Opción A

A.1- Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real **a** y resuélvelo en los casos que es compatible $\begin{cases} 2a\ x-\left(a^2+a-2\right)y+2z=2 \\ a\ x-y+2\ z=0 \\ -a\ x+y-z=0 \end{cases}$ **(3 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix} 2a & a^2+a-2 & 2 \\ a & -1 & 2 \\ -a & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & a^2+a & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -a & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & a\,(a+1) \\ -a & 1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot a^2\ (a+1)$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow(-1)\cdot a^2\ (a+1)=0\Rightarrow\begin{cases} a^2=0\Rightarrow a=0 \\ a+1=0\Rightarrow a=-1 \end{cases}\begin{cases} (a-1)^2=0\Rightarrow a-1=0\Rightarrow a=1 \\ \\ 2-a=0\Rightarrow a=2 \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{-1\ ,\ 0\ \}\Rightarrow|A|\neq0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ ingcógnitas\Rightarrow Compatible.Deter\min ado$$

$Si\ a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3$$

$Sistema\ Incompatible$

Cuando el Sistema es Compatible

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2a & a^2+a-2 & 2 & 2 \\ a & -1 & 2 & 0 \\ -a & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a^2+a & 0 & 2 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a^2+a & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$z=0\Rightarrow\left(a^2+a\right)y=2\Rightarrow y=\frac{2}{a\,(a+1)}\Rightarrow-ax+\frac{2}{a\,(a+1)}-0=0\Rightarrow ax=\frac{2}{a\,(a+1)}\Rightarrow x=\frac{2}{a^2\ (a+1)}$$

$$Solución\Rightarrow(x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(\frac{2}{a^2\ (a+1)}\ ,\ \frac{2}{a\,(a+1)}\ ,\ 0\right)$$

A.2.- Dado el punto $P \equiv (1\,,1\,,3)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 3 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$ encuentra la ecuación general del plano π que es perpendicular a la recta **r** y que cumple que la d (**P** , π) = **3** **(2 puntos)**

El vector director del plano es el mismo que el de la recta y, además, debe de cumplir el valor de la distancia

$$y = x + 4 \Rightarrow 2x - (x+4) - 2z + 3 = 0 \Rightarrow x - 2z - 1 = 0 \Rightarrow 2z = x - 1 \Rightarrow z = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = \left(1\,,1\,,\frac{1}{2}\right) = (2\,,2\,,1) \Rightarrow \text{Asi pues la ecuación del plano es } 2x + 2y + z + D = 0 \Rightarrow$$

$$d(P\,,\pi) = 3 = \frac{|2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3 + D|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \Rightarrow \frac{7+D}{3} = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{7+D}{3} = 3 \Rightarrow 7 + D = 9 \Rightarrow D = 2 \\ \dfrac{7+D}{3} = -3 \Rightarrow 7 + D = -9 \Rightarrow D = -16 \end{cases}$$

$$\text{Hay dos planos} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 \equiv 2x + 2y + z + 2 = 0 \\ \pi_2 \equiv 2x + 2y + z - 16 = 0 \end{cases}$$

A.3.- Dada la función $f(x) = x\, e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ demuestra que existe un valor $\alpha \in (1\,,3)$ tal que $f'(\alpha) = 2$. Menciona el resultado teórico y justifica su uso

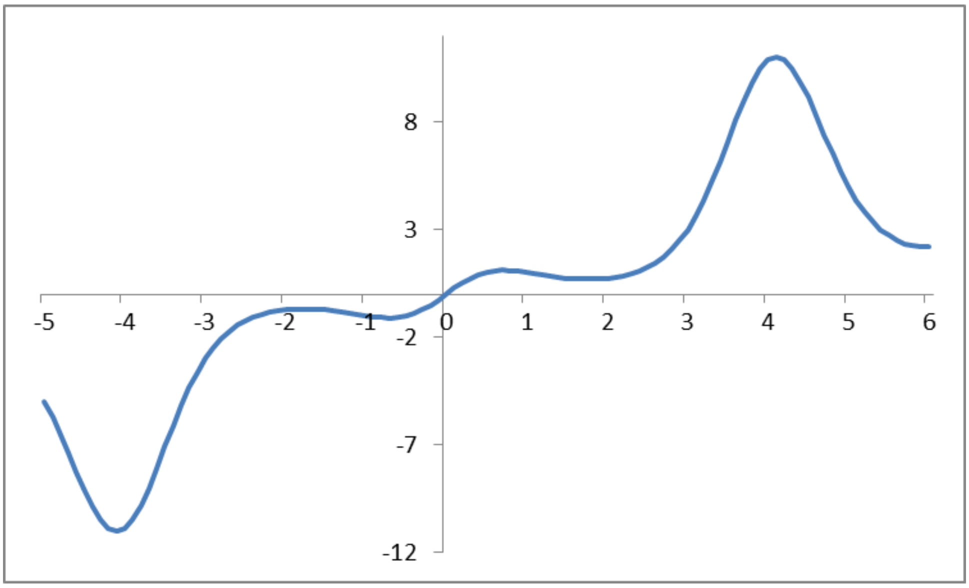
<u>Teorema del valor medio o de Lagrange</u>

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\,,b)$ tal que: $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

La función es continua en **[1 , 3]** y derivable en **(1 , 3)**, entonces al menos un punto $\alpha \in (1\,,3)$ tal que: $f(3) - f(1) = f'(\alpha)(3-1) \Rightarrow f'(\alpha) = \dfrac{f(3) - f(1)}{3-1}$

$\begin{cases} f(3) = 3 \cdot e^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = 3 \cdot e^0 = 3 \cdot 1 = 3 \\ f(1) = 1 \cdot e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1 \cdot e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow$ Estudiemos si hay un extremo relativo entre los extremos del intervalo

Continuación del Problema A.3 de la opción A



$$f'(x)=e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\left[1-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow$$

$$e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\left[1-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]=0\Rightarrow 1-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)=0\Rightarrow\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)=1\Rightarrow$$

$$sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{2}{\pi}x\Rightarrow Dificil\ de\ calcular\ el\ valor\ de\ x$$

$$Posibilidad\ de\ que\ exista\ un\ valor\ entre\ 1\ y\ 2$$

$$\begin{cases} f(3)=1\cdot e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}=1\cdot e^{0}=1\cdot 1=1 \\ f(2)=2\cdot e^{\cos(\pi)}=2\cdot e^{-1}=\dfrac{2}{e}\end{cases}\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{1-\frac{2}{e}}{2-1}=\frac{e-2}{e}$$

Por lo tanto no nos da lo determinado en el enunciado del problema

A.4.- Dada las funciones $f(x) = sen\,(\pi\ x)$ y **g(x) = x³ – x,** encuentra los tres puntos en que se cortan y calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de **f(x)** y **g(x)**
(3 puntos)

$$sen\,(\pi\ x) = x^3 - x \Rightarrow \begin{cases} sen\,(\pi\ x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \pi\ x = -\pi \Rightarrow x = -1 \\ \pi\ x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \pi\ x = \pi \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = n,\ n \in Z \\ x^3 - x = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)\,x = 0 \Rightarrow (x+1)\,x\,(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$f(-x) = sen\,(-\pi\ x) = -\ sen\,(\pi\ x) = -f(x) \Rightarrow \text{Simétrica respecto a OY}$$
$$g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -\ x^3 + x = -\left(x^3 - x\right) = -g(x) \Rightarrow \text{Simétrica respecto a OY}$$

$$A = 2\left[\int_0^1 sen\,(\pi\ x)\,dx - \int_0^1 \left(x^3 - x\right) dx\right] = 2\int_0^1 \left[sen\,(\pi\ x) - x^3 + x\right] dx = 2\int_0^1 sen\,(\pi\ x)\,dx - 2\int_0^1 x^3\ dx + 2\int_0^1 x\ dx$$
$$\pi x = t \Rightarrow \pi\ dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \pi \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sen\ t\ dt - 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_0^1 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^1 = -\frac{2}{\pi}\cdot\left[\cos t\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\cdot\left(1^4 - 0^4\right) + 1\cdot\left(1^2 - 0^2\right)$$
$$A = -\frac{2}{\pi}\cdot(\cos\pi - \cos 0) - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{2}{\pi}\cdot[(-1) - 1] + \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi} + \frac{1}{2} = \frac{8+\pi}{2\pi}\ u^2$$

Opción B

B.1- Encuentra los valores de $t \in \Re$ que hacen que la matriz **A** sea no regular $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & t+3 \\ 4 & -t & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(2 puntos)

Una matriz regular es una matriz que tiene inversa. Una matriz tiene inversa cuando su determinante no es nulo, por lo tanto la no regular es la que tiene el determinante nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & t+3 \\ 4 & -t & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & t+3 \\ 0 & 2-t & 1-2t-6 \\ 0 & 0 & 2-t-3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2-t & -2t-5 \\ 0 & -(t+1) \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 \cdot (2-t) \cdot (t+1)$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow (-2) \cdot (2-t) \cdot (t+1) = 0 \Rightarrow (2-t) \cdot (t+1) \Rightarrow \begin{cases} t+1 = 0 \Rightarrow t = -1 \\ 2-t = 0 \Rightarrow t = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$No\ es\ regular\ \ para \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow |A| = 0$$

B.2.- Los puntos $P \equiv (2\,,-2\,,1)\,,\, Q \equiv (-1\,,-2\,,1)\ y\ R \equiv (3\,,0\,,3)$ son tres vértices de un rombo. Encuentra la ecuación continúa de la recta **r** que pasa por el centro del rombo y es perpendicular al plano que contiene al rombo. **(3 puntos)**

Suponiendo que son tres vértices consecutivos el centro del rombo **O** es el punto medio del vector **PR**, y como es perpendicular al plano π que forman los tres puntos el vector director de la recta **r** es el del plano que es el producto vectorial de los vectores **PQ** y **PR**

$$O \equiv \begin{cases} x_O = \dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2} \\ y_O = \dfrac{-2+0}{2} = -1 \Rightarrow O \equiv \left(\dfrac{5}{2}\,,-1\,,2 \right) \Rightarrow \\ z_O = \dfrac{1+3}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-1\,,-2\,,1) - (2\,,-2\,,1) = (-3\,,0\,,0) \equiv (1\,,0\,,0) \\ \overrightarrow{PR} = (3\,,0\,,3) - (2\,,-2\,,1) = (1\,,2\,,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{k} - 2\vec{j} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r} = (0\,,-2\,,2) \equiv (0\,,1\,,-1) \Rightarrow r \equiv \frac{x - \frac{5}{2}}{0} = y+1 = \frac{z-2}{-1}$$

B.3.- Calcula los siguientes límites

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2+2n}\right)^{2n} \quad \textbf{(1 punto)}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right) \quad \textbf{(1 punto)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3}{n^2+2n}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+2\frac{n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1-\frac{3}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2+2n}\right)^{2n}=1^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n-3-2n}{n^2+2n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n}+\frac{-3-2n}{n^2+2n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3-2n}{n^2+2n}\right)^{2n}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n^2+2n}{3+2n}}\right)^{-\frac{n^2+2n}{3+2n}}\right]^{2n\cdot(-1)\cdot\frac{3+2n}{n^2+2n}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\cdot\frac{-6n-4n^2}{n^2+2n}}=e^{-4}=\frac{1}{e^4}\quad De\,(*)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-6n-4n^2}{n^2+2n}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6\frac{n}{n^2}-4\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+2\frac{n}{n^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{6}{n}-4}{1+\frac{2}{n}}=\frac{-\frac{6}{\infty}-4}{1+\frac{2}{\infty}}=\frac{0-4}{1+0}=-4\quad(*)$$

$$\lim_{x\to\infty}x\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)=\infty\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\infty}\right)=\infty\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\infty\cdot 0=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\infty}\right)}{\frac{1}{\infty}}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}{0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Utilizando\ L´Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-1)\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-2)}{(-1)}\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)=$$

$$=2\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\infty}\right)=2\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=2\cdot 1=2$$

B.4.- Dada la función $f(x) = x\, e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ demuestra que existe un valor $\alpha \in (1\,,\,3)$ tal que $f''(\alpha) = \pi$.(¡ojo!, derivada segunda de **f**) Menciona el resultado teórico y justifica su uso

<u>Teorema del valor medio o de Lagrange</u>

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\,,\,b)$ tal que: $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a) \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

La función derivada es continua en **[1 , 3]** y tiene segunda derivada en **(1 , 3)**, entonces al menos un punto $\alpha \in (1\,,\,3)$ tal que: $f'(3) - f'(1) = f''(\alpha)\,(3-1) \Rightarrow f''(\alpha) = \dfrac{f'(3)-f'(1)}{3-1}$

$$f'(x) = e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} + x\, e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \cdot \left[-sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] \cdot \frac{\pi}{2} = e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\left[1 - \frac{\pi}{2}\cdot x\; sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(3) = e^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}\left[1 - \dfrac{\pi}{2}\cdot 3 \cdot sen\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right] = e^{0}\left[1 - \dfrac{3\pi}{2}\cdot(-1)\right] = 1\cdot\left(1 + \dfrac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{2+3\pi}{2} \\ f'(1) = e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left[1 - \dfrac{\pi}{2}\cdot 1 \cdot sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = e^{0}\left[1 - \dfrac{\pi}{2}\cdot 1\right] = 1\cdot\left(1 - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2-\pi}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$f''(\alpha) = \frac{\dfrac{2+3\pi}{2} - \dfrac{2-\pi}{2}}{3-1} = \frac{\dfrac{2+3\pi-2+\pi}{2}}{2} = \frac{4\pi}{4} = \pi$$