5x+1) + 1 = 25x + 6$$

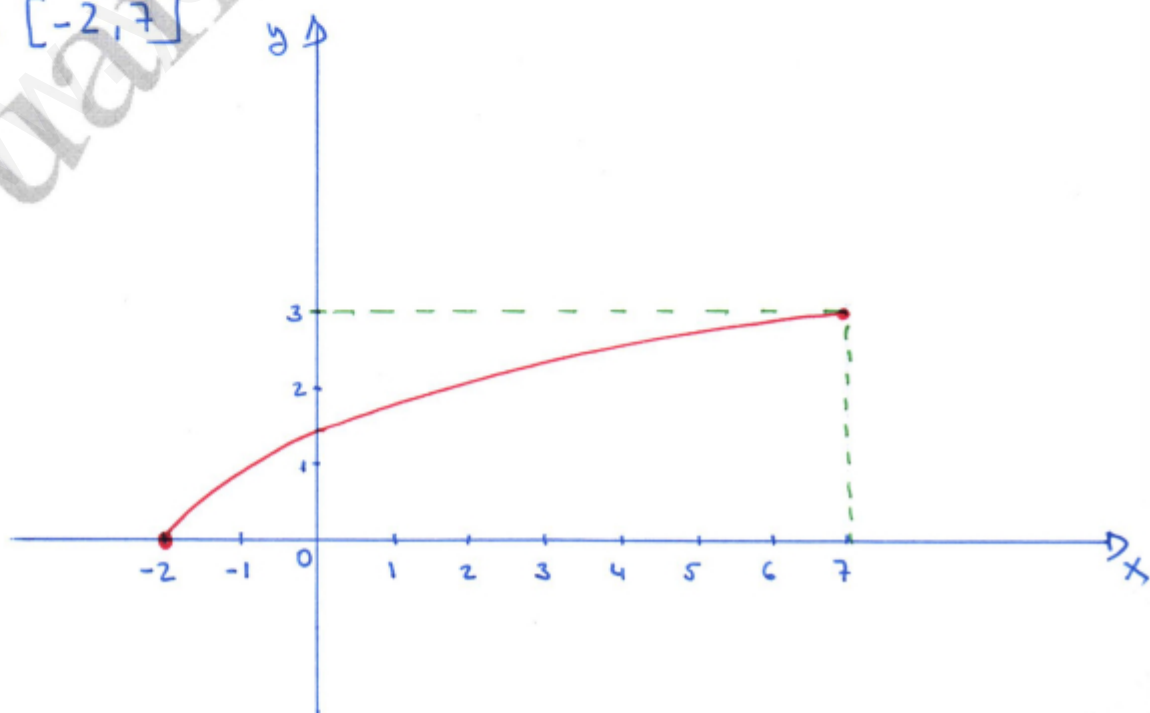
$$c) p(x) = \frac{x+11}{x+1}$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{2}{x+1}\right) = 5 \cdot \left(\frac{2}{x+1}\right) + 1 = \frac{10+x+1}{x+1} = \frac{x+11}{x+1}$$

$$d) q(x) = \sqrt{x^2+8}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x^2+4}) = \sqrt{(\sqrt{x^2+4})^2 + 4} = \sqrt{x^2+8}$$

15) A continuación se da la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$ cuando $x \in [-2, 7]$



Mirando la gráfica, obtén el dominio y el recorrido de $f(x)$. A continuación obtén analíticamente la función inversa $f^{-1}(x)$, calculando su dominio y recorrido. ¿Qué conclusión podemos obtener?

A la vista del gráfico es fácil ver que:

$$\text{Dominio} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [-2, 7]$$

$$\text{Recorrido} \Rightarrow \text{Img}(f(x)) = [0, 3]$$

Veamos la función inversa:

$$y = \sqrt{x+2} \Rightarrow x = \sqrt{y+2} \Rightarrow x^2 = y+2 \Rightarrow y = x^2 - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 \rightarrow y = 0 \\ x = 7 \rightarrow y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2 \text{ con } x \in [0, 3]$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -2 \\ f(3) = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Dom}(f^{-1}(x)) = [0, 3] \\ \text{Img}(f^{-1}(x)) = [-2, 7] \end{array}$$

Moraleja → El recorrido de una función es igual al dominio de su función inversa

$$\text{Img}(f(x)) = \text{Dom}(f^{-1}(x))$$

16) Obtener analíticamente el recorrido de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$b) f(x) = 2 + \sqrt{x}$$

$$c) f(x) = e^x - 3$$

$$d) f(x) = \sqrt{\frac{3}{x+1}}$$

$$e) f(x) = \ln(x-1) \quad f) f(x) = 1 + 2^{1/x}$$

$$a) y = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-2} \Rightarrow x \cdot y - 2x = y+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot y - y = 2x+1 \Rightarrow y \cdot (x-1) = 2x+1 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad ; \quad x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \text{Dom}(f^{-1}(x)) = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\Rightarrow \text{Imag}(f(x)) = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$b) y = 2 + \sqrt{x} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{y} \Rightarrow x-2 = \sqrt{y} \Rightarrow y = (x-2)^2$$

$$\hookrightarrow x \geq 0 \rightarrow y_{\min} = 2 + \sqrt{0} = 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^2 \text{ con } x \geq 2$$

$$\text{Dom}(f^{-1}(x)) = [2, +\infty) \Rightarrow \text{Imag}(f(x)) = [2, +\infty)$$

$$c) y = e^x - 3 \Rightarrow x = e^y - 3 \Rightarrow x + 3 = e^y \Rightarrow y = \ln(x+3)$$

$$x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow \text{Dom}(f^{-1}(x)) = (-3, +\infty)$$

$$\Rightarrow \text{Im}g(f(x)) = (-3, +\infty)$$

$$d) y = \sqrt{\frac{3}{x+1}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{y+1}} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{y+1} \Rightarrow y+1 = \frac{3}{x^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{x^2} - 1 = \frac{3-x^2}{x^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3-x^2}{x^2} \text{ con } x > 0$$

$$\Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow y > 0$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f^{-1}(x)) = (0, +\infty)$$

$$\Rightarrow \text{Im}g(f(x)) = (0, +\infty)$$

$$e) y = \ln(x-1) \Rightarrow x = \ln(y-1) \Rightarrow y-1 = e^x \Rightarrow y = e^x + 1$$

$$\hookrightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \rightarrow y \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}(x) = e^x + 1$$

$$\text{Dom}(f^{-1}(x)) = \mathbb{R} \Rightarrow \text{Im}g(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$f) \quad y = \frac{1}{\log_2(x-1)} \rightarrow x = 1 + 2^{1/y} \Rightarrow x-1 = 2^{1/y} \Rightarrow \log_2(x-1) = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\log_2(x-1)} \rightarrow x \neq 0 \Rightarrow y > 0$$

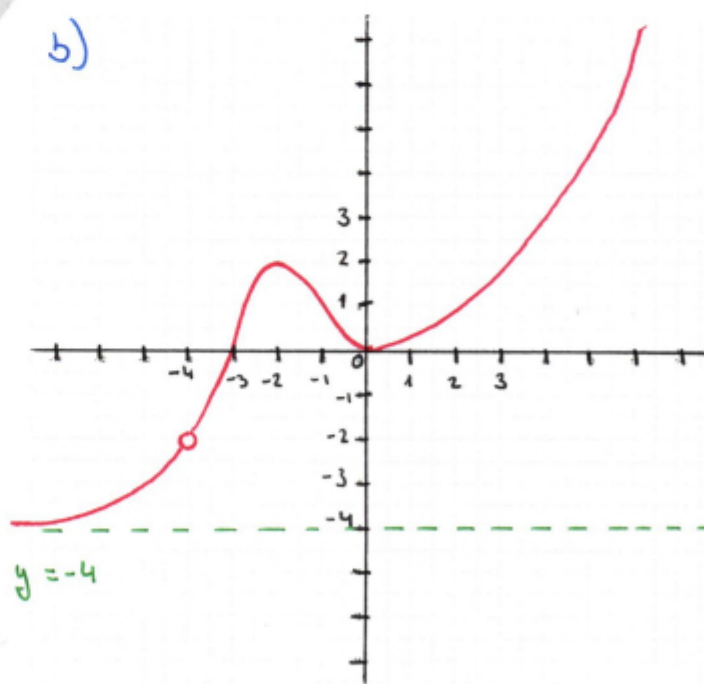
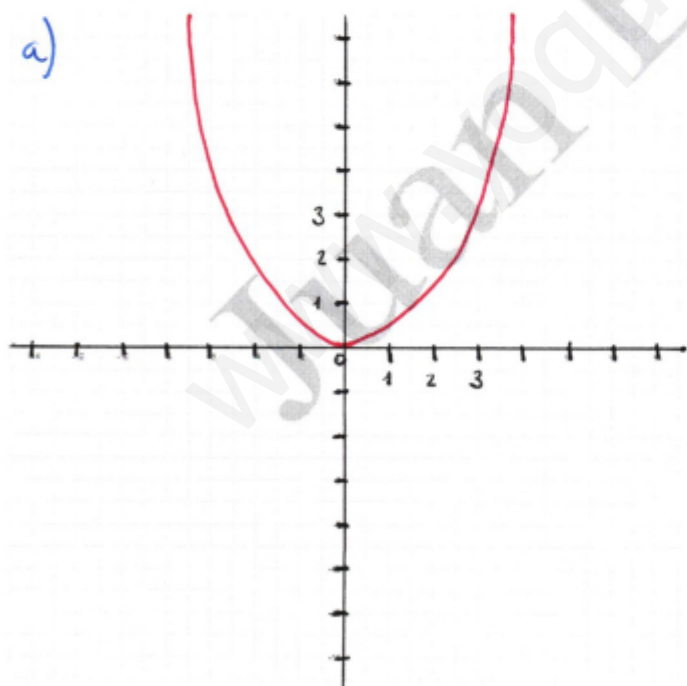
$$\rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

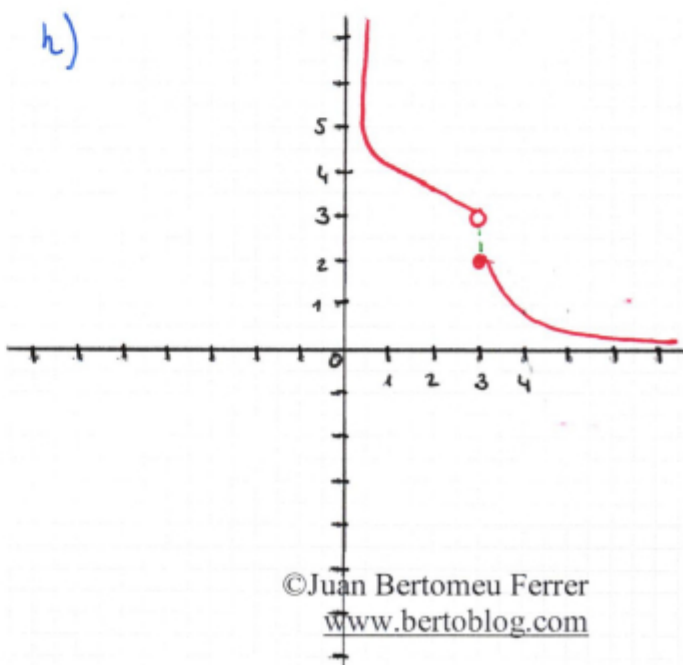
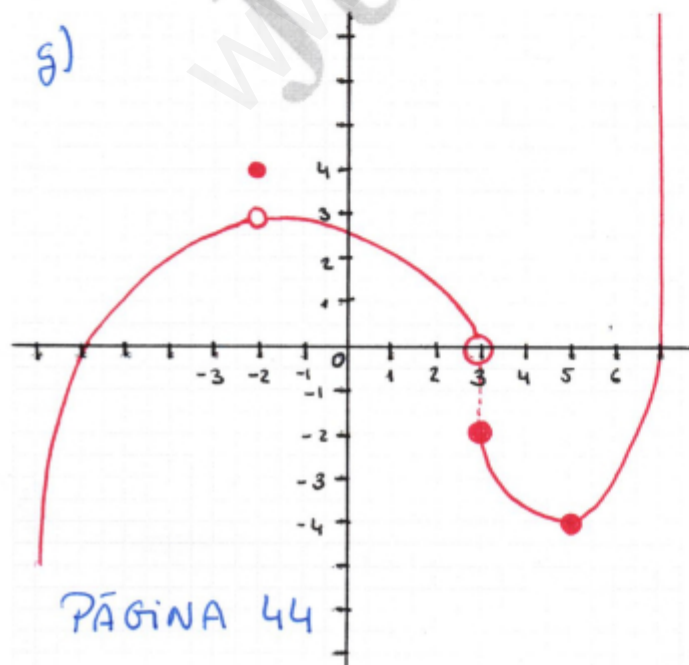
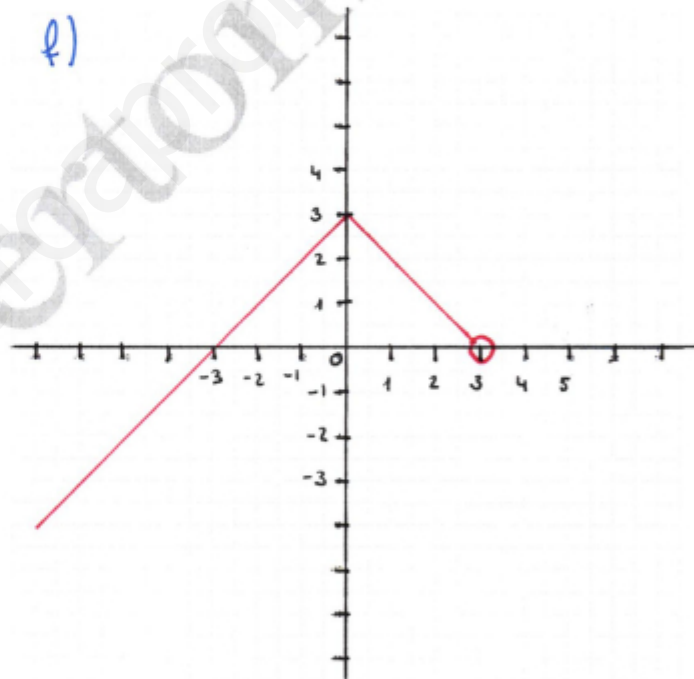
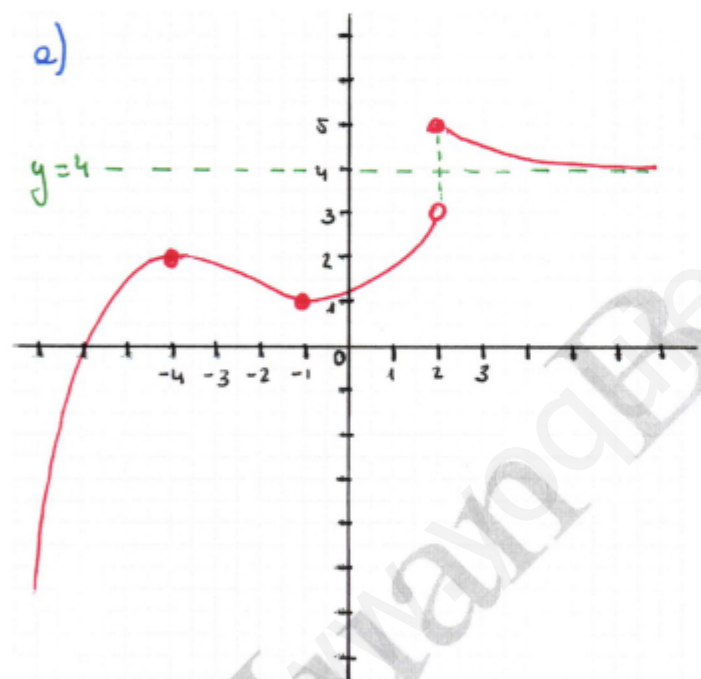
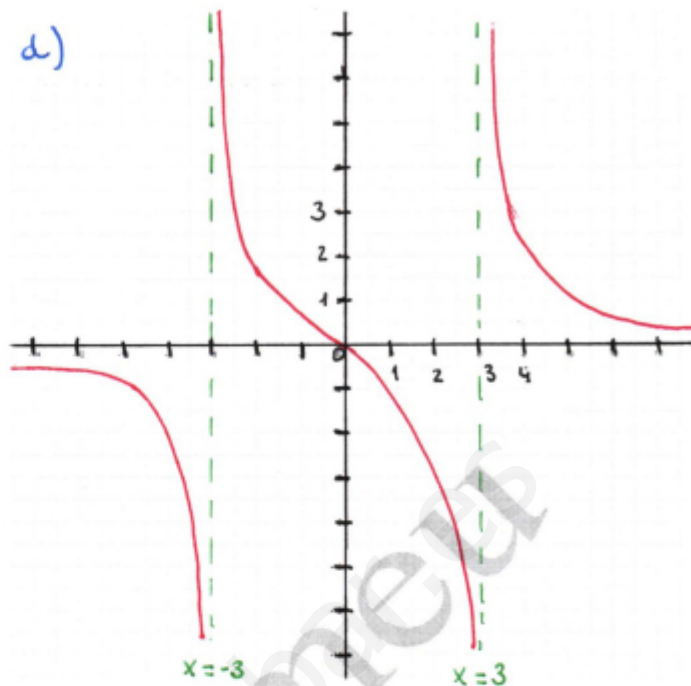
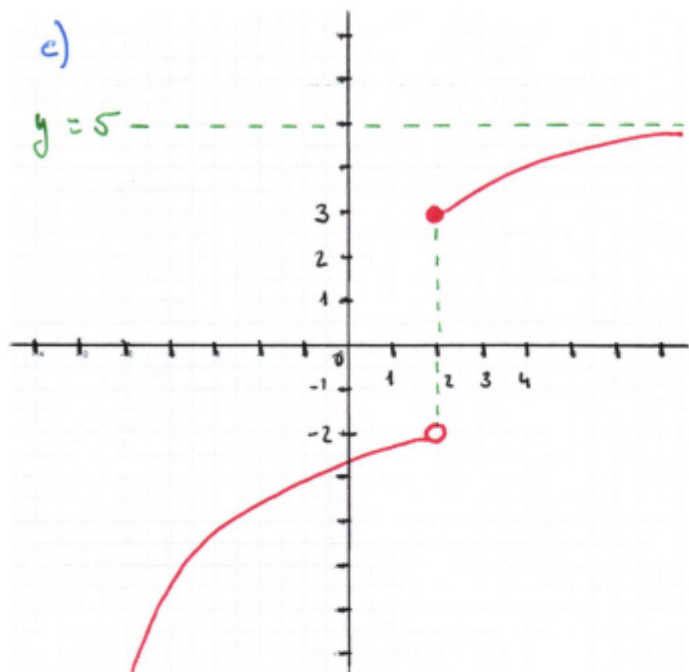
$$\rightarrow \log_2(x-1) = 0 \Rightarrow x-1 = 2^0 \Rightarrow x-1 = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Dom}(f^{-1}(x)) = (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$\Rightarrow \text{Im}g(f(x)) = (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

(17) A continuación se dan las gráficas de algunas funciones de las que debes dar su dominio, recorrido, e intervalos de monotonía.





a) $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

$$\text{Imag}(f(x)) = [0, +\infty)$$

Creciente en $(0, +\infty)$

Decreciente en $(-\infty, 0)$

b) $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-4\}$

$$\text{Imag}(f(x)) = (-4, -2) \cup (-2, +\infty)$$

Creciente : $(-\infty, -4) \cup (-4, -2) \cup (0, +\infty)$

Decreciente : $(-2, 0)$

c) $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

$$\text{Imag}(f(x)) = (-\infty, -2) \cup [3, 5)$$

Creciente : $\mathbb{R}$

d) $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$$\text{Imag}(f(x)) = \mathbb{R}$$

Decreciente : $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$

También se puede decir que $f(x)$ es decreciente en todo su dominio

e) $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

$$\text{Imag}(f(x)) = (-\infty, 3) \cup (4, 5]$$

Creciente : $(-\infty, -4) \cup (-1, 2)$

Decreciente : $(-4, -1) \cup (5, +\infty)$

$$f) \text{ Dom}(f(x)) = (-\infty, 3)$$

$$\text{Imag}(f(x)) = (-\infty, 3]$$

$$\text{Creciente} : (-\infty, 0)$$

$$\text{Decreciente} : (0, 3)$$

$$g) \text{ Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$\text{Imag}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$\text{Creciente} : (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$$

$$\text{Decreciente} : (-2, 5)$$

$$h) \text{ Dom}(f(x)) = (0, +\infty)$$

$$\text{Imag}(f(x)) = (0, 2] \cup (3, +\infty) \quad \text{Decreciente} : (0, +\infty)$$

18) Di cuáles son los extremos relativos de las funciones del ejercicio anterior.

a) Mínimo relativo en $(0, 0)$

b) Máximo relativo en $(-2, 2)$ y mínimo relativo en $(0, 0)$

c) No presenta extremos relativos

d) No presenta extremos relativos

e) Máximos relativos en $(-4, 2)$ y en $(2, 5)$
Mínimo relativo en $(-1, 1)$

f) Máximo relativo en $(0, 3)$

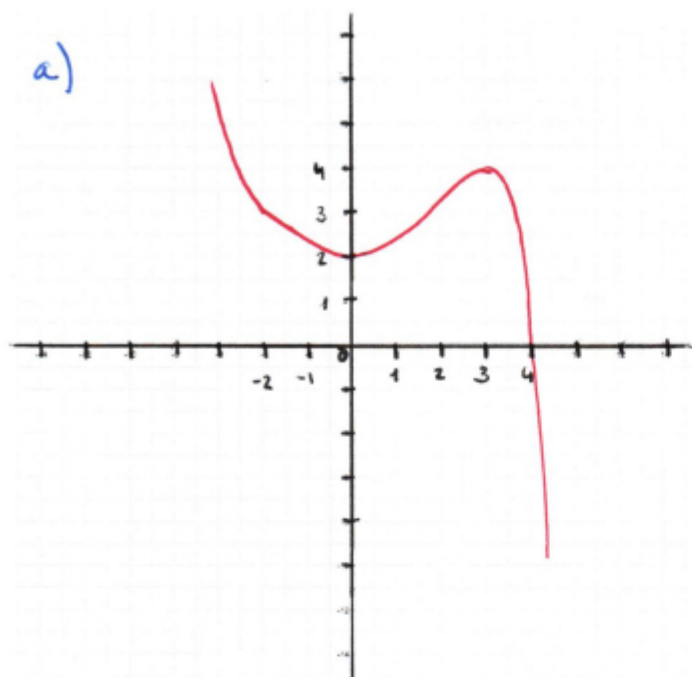
- g) Máximo relativo en $(-2, 4)$
Mínimo relativo en $(5, -4)$
- h) No presenta extremos relativos.

19) Di cuáles son los extremos absolutos de las funciones del ejercicio 17.

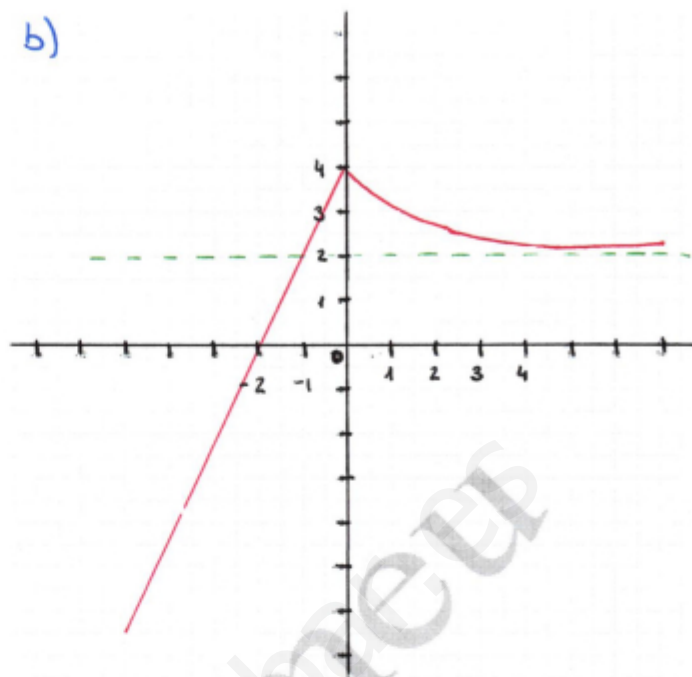
- a) Mínimo absoluto en $(0, 0)$
- b) No presenta extremos absolutos
- c) No presenta extremos absolutos
- d) No presenta extremos absolutos
- e) Máximo absoluto en $(2, 5)$
- f) Máximo absoluto en $(0, 3)$
- g) No presenta extremos absolutos.
- h) No presenta extremos absolutos.

20) A continuación se dan las gráficas de algunas funciones. Di cuáles son los extremos relativos de la función, así como los extremos absolutos en el intervalo $[-2, 4]$

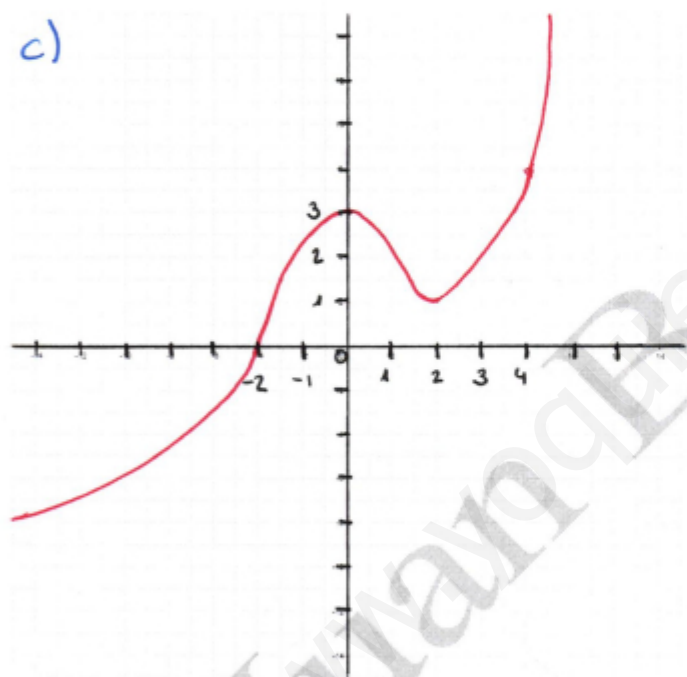
a)



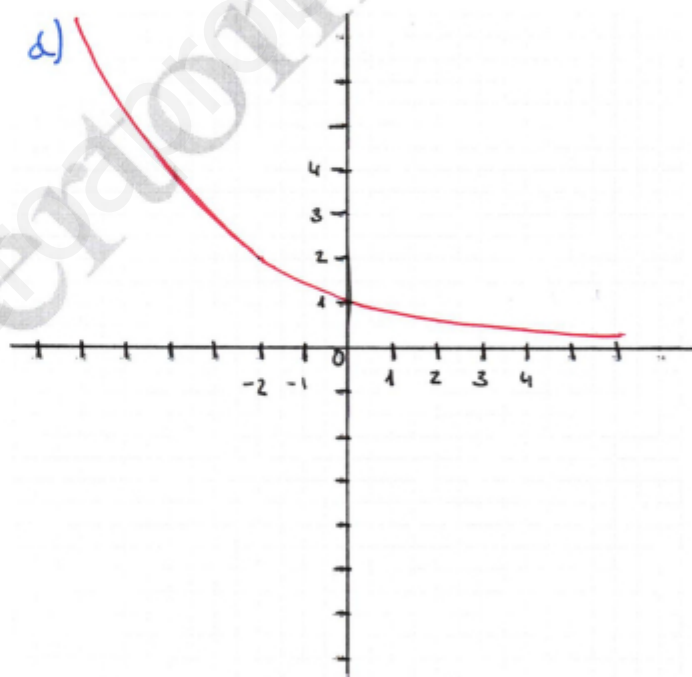
b)



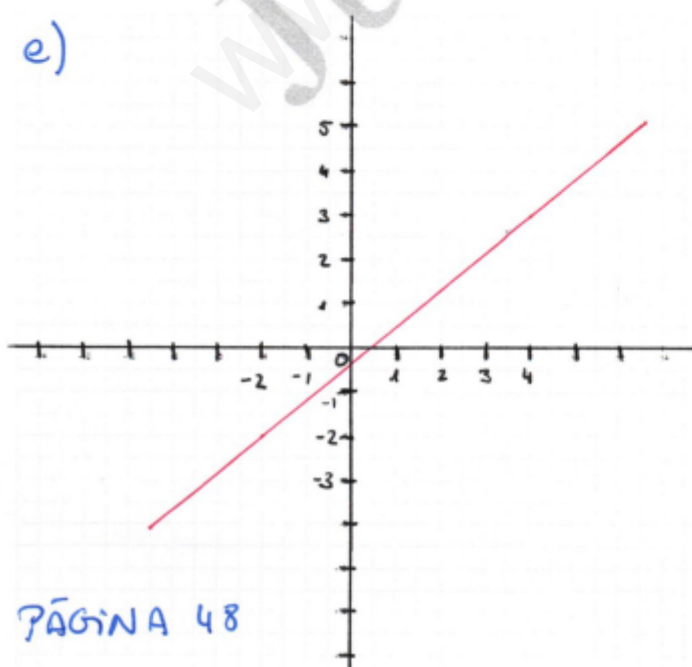
c)



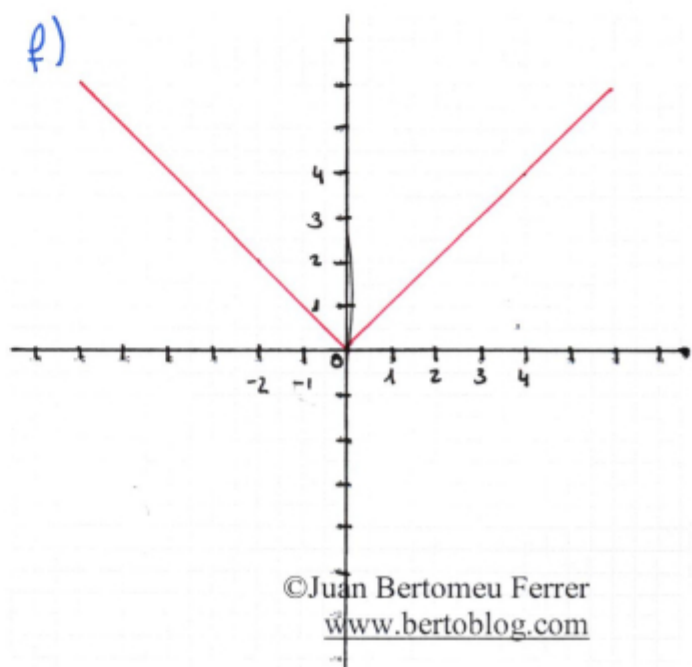
d)



e)



f)



a) Extremos relativos:

Mínimo relativo en $(0,2)$ y máximo relativo en $(3,4)$

Extremos absolutos en $[-2,4]$:

Máximo absoluto en $(3,4)$ y mínimo absoluto en $(4,0)$

b) Extremos relativos:

Máximo relativo en $(0,4)$

Extremos absolutos en $[-2,4]$:

Mínimo absoluto en $(-2,0)$ y máximo absoluto en $(0,4)$

c) Extremos relativos:

Máximo relativo en $(0,3)$ y mínimo relativo en $(2,1)$

Extremos absolutos en $[-2,4]$:

Mínimo absoluto en $(-2,0)$ y máximo absoluto en $(4,4)$

d) No presenta extremos relativos

Extremos absolutos en $[-2,4]$:

Máximo absoluto en $(-2,2)$ y mínimo absoluto en $(4, \frac{1}{2})$

e) No presenta extremos relativos

Extremos absolutos en $[-2,4]$

Mínimo absoluto en $(-2,-2)$ y máximo absoluto en $(4,3)$

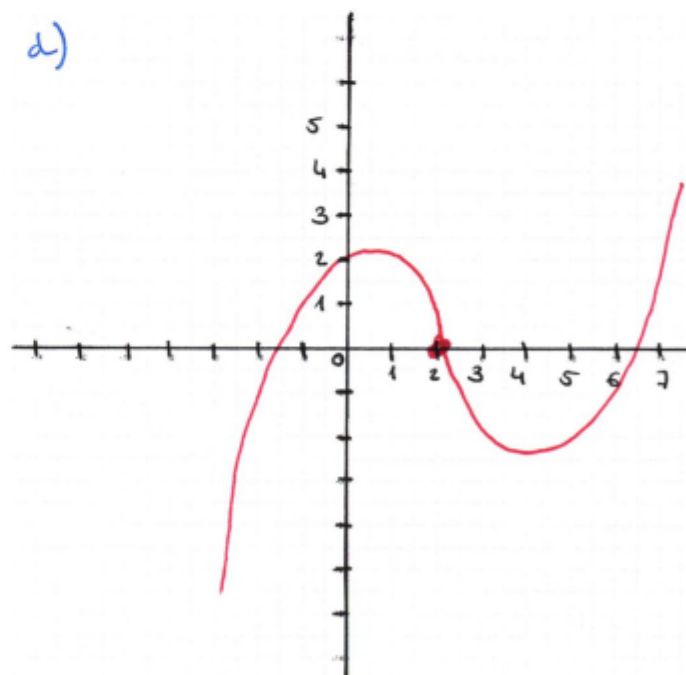
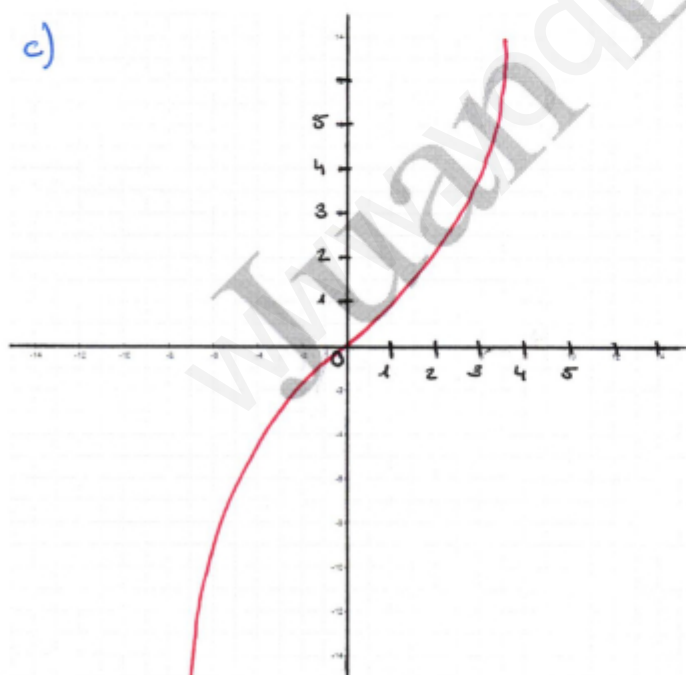
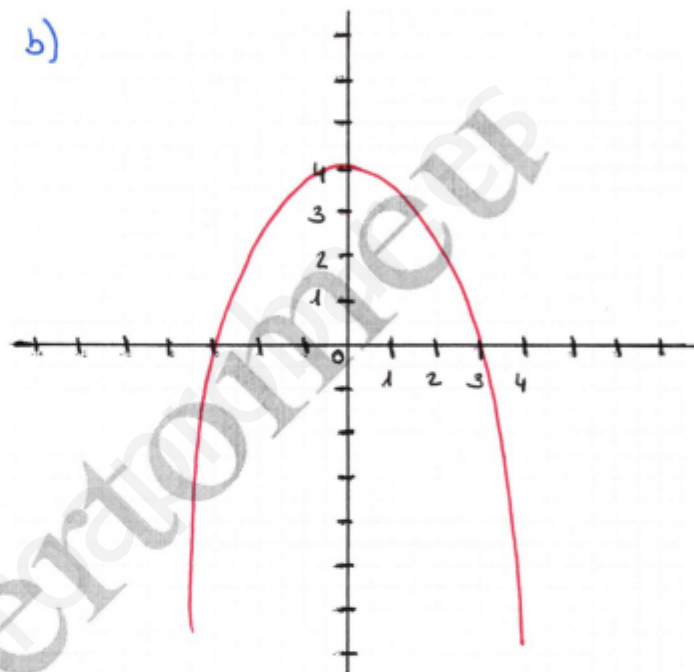
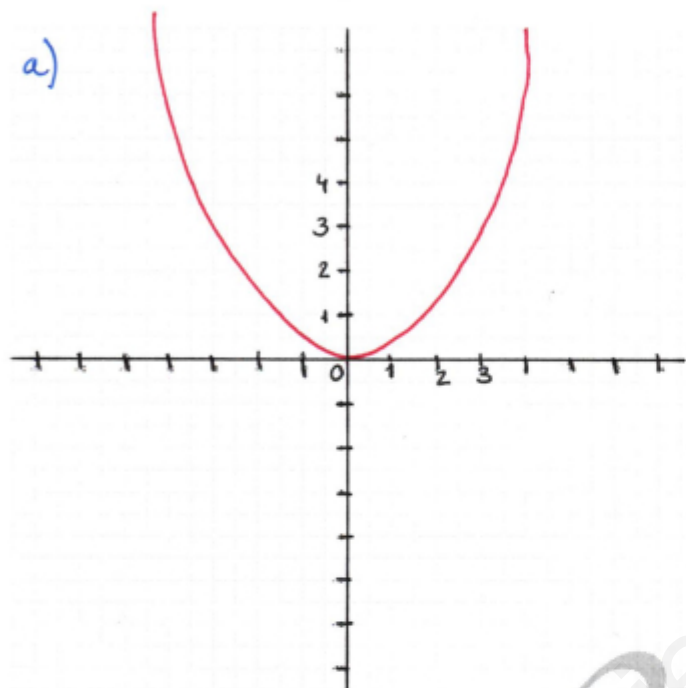
f) Extremos relativos:

Mínimo relativo en $(0,0)$

Extremos absolutos en $[-2,4]$

Mínimo absoluto en $(0,0)$ y máximo absoluto en $(4,4)$

- 21) A continuación se dan las gráficas de algunas funciones de las que debes decir sus intervalos de curvatura y localizar sus puntos de inflexión.



- a) La función es cóncava en $\mathbb{R}$ y no presenta puntos de inflexión.
- b) La función es convexa en $\mathbb{R}$ y no presenta puntos de inflexión.
- c) Cóncava: $(0, +\infty)$
Convexa: $(-\infty, 0)$
Punto de inflexión en $(0, 0)$
- d) Cóncava: $(2, +\infty)$
Convexa: $(-\infty, 2)$
Punto de inflexión en $(2, 0)$

