Opción A

A.1- Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real **a** y resuélvelo en los casos que es compatible $\begin{cases} (a-1)\,x+(a+2)y=5 \\ (1-a)\,x+(-1-a)y+2\,z=-4 \\ y+(a^2+a)z=2-a \end{cases}$ **(3 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix} a-1 & a+2 & 0 \\ 1-a & -(1+a) & 2 \\ 0 & 1 & a^2+a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-1 & a+2 & 0 \\ 0 & -1-a+a+2 & 2 \\ 0 & 1 & a^2+a \end{vmatrix}=(a-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a^2+a \end{vmatrix}=(a-1)\cdot(a^2+a-2)$$

$$Si\ |A|=0 \Rightarrow (a-1)\cdot(a^2+a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a^2+a-2=0 \Rightarrow \Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9 \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-1+3}{2}=1 \\ a=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \end{cases} \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re-\{-2\,,1\,\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Compatible.Deter\min ado$$

$Si\ a=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 6 & -7 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3 \Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & +1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & +1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

Cuando el Sistema es Compatible

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & a+2 & 0 & 5 \\ 1-a & -(1+a) & 2 & -4 \\ 0 & 1 & a^2+a & 2-a \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & a+2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a^2+a & 2-a \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & a+2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & 1-a \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$(a^2+a-2)z=1-a \Rightarrow z=\frac{1-a}{a^2+a-2}=\frac{-(a-1)}{(a-1)(a+2)}=-\frac{1}{a+2}$$

$$y+2\cdot\left(-\frac{1}{a+2}\right)=1 \Rightarrow y=1-\frac{2}{a+2}=\frac{a+2-2}{a+2}=\frac{a}{a+2} \Rightarrow (a-1)x+(a+2)\cdot\left(-\frac{1}{a+2}\right)=1-a \Rightarrow (a-1)x+1=1-a \Rightarrow$$

$$(a-1)x=-a \Rightarrow x=-\frac{a}{a-1} \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=\left(-\frac{a}{a-1}\,,\,\frac{a}{a+2}\,,\,-\frac{1}{a+2}\right)$$

A.2.- Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto **P(2 , 3 , -1)** y es paralela a los planos $\pi_1 \equiv 2x - y + 3z - 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y - 2z + 3 = 0$ **(2 puntos)**

El vector director de la rectas es perpendicular a los vectores directores de los planos dados y se halla calculando el producto vectorial de ambos

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (2\,,-1\,,3) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (1\,,1\,,-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_{\pi_1}} \wedge \overrightarrow{v_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} + \vec{k} - 3\vec{i} + 4\vec{j} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r} = (-1\,,7\,,3) \Rightarrow r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{7} = \frac{z+1}{3}$$

A.3.- Calcular las siguientes integrales indefinidas $a)\ \int \frac{dx}{x^2 - x}$ $\quad b)\ \int x\ sen\,(2x)\,dx$

(1 punto cada integral)

$a)$

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{(x-1)\,x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} = \frac{Ax + B\,(x-1)}{(x-1)\,x} \Rightarrow Ax + B\,(x-1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow A \cdot 0 + B\,(0-1) = 1 \\ x = 1 \Rightarrow A \cdot 1 + B\,(1-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -B = 1 \Rightarrow B = -1 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{(x-1)\,x} = \frac{1}{x-1} + \frac{(-1)}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{t} - \ln x = \ln t - \ln x = \ln \frac{x-1}{x} + K$$

$$x - 1 = t \Rightarrow dx = dt$$

$$b)\quad \int x\ sen\,(2x)\,dx = x \cdot \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right] - \int -\frac{1}{2}\cos(2x)\,dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx =$$

$$2x = u \Rightarrow 2\,dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$Por\ \ partes \Rightarrow \begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ sen\,(2x)\,dx = dv \Rightarrow v = \int sen\,(2x)\,dx = \int sen\,t\ \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int sen\,t\ dt = -\frac{1}{2}\cos t = -\frac{1}{2}\cos(2x) \end{cases}$$

$$2x = t \Rightarrow 2\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int x\ sen\,(2x)\,dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos u\ \frac{du}{2} = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\int \cos u\ du = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\,sen\,u$$

$$\int x\ sen\,(2x)\,dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\,sen\,(2x) + Q$$

A.4.- Dada las funciones $f(x)=tg\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6x}\right)+\frac{2}{\sqrt{17-2x-3x^2}}$ demuestra que existe un valor $\alpha\in(1\,,\,2)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Ayuda: $tg\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $tg\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(3 puntos)**

$$\begin{cases} f(1)=tg\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6\cdot 1}\right)+\frac{2}{\sqrt{17-2\cdot 1-3\cdot 1^2}}=tg\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\frac{2}{\sqrt{17-2-3}}=tg\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{2}{\sqrt{12}}=1+\frac{2}{2\sqrt{3}}=1+\frac{1}{\sqrt{3}} \\ f(2)=tg\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6\cdot 2}\right)+\frac{2}{\sqrt{17-2\cdot 2-3\cdot 2^2}}=tg\left(\frac{2\pi}{12}\right)+\frac{2}{\sqrt{17-4-12}}=tg\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{2}{\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}+2 \end{cases}$$

$$f'(\alpha)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+2\right)-\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2-1}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+2-1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2-1}=\frac{1}{1}=1,\ \alpha\in(1,2)$$

<u>Teorema del valor medio o de Lagrange</u>

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\,,b)$ tal que: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Geométricamente, como **f'(c) es** la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**

Opción B

B.1- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices que cumplan **ABA = A**

(2 puntos)

B será una matriz de orden **2 x 3**

$$Siendo\ B=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}a-c & b-d\\ e & f\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a-c & -a+c & b-d\\ e & -e & f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a-c=1\Rightarrow a=c+1\\ -a+c=-1\Rightarrow a=c+1\\ b-d=0\Rightarrow b=d\\ e=0\\ -e=0\Rightarrow e=0\\ f=1\end{cases}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}\lambda+1 & \alpha & \lambda\\ \alpha & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow Ejemplo\Rightarrow\begin{cases}\lambda=2\\ \alpha=3\end{cases}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}2+1 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

B.2.- Encuentra la ecuación continua de la recta **r** que pasa por el punto $P\equiv(-1\,,5\,,6)$ y corta a las rectas $r_1\equiv\begin{cases}x+z+1=0\\ 3x+y-z-8=0\end{cases}$ y $r_2\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$. **(3 puntos)**

Los vectores **PR_1** y **PR_2** son **proporcionales**, siendo **R_1** y **R_2** los puntos genéricos de las rectas $r_1\ y\ r_2$,(hallados en las ecuaciones paramétricas) con esa condición hallaremos el punto de corte **Q** con la recta r_1 (se podía hallar igualmente el punto en la recta r_2). El vector **QP** es el director de la recta buscada

$$\begin{cases}x=-z-1\Rightarrow 3\cdot(-1-z)+y-z=8\Rightarrow y-4z-3=8\Rightarrow r_1\equiv\begin{cases}x=-1-\lambda\\ y=11+4\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\\ r_2\equiv\begin{cases}x=-1+\alpha\\ y=2+2\alpha\\ z=2\alpha\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}PR_1=(-1-\lambda\,,11+4\lambda\,,\lambda)-(-1\,,5\,,6)=(-\lambda\,,6+4\lambda\,,\lambda-6)\\ PR_2=(-1+\alpha\,,2+2\alpha\,,2\alpha)-(-1\,,5\,,6)=(\alpha\,,-3+2\alpha\,,2\alpha-6)\end{cases}\Rightarrow\frac{-\lambda}{\alpha}=\frac{6+4\lambda}{-3+2\alpha}=\frac{\lambda-6}{2\alpha-6}$$

Continuación Problema B.2 de la opción B

$$\begin{cases} \dfrac{-\lambda}{\alpha} = \dfrac{6+4\lambda}{-3+2\alpha} \Rightarrow 3\lambda - 2\alpha\lambda = 6\alpha + 4\alpha\lambda \Rightarrow 3\lambda = 6\alpha + 6\alpha\lambda \Rightarrow 6\alpha(1+\lambda) = 3\lambda \\ \dfrac{-\lambda}{\alpha} = \dfrac{\lambda-6}{2\alpha-6} \Rightarrow -2\alpha\lambda + 6\lambda = \lambda\alpha - 6\alpha \Rightarrow 3\alpha\lambda - 6\alpha = 6\lambda \Rightarrow 3\alpha(\lambda-2) = 6\lambda \Rightarrow \alpha(\lambda-2) = 2\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{3\lambda}{6(1+\lambda)} = \dfrac{\lambda}{2(1+\lambda)} \\ \alpha = \dfrac{2\lambda}{\lambda-2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda}{2+2\lambda} = \frac{2\lambda}{\lambda-2} \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 4\lambda + 4\lambda^2 \Rightarrow 3\lambda^2 + 6\lambda = 0 \Rightarrow 3\lambda(\lambda+2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow Q_1 \equiv \begin{cases} x = -1-0 \\ y = 11 + 4\cdot 0 \Rightarrow Q_1 \equiv (-1, 11, 0) \\ z = 0 \end{cases} \\ \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow Q_2 \equiv \begin{cases} x = -1-(-2) \\ y = 11 + 4\cdot(-2) \Rightarrow Q_2 \equiv (1, 3, -2) \\ z = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Hay dos rectas que cumplen la condición siendo sus vectores directores **PQ**$_1$ y **PQ**$_2$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ_1} = (-1, 11, 0) - (-1, 5, 6) = (0, 6, -6) \equiv (0, 1, -1) \Rightarrow r \equiv \dfrac{x+1}{0} = y - 5 = \dfrac{z-6}{-1} \\ \overrightarrow{PQ_2} = (1, 3, -2) - (-1, 5, 6) = (2, -2, -8) \equiv (1, -1, -4) \Rightarrow r \equiv x + 1 = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-6}{-4} \end{cases}$$

B.3.- Dada la función $f(x) = \dfrac{\cos\left(x^3 + 2x^2 + 3x\right)}{\sqrt{x^2 + x + 2}}$ demuestra que existe un valor $\alpha \in (-2, 1)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Menciona el resultado teórico y justifica su uso **(2 puntos)**

<u>Teorema del valor medio o de Lagrange</u>

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que: $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

La función derivada es continua en **[-2 , 1]** y derivada en **(-2 , 1)**, entonces al menos un punto $\alpha \in (-2, 1)$ tal que: $f(1) - f(-2) = f'(\alpha)[1-(-2)] \Rightarrow f'(\alpha) = \dfrac{f(1) - f(-2)}{1+2}$

$$\begin{cases} f(1) = \dfrac{\cos\left(1^3 + 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right)}{\sqrt{1^2 + 1 + 2}} = \dfrac{\cos(1+2+3)}{\sqrt{1+3}} = \dfrac{\cos(6)}{\sqrt{4}} \\ f(-2) = \dfrac{\cos\left((-2)^3 + 2\cdot(-2)^2 + 3\cdot(-2)\right)}{\sqrt{(-2)^2 + (-2) + 2}} = \dfrac{\cos(-8+8-6)}{\sqrt{4-2+2}} = \dfrac{\cos(-6)}{\sqrt{4}} \Rightarrow \end{cases} \Rightarrow \cos(6) = \cos(-6)$$

$$f'(\alpha) = \frac{f(1) - f(-2)}{3} = \frac{\dfrac{\cos(6)}{2} - \dfrac{\cos(6)}{2}}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

B.3.- Dada la función f(x) = 1 - $\frac{1}{4}x^2$, encuentra los dos puntos en que corta al eje de abscisas. Calcula el área de cada una de las dos regiones en que se divide esa curva al círculo de centro **(0,0)** y radio **2.**
(3 puntos)

$$f(x)=0 \Rightarrow 1-\frac{1}{4}x^2=0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2=1 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \Rightarrow (-2\,,\,0) \\ x=2 \Rightarrow (2\,,\,0) \end{cases}$$

$$Circunferencia \Rightarrow x^2+y^2=2^2 \Rightarrow y^2=4-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2} \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{4-x^2} \\ y=-\sqrt{4-x^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ \ funciones \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x^2}=1-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow \sqrt{4-x^2}=\frac{4-x^2}{4} \Rightarrow 4\sqrt{4-x^2}=(4-x^2) \\ -\sqrt{4-x^2}=1-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow -\sqrt{4-x^2}=\frac{4-x^2}{4} \Rightarrow -4\sqrt{4-x^2}=(4-x^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16\,(4-x^2)=(4-x^2)^2 \\ 16\,(4-x^2)=(4-x^2)^2 \end{cases} \Rightarrow 64-16x^2=16-8x^2+x^4 \Rightarrow x^4+8x^2-48=0 \Rightarrow x^2=t \Rightarrow$$

$$t^4+8t-48=0 \Rightarrow \Delta=8^2-4\cdot1\cdot(-48)=64+192=256 \Rightarrow t=\frac{-8\pm\sqrt{256}}{2\cdot1} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{-8+16}{2}=\frac{8}{2}=4 \\ t=\frac{-8-16}{2}=-\frac{24}{2}=-12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \\ x^2=-12 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-12} \Rightarrow Sin\ solución \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(-x)=1-\frac{1}{4}(-x)^2=1-\frac{1}{4}x^2=f(x) \Rightarrow Simétrica\ respecto\ a\ OY \\ C(-x)=\sqrt{4-(-x)^2}=\sqrt{4-x^2}=C(x) \Rightarrow Simétrica\ respecto\ a\ OY \end{cases} \Rightarrow$$

Area de cada región

$$1\in(0\,,\,2) \Rightarrow \begin{cases} f(1)=1-\frac{1}{4}1^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \\ C(1)=\sqrt{4-1^2}=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}>\frac{3}{4} \Rightarrow C(x)>f(x)$$

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\int\frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=4\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}-\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=$$

$$A=\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx-\int_0^2\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)dx-$$