OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real "a" y resuélvelo en los casos en que sea compatible $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + (a+1)y - z = 1 \\ -2x - (2a+2)y + (a^2-2)z = a \end{cases}$ (3 puntos)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a+1 & -1 \\ -2 & -2a-2 & a^2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & a-1 & -3 \\ 0 & -2a+2 & a^2+2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a-1 & -3 \\ -2a+2 & a^2+2 \end{vmatrix} = \left(a^2+2\right)(a-1) - 6a + 6$$

$$|A| = \left(a^2+2\right)(a-1) - 6\,(a-1) = (a-1)\left(a^2+2-6\right) = (a-1)\left(a^2-4\right) = (a-1)(a-2)(a+2)$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow (a-1)(a-2)(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ a+2=0 \Rightarrow a=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re - \{-2\,,1\,,2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sist.\ Compatible\ Determinado$$

$Si\ a = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ de\ incógnitas$$

Sistema Compatible Indeterminado

$Si\ a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3$$

Sistema Incompatible

$Si\ a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3$$

Sistema Incompatible

$Cuando\ a = -2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow y + z = 0 \Rightarrow y = -z \Rightarrow x - (-z) - z = 1 \Rightarrow x + z - z = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$Solución \Rightarrow (x\,,y\,,z) = (1\,,-\lambda\,,\lambda)$$

Continuación del Problema A1 de la opción A

$Si\ a = -2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a+1 & -1 \\ a & -2a-2 & a^2-2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & a-1 & -3 \\ 0 & -4a-2 & a^2-2-2a \end{vmatrix}}{(a+2)(a-2)(a-1)} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} a-1 & -3 \\ -2(2a+1) & a^2-2a-2 \end{vmatrix}}{(a+2)(a-2)(a-1)}$$

$$x = \frac{(a-1)(a^2-2a-2)-6(2a+1)}{(a+2)(a-2)(a-1)} = \frac{a^3-2a^2-2a-a^2+2a+2-12a-6}{(a+2)(a-2)(a-1)} = \frac{a^3-3a^2-12a-4}{(a+2)(a-2)(a-1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & a & a^2-2 \end{vmatrix}}{(a+2)(a-2)(a-1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & a+2 & a^2+2 \end{vmatrix}}{(a+2)(a-2)(a-1)} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ a+2 & a^2+2 \end{vmatrix}}{(a+2)(a-2)(a-1)} = \frac{-3(a+2)}{(a+2)(a-2)(a-1)}$$

$$y = \frac{-3}{(a-2)(a-1)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ -2 & -2a-2 & a \end{vmatrix}}{(a+2)(a-2)(a-1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & -2a+2 & a+2 \end{vmatrix}}{(a+2)(a-2)(a-1)} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ -2(a-1) & a^2+2 \end{vmatrix}}{(a+2)(a-2)(a-1)} = \frac{(a-1)(a^2+2)}{(a+2)(a-2)(a-1)}$$

$$z = \frac{a^2+2}{(a+2)(a-2)} \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = \left(\frac{a^3-3a^2-12a-4}{(a+2)(a-2)(a-1)}\,,\,\frac{-3}{(a-2)(a-1)}\,,\,\frac{a^2+2}{(a+2)(a-2)} \right)$$

A2) Se considera el plano π que pasa por los puntos P ≡ (1,1,3), Q ≡ (2,1,0) y R ≡ (-1,-4,-1). Encuentra el punto de π que más cerca está del punto S ≡ (-3,1,1) (o sea, el pie de la perpendicular de S a π.

(2 puntos)

Hallaremos una recta **r** que pasa por **S** y que es perpendicular al plano π , por ello el vector director de la recta es el del plano; una vez hallada calcularemos la intersección de esta recta con el plano que es el punto **P** pedido.
Para hallar el vector director y la ecuación del plano tendremos los vectores **PQ**, **PR** y **PG**, en donde **G** es el vector generador del plano, los tres son coplanarios y el determinante de su matriz (que es el producto mixto de ellos) es nulo, porque lo es el volumen del paralelepípedo que determinan, siendo además la ecuación del plano π

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (2\,,1\,,0) - (1\,,1\,,3) = (1\,,0\,,-3) \\ \overrightarrow{PR} = (-1\,,-4\,,-1) - (1\,,1\,,3) = (-2\,,-5\,,-4) \equiv (2\,,5\,,4) \\ \overrightarrow{PQ} = (x\,,y\,,z) - (1\,,1\,,3) = (x-1\,,y-1\,,z-3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-6(y-1) + 5(z-3) + 15(x-1) - 4(y-1) = 0 \Rightarrow 15(x-1) - 10(y-1) + 5(z-3) = 0 \Rightarrow$$

$$3(x-1) - 2(y-1) + (z-3) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x - 2y + z - 4 = 0$$

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (3\,,-2\,,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow Inter\sec ción \Rightarrow 3(-3+3\lambda) - 2(1-2\lambda) + (1+\lambda) - 4 = 0$$

$$-9 + 9\lambda - 2 + 4\lambda + 1 + \lambda - 4 = 0 \Rightarrow 14\lambda - 14 = 0 \Rightarrow 14\lambda = 14 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P \begin{cases} x = -3 + 3 \cdot 1 \\ y = 1 - 2 \cdot 1 \\ z = 1 + 1 \end{cases} \Rightarrow P(0\,,-1\,,2)$$

A3.- Calcular los siguientes limites

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ tg\ x}{1-\cos(2x)} \qquad \textbf{(1 punto)}$$

$$\lim_{x\to 1} x^{\left[\frac{x}{sen(\pi x)}\right]} \qquad \textbf{(1 punto)}$$

$a)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ tg\ x}{1-\cos(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ tg\ x}{sen^2 x+\cos^2 x-\left(\cos^2 x-sen^2 x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ tg\ x}{sen^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x-sen^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ \frac{sen\ x}{\cos\ x}}{2sen^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ sen\ x}{2sen^2 x\cdot\cos\ x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2sen\ x\cdot\cos\ x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{sen(2x)}=\frac{0}{sen(2\cdot 0)}=\frac{0}{sen(0)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos(2x)}=\frac{1}{2\cos(2\cdot 0)}=\frac{1}{2\cos(0)}=\frac{1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}$$

$b)$

$$\lim_{x\to 1} x^{\left[\frac{x}{sen(\pi x)}\right]}=1^{\frac{1}{sen(\pi\cdot 1)}}=1^{\frac{1}{sen\,\pi}}=1^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}\Rightarrow Llamando\ L=\lim_{x\to 1} x^{\left[\frac{x}{sen(\pi x)}\right]}\Rightarrow \ln L=\ln\lim_{x\to 1} x^{\left[\frac{x}{sen(\pi x)}\right]}\Rightarrow$$

$$\ln L=\lim_{x\to 1}\ln\left\{x^{\left[\frac{x}{sen(\pi x)}\right]}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{sen(\pi x)}\cdot\ln x=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{sen(\pi x)}=\frac{1\cdot\ln 1}{sen(\pi\cdot 1)}=\frac{1\cdot 0}{sen(\pi)}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+\frac{1}{x}x}{\pi\cos(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{\pi\cos(\pi x)}=\frac{\ln 1+1}{\pi\cos(\pi\cdot 1)}=\frac{0+1}{\pi\cos(\pi)}=\frac{1}{\pi\cdot(-1)}=-\frac{1}{\pi}\Rightarrow$$

$$\ln L=-\frac{1}{\pi}\Rightarrow L=e^{-\frac{1}{\pi}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{\pi}}}=\frac{1}{\sqrt[\pi]{e}}$$

A4) Dadas las funciones f(x) = |x – 1| - 1 y g(x) = sen(πx/2), encuentra los dos puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 puntos)

$$x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow f(x)=\begin{cases}-(x-1)-1 & si \quad x<1\\ (x-1)-1 & si \quad x\geq 1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}-x+1-1 & si \quad x<1\\ x-1-1 & si \quad x\geq 1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(x)=\begin{cases}-x & si \quad x<1\\ x-2 & si \quad x\geq 1\end{cases}\\ g(x)=sen\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\end{cases} \Rightarrow$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases}\begin{cases}0=-x \Rightarrow x=0\\ 0=x-2 \Rightarrow x=2\end{cases}\\ 0=sen\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) \Rightarrow \dfrac{\pi}{2}x=0+\pi k \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\pi}{2}x=-\pi \Rightarrow x=\dfrac{-\pi\cdot 2}{\pi}=-2\\ \dfrac{\pi}{2}x=0 \Rightarrow x=\dfrac{0\cdot 2}{\pi}=0\\ \dfrac{\pi}{2}x=\pi \Rightarrow x=\dfrac{\pi\cdot 2}{\pi}=2\\ \dfrac{\pi}{2}x=2\pi \Rightarrow x=\dfrac{2\pi\cdot 2}{\pi}=4\end{cases}\end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=-0=0\\ g(0)=sen\left(\dfrac{\pi}{2}0\right)=sen(0)=0\end{cases}\\ x=2 \Rightarrow \begin{cases} f(2)=2-2=0\\ g(2)=sen\left(\dfrac{\pi}{2}2\right)=sen(\pi)=0\end{cases}\end{cases}$$

$$x=\frac{1}{2}\in(0,1) \Rightarrow \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}<0\\ g\left(\dfrac{1}{2}\right)=sen\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\right)=sen\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)\ es\ negativa\\ g(x)\ es\ positiva\end{cases}$$

$$x=\frac{3}{2}\in(1,2) \Rightarrow \begin{cases} f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}-2=-\dfrac{1}{2}<0\\ g\left(\dfrac{3}{2}\right)=sen\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\right)=sen\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)\ es\ negativa\\ g(x)\ es\ positiva\end{cases}$$

$$A=\int_0^1 sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx+\left|\int_0^1(-x)\,dx\right|+\int_1^2 sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx+\left|\int_1^2(x-2)\,dx\right| =$$

Continuación del Problema A4 de la opción A

$$A=\int_0^2 sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx+\int_0^1 x\,dx-\int_1^2 (x-2)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,t\,dt+\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^1-\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_1^2+2\cdot[x]_1^2$$

$$\frac{\pi}{2}x=t\Rightarrow\frac{\pi}{2}dx=dt\Rightarrow dx=\frac{2}{\pi}dt\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$$

$$A=\frac{2}{\pi}\cdot(-1)\cdot[\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\left(1^2-0^2\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(2^2-1^2\right)+2\cdot(2-1)=-\frac{2}{\pi}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+2$$

$$A=-\frac{2}{\pi}\cdot(0-1)+\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{2}=\frac{2}{\pi}+1=\frac{2+\pi}{\pi}\,u^2$$

Opción B

B1) Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcula A^{57} y A^{-68}. (2 puntos)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A^{57} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 57 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\ A^t \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-2} = \left(A^{-1}\right)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-3} = A^{-2} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-4} = A^{-3} A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-68} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 68 & 1 \end{pmatrix}$$

B2) Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases} \quad y \ a \quad s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{1}$$ (3 puntos)

El vector director de la recta **t** se genera por los puntos genérales de las dos rectas y es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas siendo sus productos escalares, respectivos, nulos

$$\begin{cases} y = -2 + 2x \Rightarrow x - 2\cdot(2x-2) + z - 3 = 0 \Rightarrow x - 4x + 4 + z - 3 = 0 \Rightarrow z = -1 + 3x \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\mu \\ y = 4 - \mu \\ z = -2 + \mu \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_t} = (2+2\mu\ ,\ 4-\mu\ ,\ -2+\mu) - (\lambda\ ,\ -2+2\lambda\ ,\ -1+3\lambda) = (2+2\mu-\lambda\ ,\ 6-\mu-2\lambda\ ,\ -1+\mu-3\lambda) \\ \overrightarrow{v_r} = (1\ ,\ 2\ ,\ 3) \\ \overrightarrow{v_s} = (2\ ,\ -1\ ,\ 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (2+2\mu-\lambda\ ,\ 6-\mu-2\lambda\ ,\ -1+\mu-3\lambda)\cdot(1\ ,\ 2\ ,\ 3) = 0 \\ \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_s} = 0 \Rightarrow (2+2\mu-\lambda\ ,\ 6-\mu-2\lambda\ ,\ -1+\mu-3\lambda)\cdot(2\ ,\ -1\ ,\ 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2+2\mu-\lambda+12-2\mu-4\lambda-3+3\mu-9\lambda = 0 \Rightarrow 11+3\mu-14\lambda = 0 \\ 4+4\mu-2\lambda-6+\mu+2\lambda-1+\mu-3\lambda = 0 \Rightarrow -3+6\mu-3\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -22-6\mu+28\lambda = 0 \\ -3+6\mu-3\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-25+25\lambda = 0 \Rightarrow 25\lambda = 25 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow -3+6\mu-3\cdot1 = 0 \Rightarrow 6\mu-6 = 0 \Rightarrow 6\mu = 6 \Rightarrow \mu = 1$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_t} = (2+2\cdot1-1\ ,\ 6-1-2\cdot1\ ,\ -1+1-3\cdot1) = (3\ ,\ 3\ ,\ -3) \equiv (1\ ,\ 1\ ,\ -1) \\ T\begin{cases} x = 1 \\ y = -2+2\cdot1 \Rightarrow T(1\ ,\ 0\ ,\ 2) \\ z = -1+3\cdot1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow t \equiv x-1 = y = \frac{z+1}{2}$$

B3) Halla las asíntotas de la función $y = \frac{4x^2 - 1}{2x + 4}$ (2 puntos)

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{2} = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{4 \cdot (-2)^2 - 1}{0} = \frac{15}{0} \Rightarrow \textit{Sin solución}$$

Asíntota vertical $\Rightarrow x = -2$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 1}{2x + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{4\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{2\frac{x}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{4 - \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{4 - \frac{1}{\infty}}{\frac{2}{\infty} + \frac{4}{\infty}} = \frac{4 - 0}{0 + 0} = \frac{4}{0} \Rightarrow \textit{Sin solución}$$

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 1}{2x + 4} = \frac{\infty}{-\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{4\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{2\frac{x}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{4 - \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{4 - \frac{1}{\infty}}{\frac{2}{-\infty} + \frac{4}{\infty}} = \frac{4 - 0}{0 + 0} = \frac{4}{0} \Rightarrow \textit{Sin solución}$$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{4x^2 - 1}{2x + 4}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 1}{2x^2 + 4x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{2\frac{x^2}{x^2} + 4\frac{x}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4 - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{4}{x}} = \frac{4 - \frac{1}{\infty}}{2 + \frac{4}{\infty}} = \frac{4 - 0}{2 + 0} = 2$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{4x^2 - 1}{2x + 4} - 2x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 1 - 4x^2 - 8x}{2x + 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{-1 - 8x}{2x + 4} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{1}{x} - 8\frac{x}{x}}{2\frac{x}{x} + \frac{4}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{1}{x} - 8}{2 + \frac{4}{x}} = \frac{-\frac{1}{\infty} - 8}{2 + \frac{4}{\infty}} = \frac{0 - 8}{2 + 0} = -4$$

Existe asíntota oblicua, $y = 2x - 4$, *cuando* $x \to \infty$

Continuación Problema B.3 de la opción B

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4x^2-1}{2x+4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-1}{2x^2+4x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{2\frac{x^2}{x^2}+4\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{4}{x}}=\frac{4-\frac{1}{\infty}}{2+\frac{4}{-\infty}}=\frac{4-0}{2+0}=2$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{4x^2-1}{2x+4}-2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-1-4x^2-8x}{2x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-8x}{2x+4}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x}-8\frac{x}{x}}{2\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x}-8}{2+\frac{4}{x}}=\frac{-\frac{1}{-\infty}-8}{2+\frac{4}{-\infty}}=\frac{0-8}{2+0}=-4$$

$$Existe\ asíntota\ oblicua,\ y=2x-4,\ cuando\ x\to-\infty$$

B4) Dada la función $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)e^{x^2}$ demuestra que existe un valor $\alpha\in(-1,1)$ tal que $f'(\alpha)=2$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (3 puntos)

<u>Teorema de Bolzano</u>

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b]**, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) ≠ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,\ b)$ tal que **f(c) = 0**

$$f'(x)=2\cdot\frac{\pi}{2}x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\cdot e^{x^2}+2x\ sen\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\cdot e^{x^2}=\left[\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)+2\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right]\cdot xe^{x^2}$$

$$\begin{cases} f'(1)=\left[\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot1^2\right)+2\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot1^2\right)\right]\cdot1\cdot e^{1^2}=\left[\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]e=(\pi\cdot0+2\cdot1)e=2e>0 \\ f(-1)=\left[\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot(-1)^2\right)+2\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot(-1)^2\right)\right]\cdot(-1)\cdot e^{(-1)^2}=\left[\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-2\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]e=-2e<0 \end{cases}$$

$$Haciendo\ \ g(x)=f'(x)-2\ en\ [-1\ ,1]\Rightarrow\begin{cases} g(1)=f'(1)-2=2e-2>0 \\ g(-1)=f'(-1)-2=-2e-2<0\end{cases}\Rightarrow Aplicando\ \ Bolzano$$

$$Existe\ ,al\ \ menos\ ,un\ \ punto\ \ \alpha\in(-1\ ,1)\ tal\ \ que\ \ g(\alpha)=0\Rightarrow 0=f'(c)-2\Rightarrow f'(\alpha)-2$$