Opción A

A.1- Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a y resuélvelo en los casos que es compatible $\begin{cases} (a^2+a-2)x-2ay+az=-1 \\ (a^2+a-2)x-a^2y+(a+1)z=0 \\ (a^2+a-2)x-2ay+a^2z=3a-1 \end{cases}$ **(3 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix} a^2+a-2 & -2a & a \\ a^2+a-2 & -a^2 & a+1 \\ a^2+a-2 & -2a & a^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2+a-2 & -2a & a \\ 0 & 2a-a^2 & a+1-a \\ 0 & 0 & a^2-a \end{vmatrix}=(a^2+a-2)(2a-a^2)(a^2-a)=$$

$$|A|=(a+2)(a-1)\,a\,(2-a)\,a\,(a-1)=a^2(a-1)^2(a+2)(2-a)$$

$$a^2+a-2=0\Rightarrow \Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9\geq 0\Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{-1+3}{2}=1 \\ a=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \end{cases}$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow\begin{cases} a^2=0\Rightarrow a=0 \\ (a-1)^2=0\Rightarrow a-1=0\Rightarrow a=1 \\ a+2=0\Rightarrow a=-2 \\ 2-a=0\Rightarrow a=2 \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{-2,0,1,2\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ ingcógnitas\Rightarrow Compat.Deter\min ado$$

$Si\ a=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -7 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)\Rightarrow 0z=-8\Rightarrow z=-\frac{8}{0}\Rightarrow Sin\ solución$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ ingcógnitas\Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado\Rightarrow z=1\Rightarrow -2x=-1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow Solución\Rightarrow\left(\frac{1}{2},\lambda,1\right)$$

$Si\ a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)\Rightarrow 0z=-3\Rightarrow z=-\frac{3}{0}\Rightarrow Sin\ solución$$

$Sistema\ Incompatible$

Continuación del Problema A.1

$$Si\ a=2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=4 \Rightarrow z=\frac{4}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

$$Sistema\ Incompatible$$

Soluciones cuando el sistema es Compatible Determinado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a^2+a-2 & -2a & a & -1 \\ a^2+a-2 & -a^2 & a+1 & 0 \\ a^2+a-2 & -2a & a^2 & 3a-1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} a^2+a-2 & -2a & a & -1 \\ 0 & 2a-a^2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a & 3a \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(a^2-a\right)z=3a \Rightarrow a\left(a-1\right)z=3a \Rightarrow z=\frac{3a}{a\left(a-1\right)}=\frac{3}{a-1}$$

$$\left(2a-a^2\right)y+\frac{3}{a-1}=1 \Rightarrow a\left(2-a\right)y=1-\frac{3}{a-1} \Rightarrow a\left(2-a\right)y=\frac{a-1-3}{a-1} \Rightarrow a\left(2-a\right)y=\frac{a-4}{a-1} \Rightarrow$$

$$y=\frac{a-4}{a\left(a-1\right)\left(2-a\right)}$$

$$\left(a^2+a-2\right)x-2a\cdot\frac{a-4}{a\left(a-1\right)\left(2-a\right)}+a\cdot\frac{3}{a-1}=-1 \Rightarrow \left(a^2+a-2\right)x-\frac{2\left(a-4\right)}{\left(a-1\right)\left(2-a\right)}+\frac{3a}{a-1}=-1 \Rightarrow$$

$$\left(a+2\right)\left(a-1\right)x+\frac{3a\left(2-a\right)-2\left(a-4\right)}{\left(a-1\right)\left(2-a\right)}=-1 \Rightarrow \left(a+2\right)\left(a-1\right)x+\frac{6a-3a^2-2a+8}{\left(a-1\right)\left(2-a\right)}=-1$$

$$\left(a+2\right)\left(a-1\right)x+\frac{-3a^2+4a+8}{\left(a-1\right)\left(2-a\right)}=-1 \Rightarrow \left(a+2\right)\left(a-1\right)x=-\frac{-3a^2+4a+8}{\left(a-1\right)\left(2-a\right)}-1 \Rightarrow$$

$$\left(a+2\right)\left(a-1\right)x=\frac{3a^2-4a-8}{\left(a-1\right)\left(2-a\right)}-1 \Rightarrow \left(a+2\right)\left(a-1\right)x=\frac{3a^2-4a-8-\left(a-1\right)\left(2-a\right)}{\left(a-1\right)\left(2-a\right)} \Rightarrow$$

$$\left(a+2\right)\left(a-1\right)x=\frac{3a^2-4a-8-\left(2a-a^2-2+a\right)}{\left(a-1\right)\left(2-a\right)} \Rightarrow \left(a+2\right)\left(a-1\right) \Rightarrow x=\frac{3a^2-4a-8+a^2-3a+2}{\left(a-1\right)\left(2-a\right)}$$

$$x=\frac{4a^2-7a-6}{\left(a-1\right)\left(2-a\right)}$$

$$Solución \Rightarrow \left(x\ ,\ y\ ,\ z\right)=\left(\frac{4a^2-7a-6}{\left(a-1\right)\left(2-a\right)}\ ,\ \frac{a-4}{a\left(a-1\right)\left(2-a\right)}\ ,\ \frac{3}{a-1}\right)$$

A.2.- Los puntos $P \equiv (0\ ,-1\ ,3)\ ,Q \equiv (3\ ,0\ ,1)\ y\ R \equiv (2\ ,3\ ,3)$ son tres vértices distinto de un rombo Encuentra el cuarto vértice **(2 puntos)**
Suponiendo que los tres vértices son contiguos hallamos la recta **t** que une **PR** definido por el vector que une esos puntos y uno cualquiera de esos puntos.
Por el punto **Q** hallamos un plano π perpendicular a la recta que tiene como vector director el de la recta hallada que es perpendicular al vector **QG**, siendo **G** el punto genérico del plano a hallar, siendo el producto escalar, de ambos, nulo y la ecuación pedida del plano.
Hallado el punto de corte **T** del plano π con la recta **t**, este es el punto medio de **Q** y el cuarto vértice **S**

$$\overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{PR} = (2\ ,3\ ,3) - (0\ ,-1\ ,3) = (2\ ,4\ ,0) \equiv (1\ ,2\ ,0) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 0 + 1\lambda = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + 0\lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_t} = (1\ ,2\ ,0) \\ \overrightarrow{QG} = (x\ ,y\ ,z) - (3\ ,0\ ,1) = (x-3\ ,y\ ,z-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{QG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{QG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1\ ,2\ ,0)(x-3\ ,y\ ,z-1) = 0 \Rightarrow x - 3 + 2y = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 2y - 3 = 0$$

$$Punto\ de\ corte\ T\ entre\ plano\ \pi\ y\ recta\ t$$

$$\lambda + 2(-1 + 2\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda - 2 + 4\lambda - 3 = 0 \Rightarrow 5\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow T \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 2 \cdot 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T \equiv (1\ ,1\ ,3) \Rightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{3 + x_S}{2} \Rightarrow 3 + x_S = 2 \Rightarrow x_S = -1 \\ 1 = \dfrac{0 + y_S}{2} \Rightarrow y_S = 2 \\ 3 = \dfrac{1 + z_S}{2} \Rightarrow 1 + z_S = 6 \Rightarrow z_S = 5 \end{cases} \Rightarrow S \equiv (-1\ ,2\ ,5)$$

A.3.- Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int (2x+1)\, e^{-x} dx$ **(1 punto)**

b) $\int \dfrac{-4}{x^2 + 2x - 3} dx$ **(1 punto)**

$a)$

$$I = \int (2x+1)\, e^{-x} dx = -(2x+1)\, e^{-x} - \int (-e^{-x})\, 2dx = -(2x+1)\, e^{-x} + 2\int e^{-x} dx = -(2x+1)\, e^{-x} - 2e^{-x}$$

$$Por\ \ partes \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = u \Rightarrow du = 2\ dx \\ e^{-x} dx = dv \Rightarrow v = \int e^{-x} dx = \int e^{t}(-dt) = -\int e^{t} dt = -e^{t} = -e^{-x} \end{cases}$$

$$-x = t \Rightarrow -dx = dt \Rightarrow dx = -dt$$

$$I = -(2x + 1 + 2)\, e^{-x} = -(2x+3)\, e^{-x} + K$$

Continuación del Problema A.3

b)

$$x^2+2x-3=0 \Rightarrow \Delta = 2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16\geq 0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-2+4}{2}=1 \\ x=\dfrac{-2-4}{2}=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{-4}{x^2+2x-3}=\frac{-4}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)} \Rightarrow A(x+3)+B(x-1)=-4 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=-3 \Rightarrow A(-3+3)+B(-3-1)=-4 \Rightarrow -4B=-4 \Rightarrow B=1 \\ x=1 \Rightarrow A(1+3)+B(1-1)=-4 \Rightarrow 4A=-4 \Rightarrow A=-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{-4}{x^2+2x-3}=\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x+3}$$

$$\int \frac{-4}{x^2+2x-3}\,dx=-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x+3}=-\int\frac{dt}{t}+\int\frac{du}{u}=-\ln t+\ln u=\ln\frac{u}{t}=\ln\frac{x+3}{x-1}+K$$

$$\begin{cases} x-1=t \Rightarrow dx=dt \\ x+3=u \Rightarrow dx=du \end{cases}$$

A.4.- Dada la función $f(x)=\dfrac{2\,sen\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)}{2^{x\cos\left(\pi x^2\right)}\sqrt[3]{x^2-4x+11}}$ demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,3)$ tal que **f'(x) = 3**. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso **(3 puntos)**

Teorema del valor medio o de Lagrange

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a,b)$ tal que:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Geometricamente, como **f'(c)** la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**

$$\begin{cases} f(1)=\dfrac{2\,sen\left(\frac{\pi}{2}1^2\right)}{2^{1\cos\left(\pi 1^2\right)}\sqrt[3]{1^2-4\cdot 1+11}}=\dfrac{2\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2^{\cos(\pi)}\sqrt[3]{8}}=\dfrac{2\cdot 1}{2^{-1}\cdot 2}=\dfrac{2}{\frac{1}{2}\cdot 2}=\dfrac{2}{1}=2 \\ f(3)=\dfrac{2\,sen\left(\frac{\pi}{2}3^2\right)}{2^{3\cos\left(\pi 3^2\right)}\sqrt[3]{3^2-4\cdot 3+11}}=\dfrac{2\,sen\left(\frac{9\pi}{2}\right)}{2^{3\cos(9\pi)}\sqrt[3]{8}}=\dfrac{2\,sen\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{2^{3\cos(4\pi+\pi)}\cdot 2}=\dfrac{2\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2^{3\cos(\pi)}\cdot 2}=\dfrac{2\cdot 1}{2^{3(-1)}\cdot 2}=\dfrac{2}{\frac{1}{2^3}\cdot 2}=8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(3)-f(1)=f'(\alpha)\cdot(3-1) \Rightarrow f'(\alpha)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{8-2}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Opción B

B.1- Encuentra los valores de $t \in \Re$ para los que la matriz $\begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ t+1 & t+1 & 1 \\ 1-t & 0 & t-1 \end{pmatrix}$ no es regular **(2 puntos)**

Una matriz regular es una matriz que tiene inversa. Una matriz tiene inversa cuando su determinante no es nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ t+1 & t+1 & 1 \\ 1-t & 0 & t-1 \end{vmatrix} = t\,(t+1)\,(t-1) + (1-t) - 2\,(t+1)\,(1-t) - (t+1)\,(t-1) =$$

$$|A| = t\,(t+1)\,(t-1) - (t-1) + 2\,(t+1)\,(t-1) - (t+1)\,(t-1) = (t-1)\,[t\,(t+1) - 1 + 2\,(t+1) - (t+1)] =$$

$$|A| = (t-1)\,(t^2 + t - 1 + 2t + 2 - t - 1) = (t-1)\,(t^2 + 2t) = t\,(t-1)\,(t+2)$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow t\,(t-1)\,(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \\ t + 2 = 0 \Rightarrow t = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall t \in \Re - \{-2\ ,0\ ,1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow La\ matriz\ es\ regular\ (tiene\ inversa)$$

$$No\ es\ regular\ \ para \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow |A| = 0$$

B.2.- Encuentra la ecuación continúa de la recta **r** que pasa por el punto $P \equiv (0\ ,-2\ ,1)$ y corta a las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+4}{0} = \dfrac{z+1}{2}$ **(3 puntos)**

Sea **t** la recta que se busca

$$\begin{cases} 3x - 2z + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}z - 1 \Rightarrow \dfrac{2}{3}z - 1 - y - z + 1 = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{z}{3} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\mu \\ y = -\mu \\ z = 3\mu \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -4 \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v_t} = (-1 + 2\mu + 1 - \lambda\ , -\mu + 4\ , 3\mu + 1 - 2\lambda) = (2\mu - \lambda\ , -\mu + 4\ , 3\mu - 2\lambda + 1)$$

$$t \equiv \frac{0 - (-1 + \lambda)}{2\mu - \lambda} = \frac{-2 - (-4)}{-\mu + 4} = \frac{1 - (-1 + 2\lambda)}{3\mu - 2\lambda + 1} \Rightarrow t \equiv \frac{1 - \lambda}{2\mu - \lambda} = \frac{2}{-\mu + 4} = \frac{2 - 2\lambda}{3\mu - 2\lambda + 1} \Rightarrow$$

Continuación del Problema B.2

$$\begin{cases} \dfrac{1-\lambda}{2\mu-\lambda} = \dfrac{2}{-\mu+4} \Rightarrow -\mu+4+\lambda\mu-4\lambda = 4\mu-2\lambda \Rightarrow -5\mu+\lambda\mu-2\lambda+4=0 \\ \dfrac{2}{-\mu+4} = \dfrac{2-2\lambda}{3\mu-2\lambda+1} \Rightarrow \dfrac{1}{-\mu+4} = \dfrac{1-\lambda}{3\mu-2\lambda+1} \Rightarrow 3\mu-2\lambda+1 = -\mu+4+\lambda\mu-4\lambda \Rightarrow 4\mu-\lambda\mu+2\lambda-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\lambda-5)\mu = 2\lambda-4 \Rightarrow \mu = \dfrac{2\lambda-4}{\lambda-5} \\ (4-\lambda)\,\mu = 3-2\lambda \Rightarrow \mu = \dfrac{3-2\lambda}{4-\lambda} \end{cases} \Rightarrow \frac{2\lambda-4}{\lambda-5} = \frac{3-2\lambda}{4-\lambda} \Rightarrow 8\lambda-16-2\lambda^2+4\lambda = 3\lambda-15-2\lambda^2+10\lambda \Rightarrow$$

$$12\lambda-16 = 13\lambda-15 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \mu = \frac{3-2\cdot(-1)}{4-(-1)} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_t} = (2\cdot 1-(-1)\,,-1+4\,,3\cdot 1-2\cdot(-1)+1) = (3\,,3\,,6) \equiv (1\,,1\,,2) \Rightarrow t \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow$$

$$t \equiv x = y+2 = \frac{z-1}{2}$$

B.3.- Demuestra que la derivada de la función $f(x) = x^{sen\,x}$ se anula en algún punto del intervalo abierto $\left(\dfrac{\pi}{2}\,,\pi\right)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso

(2 puntos)

<u>Teorema de Bolzano</u>

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\,,b)$ tal que **f(c) = 0**

$$ln\,f(x) = ln\,x^{sen\,x} = sen\,x\cdot ln\,x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = cos\,x\cdot ln\,x + \frac{1}{x}\cdot sen\,x \Rightarrow f'(x) = f(x)\left(cos\,x\cdot ln\,x + \frac{sen\,x}{x}\right)$$

$$f'(x) = x^{sen\,x}\left(cos\,x\cdot ln\,x + \frac{sen\,x}{x}\right) \Rightarrow \begin{cases} f'(\pi) = \pi^{sen\,\pi}\left(cos\,\pi\cdot ln\,\pi + \dfrac{sen\,\pi}{\pi}\right) = \pi^0\left((-1)\cdot ln\,\pi + \dfrac{0}{\pi}\right) \\ f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi^{sen\frac{\pi}{2}}\left(cos\,\dfrac{\pi}{2}\cdot ln\,\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{sen\,\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\right) = \pi^1\left(0\cdot ln\,\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f'(\pi) = 1\,((-1)\cdot ln\,\pi + 0) = -ln\,\pi < 0 \\ f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi\left(0 + \dfrac{2}{\pi}\right) = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left[sign\;\; f'(\pi) \neq sign\;\; f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \Rightarrow Existe, al\;menos\;un\;punto\;c \in \left(\frac{\pi}{2}\,,\pi\right)\;tal\;que\;\; f'(c) = 0$$

B.4.- Dadas las funciones $f(x) = 5 - x^2 \;\; y \;\; g(x) = \frac{4}{x^2}$, calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de $f(x) \; y \; g(x)$ **(3 puntos)**

$$Puntos\ de\ corte\ de\ las\ \ funciones\ con\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases} \\ \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow 4 \neq 0 \Rightarrow No\ hay\ \ puntos\ de\ corte \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ \ funciones \Rightarrow 5 - x^2 = \frac{4}{x^2} \Rightarrow 5x^2 - x^4 = 4 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = t \Rightarrow$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 \geq 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{5+3}{2} = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \\ x^2 = \frac{5-3}{2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$Simetria \Rightarrow \begin{cases} f(-x) = 5 - (-x)^2 = 5 - x^2 = f(x) \Rightarrow Simétrica\ respecto\ a\ OY \\ g(-x) = \frac{4}{(-x)^2} = \frac{4}{x^2} = g(x) \Rightarrow Simétrica\ respecto\ a\ OY \end{cases}$$

$$Signo\ en\ x = \frac{3}{2} \in (1\ , 2) \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{3}{2}\right) = 5 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 5 - \frac{9}{4} = \frac{11}{4} = \frac{99}{36} \\ g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{4}{\frac{9}{4}} = \frac{16}{9} = \frac{64}{36} \end{cases} \Rightarrow \frac{99}{36} > \frac{64}{36}$$

$$A = 2\int_1^2 \left(5 - x^2\right) dx - 2\int_1^2 \frac{4}{x^2}\ dx = 10 \cdot [x]_1^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_1^2 - 8\int_1^2 x^{-2}\ dx$$

$$A = 10 \cdot (2-1) - \frac{2}{3} \cdot \left(2^3 - 1^3\right) - 8 \cdot \frac{1}{(-1)} \cdot \left[x^{-1}\right]_1^2 = 10 - \frac{14}{3} + 8 \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{16}{3} + 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$