Opción A

A.1- Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real **a** y resuélvelo en los casos que es compatible $\begin{cases} (a^2+a)x+2y+z=2 \\ (a^2+a)x+(a^2-a)y=4 \\ (a^2-a-2)y+(a^2-2a-1)z=2 \end{cases}$ **(3 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix} a^2+a & 2 & 1 \\ a^2+a & a^2-a & 0 \\ 0 & a^2-a-2 & a^2-2a-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2+a & 2 & 1 \\ 0 & a^2-a-2 & -1 \\ 0 & a^2-a-2 & a^2-2a-1 \end{vmatrix}=$$

$$|A|=(a^2+a)\cdot\begin{vmatrix} a^2-a-2 & -1 \\ a^2-a-2 & a^2-2a-1 \end{vmatrix}=(a^2+a)\cdot(a^2-a-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a^2-2a-1 \end{vmatrix}=$$

$$|A|=(a^2+a)\cdot(a^2-a-2)\cdot(a^2-2a-1+1)=a\,(a+1)(a^2-a-2)\cdot a\,(a-2)\Rightarrow$$

$$a^2-a-2=0\Rightarrow\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=9\geq0\Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{1+3}{2}=2 \\ a=\dfrac{1-3}{2}=-1 \end{cases}\Rightarrow$$

$$|A|=a^2\,(a+1)(a-2)(a-2)\cdot(a+1)=a^2\,(a+1)^2\,(a-2)^2$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow a^2\,(a+1)^2\,(a-2)^2=0\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ a+1=0\Rightarrow a=-1 \\ a-2=0\Rightarrow a=2 \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{-1\,,0\,,2\}\Rightarrow|A|\neq0\Rightarrow rang\,(A)=3=\text{Número de ingcógnitas}\Rightarrow Compatible.Deter\min ado$$

$Si\ a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)\Rightarrow rang\,(A)=2\neq rang\,(A/B)=3$$

Sistema Incompatible

$Si\ a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)\equiv\Rightarrow rang\,(A)=1\neq rang\,(A/B)=3$$

Sistema Incompatible

Continuación del Problema A.1 de la Opción A

$Si\ a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado \Rightarrow$

$-z = 2 \Rightarrow z = -2 \Rightarrow 6x + 2y - 2 = 2 \Rightarrow 6x + 2y = 4 \Rightarrow 3x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - 3x \Rightarrow$

$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (\lambda\ ,\ 2 - 3\lambda\ ,\ -2)$

$Solución\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a^2 + a & 2 & 1 & 2 \\ a^2 + a & a^2 - a & 0 & 4 \\ 0 & a^2 - a - 2 & a^2 - 2a - 1 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} a^2 + a & 2 & 1 & 2 \\ 0 & a^2 - a - 2 & -1 & 2 \\ 0 & a^2 - a - 2 & a^2 - 2a - 1 & 2 \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} a^2 + a & 2 & 1 & 2 \\ 0 & a^2 - a - 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 - 2a & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(a^2 - 2a\right) z = 0 \Rightarrow z = \frac{0}{a^2 - 2a} = 0$$

$$\left(a^2 - 2a\right) y - 0 = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{a^2 - 2a} \Rightarrow \left(a^2 + a\right) x + 2 \cdot \frac{2}{a^2 - 2a} + 0 = 2 \Rightarrow \left(a^2 + a\right) x = 2 - \frac{4}{a^2 - 2a}$$

$$\left(a^2 + a\right) x = \frac{2a^2 - 4a - 4}{a^2 - 2a} \Rightarrow x = \frac{2a^2 - 4a - 4}{\left(a^2 - 2a\right)\left(a^2 + 2a\right)} = \frac{2\left(a^2 - 2a - 2\right)}{\left(a^2 - 2a\right)\left(a^2 + 2a\right)}$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = \left[\frac{2\left(a^2 - 2a - 2\right)}{\left(a^2 - 2a\right)\left(a^2 + 2a\right)}\ ,\ \frac{2}{a^2 - 2a}\ ,\ 0\right]$$

A.2.- Encuentra el punto **R** que pertenece a la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{3}$ y equidista de los puntos $P \equiv (-1\,,1\,,2)$ **y** $Q \equiv (1\,,3\,,6)$ **(2 puntos)**

Los módulos de los vectores **PR** y **QR** son iguales

$$\begin{cases} R \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -3 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow R \equiv (-1+2\lambda\,,\,3-\lambda\,,\,-3+3\lambda) \\ P \equiv (-1\,,1\,,2) \\ Q \equiv (1\,,3\,,6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PR} = (-1+2\lambda\,,\,3-\lambda\,,\,-3+3\lambda) - (-1\,,1\,,2) \\ \overrightarrow{QR} = (-1+2\lambda\,,\,3-\lambda\,,\,-3+3\lambda) - (1\,,3\,,6) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PR} = (2\lambda\,,\,2-\lambda\,,\,-5+3\lambda) \\ \overrightarrow{QR} = (-2+2\lambda\,,\,-\lambda\,,\,-9+3\lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{(2\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (3\lambda-5)^2} \\ \left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{(2\lambda-2)^2 + (-\lambda)^2 + (3\lambda-9)^2} \end{cases} \Rightarrow \left|\overrightarrow{PR}\right| = \left|\overrightarrow{QR}\right| \Rightarrow$$

$$\sqrt{(2\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (3\lambda-5)^2} = \pm\sqrt{(2\lambda-2)^2 + (-\lambda)^2 + (3\lambda-9)^2} \Rightarrow$$

$$(2\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (3\lambda-5)^2 = (2\lambda-2)^2 + (-\lambda)^2 + (3\lambda-9)^2 \Rightarrow$$

$$4\lambda^2 + 4 - 4\lambda + \lambda^2 + 9\lambda^2 - 30\lambda + 25 = 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 + \lambda^2 + 9\lambda^2 - 54\lambda + 81 \Rightarrow -34\lambda + 25 = -62\lambda + 81 \Rightarrow$$

$$-34\lambda + 62\lambda = 81 - 25 \Rightarrow 28\lambda = 56 \Rightarrow \lambda = \frac{56}{28} = 2 \Rightarrow R \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\cdot 2 \\ y = 3 - 2 \\ z = -3 + 3\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow R \equiv (3\,,1\,,3)$$

A.3.- Halla el valor de $a \in \Re$ para que la función $\begin{cases} \sqrt{e^{3-x}} & si \quad x \le 0 \\ (1+x)^{\left(1+\frac{a}{x}\right)} & si \quad x > 0 \end{cases}$ sea continua en todo $\Re$

$$L = \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\left(1+\frac{a}{x}\right)} \Rightarrow \ln L = \lim_{x\to 0^+}\ln\left[(1+x)^{\left(1+\frac{a}{x}\right)}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{a}{x}\right)\cdot \ln\cdot(1+x) = \infty\cdot 0 = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{\left(1+\frac{a}{x}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{\frac{x+a}{x}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{\frac{x}{x+a}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(x+a)\cdot\ln(1+x)}{x} = \frac{(0+a)\cdot\ln(1+0)}{0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)+\frac{x+a}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0^+}\left[\ln(1+x)+\frac{x+a}{1+x}\right] = \ln(1+0)+\frac{0+a}{1+0} = 0+a = a \Rightarrow \ln L = a \Rightarrow L = e^a \ (*)$$

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \sqrt{e^{3-0}} = e^{\frac{3}{2}} \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = (1+0)^{\left(1+\frac{a}{0}\right)} = 1^\infty = e^a \ (*) \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow e^a = e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

A.4.- Dada la función $f(x) = sen\,(x\cos x)$ demuestra que existe un valor $\alpha \in \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f'(\alpha) = -1$. Menciona el resultado teórico y justifica su uso

Consideremos la función g(x) = f(x) + x = sen(x·cos(x)) + x; su derivada es

g'(x) = cos(x·cos(x))·(cos(x) – x·sen(x)) + 1.

Intentamos aplicarle a g' = f' + 1 el **Teorema de Bolzano** que dice:

Si g'(x) es continua en [a , b] y signo g'(a)·g'(b) < 0, entonces existe, al menos, un punto α ∈ (0, π/2) tal que g'(α) = 0

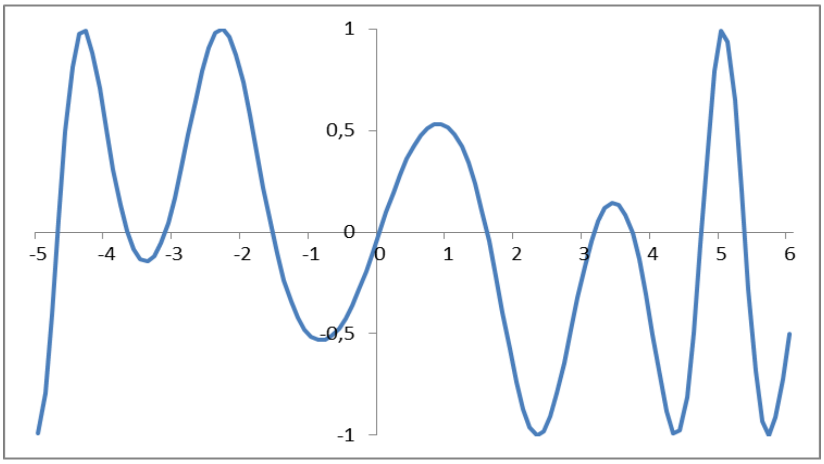
g'(x) = cos(x cos(x)) (cos(x) - x sen(x)) + 1 es continua en todo R, en particular en [0,π/2]

g'(0) = cos(0·cos(0))·(cos(0) – 0·sen(0)) + 1 = cos(0)·(1) + 1 = 2 > 0

g'(π/2) = cos(π/2·cos(π/2))·(cos(π/2) - π/2·sen(π/2)) + 1= cos(π/2·0)·(0 - π/2·sen(π/2)) + 1 = -π/2+1 ≅ -0'57 <0,

aplicándole el Teorema de Bolzano existe α ∈ (0, π/2) tal que g'(α) = 0 → f'(α) + 1 = 0 → f'(α) = -1

La curva tiene la forma



Opción B

B.1- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ encuentra todos las matrices **B** que cumplen que **AB = BA (2 puntos)**

$$Sea\ B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c & b-d\\ a+c & b+d\end{pmatrix}\\ BA=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & -a+b\\ c+d & -c+d\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a-c=a+b\Rightarrow c=-b\\ b-d=-a+b\Rightarrow d=a\\ a+c=c+d\Rightarrow a=d\\ b+d=-c+d\Rightarrow c=-b\end{cases}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}\lambda & \alpha\\ -\alpha & \lambda\end{pmatrix}$$

B.2.- Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas

$$r\equiv\begin{cases}2x+y+z+2=0\\ 3x+y+2z+1=0\end{cases}\quad y\quad s\equiv\frac{x+3}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{2}$$ **(3 puntos)**

Lo primero es conocer la posición relativa de las rectas ya que de ella dependerá la solución

Para ello analizaremos si las rectas tienen un punto común, si el sistema que resulta de igual sus coordenadas expresadas como ecuaciones paramétricas es compatible determinado son secantes y se cortan en un punto, si es compatible indeterminado las rectas coinciden
Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio.

$$\begin{cases} x+z-1=0\Rightarrow x=1-z\Rightarrow 2(1-z)+y+z+2=0\Rightarrow 4-z+y=0\Rightarrow y=-4+z\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=1-\mu\\ y=-4+\mu\\ z=\mu\end{cases}\\ s\equiv\begin{cases}x=-3+\lambda\\ y=\lambda\\ z=-3+2\lambda\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}1-\mu=-3+\lambda\\ -4+\mu=\lambda\\ \mu=-3+2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu+\lambda=4\\ \mu-\lambda=4\\ \mu-2\lambda=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\mu=8\Rightarrow\mu=4\Rightarrow\lambda=0\\ 4-2\cdot 0\neq 3\end{cases}\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(-1,1,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(1,1,2)\end{cases}\Rightarrow\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{1}\Rightarrow No\ son\ proporcionales$$

Las rectas se cruzan en el espacio

Continuación del Problema B.2 de la Opción B
Determinada la posición relativa de las rectas tenemos que el vector general en que se apoya y las une es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas y por lo tanto sus productos escalares nulos, con estos datos calcularemos el vector director v_{rs} y el punto **T** y la recta **t**

$$\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{v_{rs}}=(-3+\lambda\,,\,\lambda\,,\,-3+2\lambda)-(1-\mu\,,\,-4+\mu\,,\,\mu)=(-4+\lambda+\mu\,,\,\lambda+4-\mu\,,\,-3+2\lambda-\mu)\\ \overrightarrow{v_r}=(-1\,,1\,,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(1\,,1\,,\,2)\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{v_{rs}}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_{rs}}=0\Rightarrow(-4+\lambda+\mu\,,\,\lambda+4-\mu\,,\,-3+2\lambda-\mu)\cdot(-1\,,1\,,1)=0\\ \overrightarrow{v_s}\perp\overrightarrow{v_{rs}}\Rightarrow\overrightarrow{v_s}\cdot\overrightarrow{v_{rs}}=0\Rightarrow(-4+\lambda+\mu\,,\,\lambda+4-\mu\,,\,-3+2\lambda-\mu)\cdot(1\,,1\,,\,2)=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}4-\lambda-\mu+\lambda+4-\mu-3+2\lambda-\mu=0\\ -4+\lambda+\mu+\lambda+4-\mu-6+4\lambda-2\mu=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}5+2\lambda-3\mu=0\\ -6+6\lambda-2\mu=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}5+2\lambda-3\mu=0\\ -3+3\lambda-\mu=0\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}5+2\lambda-3\mu=0\\ 9-9\lambda+3\mu=0\end{array}\right.\Rightarrow 14-7\lambda=0\Rightarrow 14=7\lambda\Rightarrow\lambda=2\Rightarrow -3+3\cdot 2-\mu=0\Rightarrow\mu=3$$

$$\overrightarrow{v_t}=\overrightarrow{v_{rs}}=(-4+2+3\,,\,2+4-3\,,\,-3+2\cdot 2-3)=(1\,,\,3\,,\,-2)\Rightarrow T\left\{\begin{array}{l}x=-3+2\\ y=2\\ z=-3+2\cdot 2\end{array}\right.\Rightarrow T(-1\,,\,2\,,\,1)\Rightarrow$$

$$t\equiv x+1=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{-2}$$

B.3.- Hallar el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)=\frac{\pi}{2}x+sen\left(\pi\ x\right)$ en el intervalo cerrado $\left[0\ ,\ \frac{3}{2}\right]$ **(2 puntos)**

$$f'(x)=\frac{\pi}{2}+\pi\cos\left(\pi\ x\right)\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow\frac{\pi}{2}+\pi\cos\left(\pi\ x\right)=0\Rightarrow\pi\cos\left(\pi\ x\right)=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\cos\left(\pi\ x\right)=-\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\pi\ x=arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}\in\left(0\ ,\ \frac{3}{2}\right)\\ \pi\ x=arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{4\pi}{3\pi}=\frac{4}{3}\in\left(0\ ,\ \frac{3}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow$$

$$f''(x)=\pi^2\left[-sen\left(\pi\ x\right)\right]\Rightarrow\begin{cases}f''\left(\frac{2}{3}\right)=\pi^2\left[-sen\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right]=-\pi^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}<0\Rightarrow \textit{Máximo relativo}\\ f''\left(\frac{3}{2}\right)=\pi^2\left[-sen\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right]=-\pi^2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>0\Rightarrow \textit{Mínimo relativo}\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(0)=\frac{\pi}{2}\cdot 0+sen\left(\pi\cdot 0\right)=0+sen\ 0=0\\ f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3}+sen\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}\\ f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{3}+sen\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{2\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{6}\\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{2}+sen\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi-2}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{6}<0<\frac{\pi-2}{2}<\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$$

$$\begin{cases}\textit{Máximo absoluto}\Rightarrow x=\frac{2}{3}\\ \textit{Mínimo absoluto}\Rightarrow x=\frac{4}{3}\end{cases}$$

B.4.- Dada la función $f(x) = x\, e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ demuestra que existe un valor $\alpha \in (1\,,\,3)$ tal que $f''(\alpha) = \pi$.(¡ojo!, derivada segunda de **f**) Menciona el resultado teórico y justifica su uso

<u>Teorema del valor medio o de Lagrange</u>

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\,,\,b)$ tal que: $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

La función derivada es continua en **[1 , 3]** y tiene segunda derivada en **(1 , 3)**, entonces al menos un punto $\alpha \in (1\,,\,3)$ tal que: $f'(3) - f'(1) = f''(\alpha)(3-1) \Rightarrow f''(\alpha) = \dfrac{f'(3)-f'(1)}{3-1}$

$$f'(x) = e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} + x\, e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \cdot \left[-sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] \cdot \frac{\pi}{2} = e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\left[1 - \frac{\pi}{2} \cdot x\, sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(3) = e^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}\left[1 - \frac{\pi}{2} \cdot 3 \cdot sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = e^0\left[1 - \frac{3\pi}{2} \cdot (-1)\right] = 1 \cdot \left(1 + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2+3\pi}{2} \\ f'(1) = e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left[1 - \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = e^0\left[1 - \frac{\pi}{2} \cdot 1\right] = 1 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2-\pi}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$f''(\alpha) = \frac{\frac{2+3\pi}{2} - \frac{2-\pi}{2}}{3-1} = \frac{\frac{2+3\pi-2+\pi}{2}}{2} = \frac{4\pi}{4} = \pi$$