Opción A

A.1- Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real **a** y resuélvelo en los casos que es compatible $\begin{cases} 2y+z=1 \\ (a-1)\,x+(a+2)y+z=0 \\ \left(a^2-a\right)x-ay=a+2 \end{cases}$

(3 puntos)

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ a-1 & a+2 & 1 \\ a^2-a & -a & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ a-1 & a & 0 \\ a^2-a & -a & 0 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} a-1 & a \\ a^2-a & -a \end{vmatrix}=-a\,(a-1)-a\cdot\left(a^2-a\right)=-a\left(a-1+a^2-a\right)$$

$$|A|=-a\left(a^2-1\right)=-a\,(a-1)(a+1)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow -a\,(a-1)(a+1)=0\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=-1 \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{-1\,,0\,,1\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Compatible\ Determinado$$

$Si\ a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Núm.\ de\ incógnitas\Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$Si\ a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A/B)=3\neq rang\ (A)=2\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A/B)=3\neq rang\ (A)=2\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a=-1\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow 2y+z=1\Rightarrow z=1-2y\Rightarrow -2x+y+1-2y=0\Rightarrow 2x=1-y\Rightarrow x=\frac{1-y}{2}$$

$$Solución\Rightarrow (x\,,y\,,z)=\left(\frac{1-\lambda}{2}\,,\lambda\,,1-2\lambda\right)$$

Continuación del Problema A.1 de la opción A

Cuando es Compatible Determinado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ a-1 & a+2 & 1 & 0 \\ a^2-a & -a & 0 & a+2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ a-1 & a & 0 & 0 \\ a^2-a & -a & 0 & a+2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ a-1+a^2-a & 0 & 0 & a+2 \\ a^2-a & -a & 0 & a+2 \end{array}\right) \equiv$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a+2 & 1 \\ a+2 & -a & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ a+2 & -a & 0 \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-1)} = \frac{1\cdot\begin{vmatrix} -1 & a \\ a+2 & -a \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-1)} = \frac{a-a(a+2)}{-a(a+1)(a-1)} = \frac{-a(a+1)}{-a(a+1)(a-1)} = \frac{1}{a-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 1 \\ a^2-a & a+2 & 0 \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-1)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-1 & -1 & 0 \\ a(a-1) & a+2 & 0 \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-1)} = \frac{1\cdot\begin{vmatrix} a-1 & -1 \\ a(a-1) & a+2 \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-1)} = \frac{(a-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & a+2 \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-1)} = \frac{a+2+a}{-a(a+1)} =$$

$$y = \frac{2a+2}{-a(a+1)} = \frac{2(a+1)}{-a(a+1)} = -\frac{2}{a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ a-1 & a+2 & 0 \\ a^2-a & -a & a+2 \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-1)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a+2 & 0 \\ a^2-a & -a-2a-4 & a+2 \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-1)} = \frac{1\cdot\begin{vmatrix} a-1 & a+2 \\ a(a-1) & -3a-4 \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-1)} = \frac{(a-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a+2 \\ a & -3a-4 \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-1)}$$

$$z = \frac{-3a-4-a^2-2a}{-a(a+1)} = \frac{-a^2-5a-4}{-a(a+1)} = \frac{a^2+5a+4}{a(a+1)} = \frac{(a+1)(a+4)}{a(a+1)} = \frac{a+4}{a}$$

$$a^2+5a+4=0 \Rightarrow \Delta = 5^2-4\cdot 1\cdot 4 = 9 \Rightarrow a = \frac{-5\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-5+3}{2} = -1 \\ a = \dfrac{-5-3}{2} = -4 \end{cases}$$

$$Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = \left(\frac{1}{a-1}\,,\,-\frac{2}{a}\,,\,\frac{a+4}{a}\right)$$

A2) Dados los puntos P ≡ (1,-2,3) y Q ≡ (3,0,1), encuentra el punto R que equidista de P y Q y está en la recta $r \equiv \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}$ (2 puntos)

Los módulos de los vectores **RP** y **RQ** son iguales

$$r \equiv \begin{cases} x = 4+\lambda \\ y = -1+3\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{RP} = (4+\lambda\,,-1+3\lambda\,,3+\lambda)-(1\,,-2\,,3) = (3+\lambda\,,1+3\lambda\,,\lambda) \\ \overrightarrow{RQ} = (4+\lambda\,,-1+3\lambda\,,3+\lambda)-(3\,,0\,,-1) = (1+\lambda\,,-1+3\lambda\,,4+\lambda) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{RP}\right| = \left|\overrightarrow{RQ}\right| \Rightarrow \sqrt{(3+\lambda)^2+(1+3\lambda)^2+\lambda^2} = \pm\sqrt{(1+\lambda)^2+(-1+3\lambda)^2+(4+\lambda)^2} \Rightarrow$$

$$9+6\lambda+\lambda^2+1+6\lambda+9\lambda^2+\lambda^2 = 1+2\lambda+\lambda^2+1-6\lambda+9\lambda^2+16+8\lambda+\lambda^2 \Rightarrow 10+12\lambda+11\lambda^2 = 18+4\lambda+11\lambda^2$$

$$10+12\lambda-18-4\lambda = 0 \Rightarrow -8+8\lambda = 0 \Rightarrow 8\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow R\begin{cases} x = 4+1 \\ y = -1+3\cdot 1 \Rightarrow R(5\,,2\,,4) \\ z = 3+1 \end{cases}$$

A3) Calcula las siguientes integrales incefinidas:

$$\int \frac{x^3-2}{x+3}dx \qquad \text{(1 punto)}$$

$$\int \frac{2}{x^3-x}dx \qquad \text{(1 punto)}$$

$$I_1=\int\frac{x^3-2}{x+3}\,dx=\int\left(x^2-3x+9\right)dx-\int\frac{29}{x+3}\,dx=\frac{1}{3}x^3-3\cdot\frac{1}{2}x^2+9x-29\int\frac{dt}{t}=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+9x-29\cdot\ln t$$

$$x+3=t\Rightarrow dx=dt$$

$$\begin{array}{rl} x^3-2 & \lvert\, x+3 \\ -x^3-3x^2 & x^2-3x+9 \\ -3x^2-2 & \\ 3x^2+9x & \\ 9x-2 & \\ -9x-27 & \\ -29 & \end{array}$$

$$I_1=\int\frac{x^3-2}{x+3}\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+9x-29\cdot\ln\left(x+3\right)+K=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+9x-\ln\left(x+3\right)^{29}+K$$

$$I_2=\int\frac{2}{x^3-x}\,dx=\int\frac{2}{x^3-x}\,dx=-2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x+1}=-2\ln x+\int\frac{dt}{t}+\int\frac{du}{u}=\ln x^{-2}+\ln t+\ln u$$

$$\begin{cases} x-1=t\Rightarrow dx=dt \\ x+1=u\Rightarrow dx=du \end{cases}$$

$$\frac{2}{x^3-x}=\frac{2}{\left(x^2-1\right)x}=\frac{2}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}\Rightarrow$$

$$A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)=2\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0\Rightarrow A(0-1)(0+1)+B\cdot0\cdot(0+1)+C\cdot0\cdot(0-1)=2\Rightarrow -A=2\Rightarrow A=-2 \\ x=1\Rightarrow A(1-1)(1+1)+B\cdot1\cdot(1+1)+C\cdot1\cdot(1-1)=2\Rightarrow 2B=2\Rightarrow B=1 \\ x=-1\Rightarrow A(-1-1)(-1+1)+B\cdot(-1)\cdot(-1+1)+C\cdot(-1)\cdot(-1-1)=2\Rightarrow 2C=2\Rightarrow C=1 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{2}{x^3-x}=\frac{-2}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$$

$$I_2=\ln\frac{t\cdot u}{x^2}=\ln\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x^2}=\ln\frac{x^2-1}{x^2}+K$$

A4) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (1, \sqrt{2})$ tal que $f'(\alpha) = 1$, siendo $f(x) = \ln\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)\right)$.

(3 puntos)

Teorema de Bolzano

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que **f(c) = 0**

Haciendo **g(x) = f'(x) – 1** en $[1, \sqrt{2}]$

$$f'(x) = \frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{4} x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x^2\right) = \frac{\frac{\pi}{2} x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)}{sen\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)} = \frac{\pi}{2} x \cdot \cot g\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)$$

$$g(x) = f'(x) - 1 = \frac{\frac{\pi}{2} x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)}{sen\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)} - 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} g(\sqrt{2}) = \dfrac{\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{2}^2\right)}{sen\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{2}^2\right)} - 1 = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)} - 1 = \dfrac{\pi \cdot 0}{1} - 1 = 0 - 1 = -1 < 0 \\ g(1) = \dfrac{\frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}1^2\right)}{sen\left(\frac{\pi}{4}1^2\right)} - 1 = \dfrac{\frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)} - 1 = \dfrac{\pi}{2} \cdot \cot g\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 = \dfrac{\pi}{2} \cdot 1 - 1 = \dfrac{\pi}{2} - 1 = \dfrac{\pi - 2}{2} > 0 \end{cases}$$

Como en el intervalo $[1, \sqrt{2}]$, **g(x)** toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign g($\sqrt{2}$) $\neq$ sign g(1)],** entonces existe, al menos, un punto $\alpha \in (1, \sqrt{2})$ tal que **g(c) = 0,**

y por ello **g(α) = f'(α) – 1 = 0,** y por ello **f'(α) = 1**

Opción B

B1) Encuentra todas las matrices B que cumplan AB = BA, siendo A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2 puntos)

$$Sea\ B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+2b \\ c+d & c+2d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+c = a+b \Rightarrow c = b \\ b+d = a+2b \\ a+2c = c+d \\ b+2d = c+2d \Rightarrow b = c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b+d = a+2b \Rightarrow d = a+b \\ a+2c = c+d \Rightarrow d = a+c \end{cases} \Rightarrow a+b = a+c \Rightarrow b = c \Rightarrow \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu+\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \Re$$

B2) Encuentra la ecuación continua de la recta "r" que pasa por el punto P ≡ (-3,-2,4) y corta a las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + z - 5 = 0 \end{cases} \quad y \quad r_2 \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{2} \qquad (3\ puntos)$$

Para ello analizaremos si las rectas tienen un punto común, si el sistema que resulta de igual sus coordenadas expresadas como ecuaciones paramétricas es compatible determinado son secantes y se cortan en un punto, si es compatible indeterminado las rectas coinciden
Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio.

$$\begin{cases} 5x-5=0 \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1 \Rightarrow z = 2\cdot 1 + y \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x=1+\mu \\ y=1 \\ z=-3+2\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=1+\mu \Rightarrow \mu=0 \\ \lambda=1 \\ 2+\lambda = -3+2\mu \Rightarrow 2+1 \neq -3+2\cdot 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Sistema Incompatible

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}} = (0\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{v_{r_2}} = (1\,,0\,,2) \end{cases} \Rightarrow \frac{0}{1} \neq \frac{1}{0} \Rightarrow No\ son\ proporcionales \Rightarrow No\ son\ patralelas$$

La rectas se cruzan en el espacio

Continuación del Problema B.2 de la Opción B

Determinada la posición relativa de las rectas tenemos que el vector general en que se apoya y que las une tiene que pasar por el punto dado en el enunciado

$$\overrightarrow{v_{r_1r_2}} = (1\,,\,\lambda\,,\,2+\lambda) - (1+\mu\,,\,1\,,\,-3+2\mu) = (-\mu\,,\,\lambda-1\,,\,5+\lambda-2\mu)$$

$$Ecuación\ general \Rightarrow \frac{x-1}{-\mu} = \frac{y-\lambda}{\lambda-1} = \frac{z-(2+\lambda)}{5+\lambda-2\mu} \Rightarrow Pasando\ por\ P \Rightarrow \frac{-3-1}{-\mu} = \frac{-2-\lambda}{\lambda-1} = \frac{4-(2+\lambda)}{5+\lambda-2\mu}$$

$$\frac{-4}{-\mu} = \frac{-2-\lambda}{\lambda-1} = \frac{2-\lambda}{5+\lambda-2\mu} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-4}{-\mu} = \dfrac{-2-\lambda}{\lambda-1} \Rightarrow -4\lambda+4 = 2\mu+\lambda\mu \Rightarrow 2\mu+\lambda\mu+4\lambda-4=0 \\ \dfrac{-4}{-\mu} = \dfrac{2-\lambda}{5+\lambda-2\mu} \Rightarrow -20-4\lambda+8\mu = -2\mu+\lambda\mu \Rightarrow 10\mu-\lambda\mu-4\lambda-20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda\mu = -2\mu-4\lambda+4 \\ \lambda\mu = 10\mu-4\lambda-20 \end{cases} \Rightarrow -2\mu-4\lambda+4 = 10\mu-4\lambda-20 \Rightarrow -12\mu+24=0 \Rightarrow 12\mu=24 \Rightarrow \mu=2$$

$$2\cdot 2-\lambda\cdot 2+4\lambda-4=0 \Rightarrow 2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$$

$$\overrightarrow{v_{r_1r_2}} = (-2\,,\,0-1\,,\,5+0-2\cdot 4) = (-2\,,\,-1\,,\,-3) \equiv (2\,,\,1\,,\,3) \Rightarrow$$

$$Ecuación\ de\ la\ recta\ pedida \Rightarrow \frac{x+3}{2} = y+2 = \frac{z-4}{3}$$

B3) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (-1,1)$ tal que $f'(\alpha) = 1/2$, siendo

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{2^{x^2+3x+3} + 3\cdot 2^{x+1} + 4}}{\sqrt{x^4+x^2+1}}. \qquad \text{(2 puntos)}$$

$$\begin{cases} f(-1) = \dfrac{\sqrt[4]{2^{(-1)^2+3\cdot(-1)+3} + 3\cdot 2^{(-1)+1} + 4}}{\sqrt{(-1)^4+(-1)^2+1}} = \dfrac{\sqrt[4]{2^1+3\cdot 2^0+4}}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{\sqrt[4]{2+3\cdot 1+4}}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{9}{3^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{9}{9}} = 1 \\ f(1) = \dfrac{\sqrt[4]{2^{1^2+3\cdot 1+3} + 3\cdot 2^{1+1} + 4}}{\sqrt{1^4+1^2+1}} = \dfrac{\sqrt[4]{2^7+3\cdot 2^2+4}}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{\sqrt[4]{2^2\left(2^5+3+1\right)}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt[4]{2^2\cdot 36}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt[4]{2^2 2^2 3^2}}{\sqrt[4]{3^2}} = 2\sqrt[4]{\dfrac{3^2}{3^2}} = 2 \end{cases}$$

$$f'(\alpha) = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

B4) Dadas las funciones f(x) = x³ – x y g(x) = 2x³ – 2x, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 puntos)

$$x^3 - x = 2x^3 - 2x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow \left(x^2 - 1\right)x = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} \in (-1\,,0) \Rightarrow \begin{cases} f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} > 0 \\ g\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{8} + \frac{2}{2} = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4} > \frac{3}{8} \Rightarrow g(x) > f(x) \Rightarrow Pos.$$

$$\frac{1}{2} \in (0\,,1) \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8} < 0 \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{8} - \frac{2}{2} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{4} < -\frac{3}{8} \Rightarrow g(x) < f(x) \Rightarrow Negativo$$

$$A = \int_{-1}^{0} \left(2x^3 - 2x\right) dx - \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) dx + \left|\int_{0}^{1} \left(2x^3 - 2x\right) dx\right| - \left|\int_{0}^{1} \left(x^3 - x\right) dx\right|$$

$$A = \int_{-1}^{0} \left(2x^3 - 2x\right) dx - \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) dx - \int_{0}^{1} \left(2x^3 - 2x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(x^3 - x\right) dx = \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) dx - \int_{0}^{1} \left(x^3 - x\right) dx$$

$$A = \frac{1}{4}\left[x^4\right]_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-1}^{0} - \frac{1}{4}\left[x^4\right]_{0}^{1} + \frac{1}{2}\left[x^4\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4}\left[0^4 - (-1)^4\right] - \frac{1}{2}\left[0^2 - (-1)^2\right] - \frac{1}{4}\left(1^4 - 0^4\right) + \frac{1}{2}\left(1^2 - 0^2\right)$$

$$A = \frac{1}{4}\cdot(-1) - \frac{1}{2}\cdot(-1) - \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,u^2$$