## Opción A

**A.1-** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a y resuélvelo en los casos que es compatible $\begin{cases} (a-3)\,x-2z=2 \\ (a-3)\,x+(a-1)\,y-z=3 \\ (a-3)\,x+(a-1)\,y+(a+1)\,z=a^2-1 \end{cases}$

**(3 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix} a-3 & 0 & -2 \\ a-3 & a-1 & -1 \\ a-3 & a-1 & a+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-3 & 0 & -2 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & a+3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-3 & 0 & -2 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{vmatrix}=(a-3)(a-1)(a+2)$$

$$Si\ |A|=0 \Rightarrow \begin{cases} a+2=0 \Rightarrow a=-2 \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ a-3=0 \Rightarrow a=3 \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re-\{-2\,,1\,,3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ ingcógnitas \Rightarrow Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ a=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & -3 & -1 & 3 \\ -5 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ ingcógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado \Rightarrow$$

$$-3y+z=1 \Rightarrow z=1+3y \Rightarrow -5x-2\cdot(1+3y)=2 \Rightarrow -5x-2-6y=2 \Rightarrow 5x=-4-6y \Rightarrow x=-\frac{4}{5}-\frac{6}{5}y$$

$$Solución \Rightarrow (x\,,y\,,z)=\left(-\frac{4}{5}-\frac{6}{5}\lambda\,,\lambda\,,1+3\lambda\right)$$

$Si\ a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ 0z=-6 \Rightarrow z=-\frac{6}{0} \Rightarrow Sin\ solución \end{cases}$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ a=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -z=1 \Rightarrow z=-1 \\ 0z=2 \Rightarrow z=\frac{2}{0} \Rightarrow Sin\ solución \end{cases}$$

$Sistema\ Incompatible$

**Continuación del Problema A.1**

*Cuando el sistema es compatible determinado*

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 0 & -2\\ 3 & a-1 & -1\\ a^2-1 & a-1 & a+1\end{vmatrix}}{(a-3)(a-1)(a+2)}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 0 & -2\\ 3 & a-1 & -1\\ a^2-4 & 0 & a+2\end{vmatrix}}{(a-3)(a-1)(a+2)}=\frac{(a-1)\begin{vmatrix}2 & -2\\ a^2-4 & a+2\end{vmatrix}}{(a-3)(a-1)(a+2)}=\frac{2\cdot(a+2)+2\left(a^2-4\right)}{(a-3)(a+2)}$$

$$x=\frac{2\cdot(a+2)+2(a+2)(a-2)}{(a-3)(a+2)}=\frac{2\cdot(a+2)(1+a-2)}{(a-3)(a+2)}=\frac{2\cdot(a-1)}{a-3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a-3 & 2 & -2\\ a-3 & 3 & -1\\ a-3 & a^2-1 & a+1\end{vmatrix}}{(a-3)(a-1)(a+2)}=\frac{\begin{vmatrix}a-3 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & a^2-3 & a+3\end{vmatrix}}{(a-3)(a-1)(a+2)}=\frac{(a-3)\begin{vmatrix}1 & 1\\ a^2-3 & a+3\end{vmatrix}}{(a-3)(a-1)(a+2)}=\frac{(a+3)-\left(a^2-3\right)}{(a-1)(a+2)}=\frac{a+3-a^2+3}{(a-1)(a+2)}$$

$$y=\frac{-a^2+a+6}{(a-1)(a+2)}=\frac{(-1)\left(a^2-a-6\right)}{(a-1)(a+2)}=-\frac{(a-3)(a+2)}{(a-1)(a+2)}=-\frac{a-3}{a-1}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}a-3 & 0 & 2\\ a-3 & a-1 & 3\\ a-3 & a-1 & a^2-1\end{vmatrix}}{(a-3)(a-1)(a+2)}=\frac{\begin{vmatrix}a-3 & 0 & 2\\ 0 & a-1 & 1\\ 0 & a-1 & a^2-3\end{vmatrix}}{(a-3)(a-1)(a+2)}=\frac{(a-3)\begin{vmatrix}a-1 & 1\\ a-1 & a^2-3\end{vmatrix}}{(a-3)(a-1)(a+2)}=\frac{\begin{vmatrix}a-1 & 1\\ 0 & a^2-4\end{vmatrix}}{(a-1)(a+2)}=\frac{(a-1)\left(a^2-4\right)}{(a-1)(a+2)}$$

$$z=\frac{(a+2)(a-2)}{a+2}=a-2$$

**A.2**.- Los puntos $P\equiv(1,-1,3), Q\equiv(3,0,5)\ y\ R\equiv(2,1,1)$ son tres vértices de un cuadrado Encuentra el cuarto vértice **(2 puntos)**

Estudiemos cuales son los lados del cuadrado

$$\begin{cases}\overrightarrow{PQ}\equiv(3,0,5)-(1,-1,3)=(2,1,2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3\\ \overrightarrow{PR}\equiv(2,1,1)-(1,-1,3)=(1,2,-2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3\\ \overrightarrow{QR}\equiv(3,0,5)-(2,1,1)=(1,-1,4)\Rightarrow\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\end{cases}$$

Los lados del cuadrado son **PQ** y **PR**; siendo la diagonal **QR**

El punto medio del cuadrado **S** es el punto medio del vector **QR,** que es también el punto medio entre **P y T,** siendo este el vértice buscado

$$\begin{cases}x_S=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2}\\ y_S=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}\\ z_S=\frac{5+1}{2}=3\end{cases}\Rightarrow S\equiv\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},3\right)\Rightarrow\begin{cases}\frac{5}{2}=\frac{1+x_T}{2}\Rightarrow 2+2x_T=10\Rightarrow 2x_T=8\\ \frac{1}{2}=\frac{-1+y_T}{2}\Rightarrow -2+2y_T=2\Rightarrow 2y_T=4\Rightarrow T\equiv(4,2,3)\\ 3=\frac{3+z_T}{2}\Rightarrow 3+z_T=6\Rightarrow z_T=3\end{cases}$$

**A.3.-** Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{tg^2 x}{1-\cos(2x)}$ **(1 punto)**

b) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x+1}$ **(1 punto)**

$a)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg^2 x}{1-\cos(2x)} = \frac{tg^2 0}{1-\cos(2\cdot 0)} = \frac{0^2}{1-\cos(0)} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0} \frac{2tg\ x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{2\ sen(2x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot \frac{sen\ x}{\cos x}\cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{2\cdot 2\cdot sen\ x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen\ x}{\cos^3 x}}{2\cdot sen\ x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{2\cdot sen\ x\cos^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cdot \cos^3 x} = \frac{1}{2\cdot \cos^3 0} = \frac{1}{2\cdot 1^3} = \frac{1}{2}$$

$b)$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x+1} = \left(1+\frac{2}{\infty}\right)^{2\cdot\infty+1} = (1+0)^{\infty} = 1^{\infty} = \lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{2x+1} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{(2x+1)\cdot\frac{2}{x}} = e^{\lim_{x\to +\infty} \frac{4x+2}{x}} = e^4 \quad (De * 1)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4x+2}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4+\frac{2}{x}}{1} = 4+\frac{2}{\infty} = 4+0 = 4 \quad (*1)$$

**A.4.-** Dada la función $f(x) = \frac{(x^3 - x + 2)\cdot \ln\sqrt{e^{4x+7}}}{2x^4 + x^2 + 1}$ demuestra que existe un valor $\alpha \in (-1, 1)$ tal que **f'(** $\alpha$ **) = 1**. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso **(3 puntos)**

## Teorema del valor medio o de Lagrange

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Geometricamente, como **f'(c)** la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**

**Continuación del Problema A.1**

$$2x^4+x^2+1=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow 2t^2+t+1=0 \Rightarrow \Delta = 1^2-4\cdot 2\cdot 1=0=1-8=-7\leq 0 \Rightarrow No\ hay\ solución$$

*La función es continua en* $\forall x \in \Re$

$$f'(x)=\frac{\left(3x^2-1\right)\cdot ln\sqrt{e^{4x+7}}+\frac{1}{\sqrt{e^{4x+7}}}\cdot\frac{e^{4x+7}}{2\sqrt{e^{4x+7}}}\cdot 4\left(x^3-x+2\right)}{\left(2x^4+x^2+1\right)^2}=\frac{\left(3x^2-1\right)\cdot ln\sqrt{e^{4x+7}}+2\left(x^3-x+2\right)}{\left(2x^4+x^2+1\right)^2}$$

*Por la misma razon es derivable en* $\forall x \in \Re$

$$\left\{\begin{array}{l} f(-1)=\frac{\left[(-1)^3-(-1)+2\right]\cdot ln\sqrt{e^{4\cdot(-1)+7}}}{2\cdot(-1)^4+(-1)^2+1}=\frac{(-1+1+2)\cdot ln\sqrt{e^3}}{2\cdot 1+1+1}=\frac{2\cdot ln\, e^{\frac{3}{2}}}{4}=\frac{\frac{3}{2}ln\, e}{2}=\frac{3}{4} \\ f(1)=\frac{\left(1^3-1+2\right)\cdot ln\sqrt{e^{4\cdot 1+7}}}{2.1^4+1^2+1}=\frac{(1-1+2)\cdot ln\sqrt{e^{11}}}{2.1+1+1}=\frac{2\cdot ln\, e^{\frac{11}{2}}}{4}=\frac{\frac{11}{2}ln\, e}{2}=\frac{11}{4} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$f(1)-f(-1)=f'(\alpha)\cdot[1-(-1)] \Rightarrow f'(\alpha)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{\frac{11}{4}-\frac{3}{4}}{2}=\frac{\frac{8}{4}}{2}=\frac{8}{8}=1$$

# Opción B

**B.1-** Calcula el determinante de **(A + B)[3]** siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**(2 puntos)**

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 9 & 17 & 7 \\ 9 & 20 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(A+B)^3 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 9 & 17 & 7 \\ 9 & 20 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -17 & -7 \\ 41 & 80 & 38 \\ 52 & 107 & 56 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|(A+B)^3\right| = \begin{vmatrix} -9 & -17 & -7 \\ 41 & 80 & 38 \\ 52 & 107 & 56 \end{vmatrix} = 125$$

**B.2**.- Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + 2y - z - 1 = 0 \quad y \quad \pi_2 \equiv x - 2y + 2z - 3 = 0$, encuentra la ecuación general de los dos planos cuyos puntos equidistan de $\pi_1 \ y \ \pi_2$ **(3 puntos)**

Llamando **P(x, y, z)** a los puntos que lo cumplen y $\alpha \ y \ \beta$ a los planos que se buscan

$$d(P, \pi_1) = \pm d(P, \pi_2)$$

$$\frac{2x + 2y - z - 1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \pm \frac{x - 2y + 2z - 3}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \Rightarrow \frac{2x + 2y - z - 1}{3} = \pm \frac{x - 2y + 2z - 3}{3} \Rightarrow$$

$$2x + 2y - z - 1 = \pm(x - 2y + 2z - 3) \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - z - 1 = x - 2y + 2z - 3 \Rightarrow \alpha \equiv x + 4y - 3z + 2 = 0 \\ 2x + 2y - z - 1 = -x + 2y - 2z + 3 \Rightarrow \beta \equiv 3x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

**B.3.-** Dada la función $f(x) = (1-x)\cos(\pi x^3)$ demuestra que existe un valor $\alpha \in (0\ ,1)$.tal que $f'(\alpha) = \frac{1}{2}$ Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso **(2 puntos)**

**<u>Teorema del valor medio o de Lagrange</u>**

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ ,b)$ tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Geometricamente, como **f'(c)** la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**

$$La\ \ función\ es\ continua\ en\ \forall x \in \Re$$

$$f'(x) = -\cos(\pi x^3) - (1-x)\,3\pi x^2 \cdot sen(\pi x^3)$$
$$La\ \ función\ es\ derivable\ en\ \forall x \in \Re$$

$$\begin{cases} f(0) = (1-0)\cos(\pi \cdot 0^3) = 1 \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 = 1 \\ f(1) = (1-1)\cos(\pi \cdot 1^3) = 0 \cdot \cos(\pi) = 0 \cdot (-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(1) - f(0) = f'(\alpha) \cdot [1-0] \Rightarrow f'(\alpha) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{0-1}{1} = -1$$

**Creo que el enunciado está equivocado**

**B.4.-** Dadas las funciones $f(x)=x^2-1 \;\; y \;\; g(x)=3-x^2$, calcula el área de la región del semiplano $y\geq 0$ encerrada entre las gráficas de $f(x)\; y\; g(x)$ **(3 puntos)**

$$Puntos\ de\ corte\ de\ las\ funciones\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ 3-x^2=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow 3-x^2=x^2-1 \Rightarrow 2x^2-4=0 \Rightarrow 2x^2=4 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$Simetria \Rightarrow \begin{cases} g(-x)=3-(-x)^2=3-x^2=g(x) \Rightarrow Simétrica\ respecto\ a\ OY \\ f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=f(x) \Rightarrow Simétrica\ respecto\ a\ OY \end{cases}$$

$$Signo\ en\ x=\frac{1}{2}\in(0\ ,1) \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}<0 \\ g\left(\frac{1}{2}\right)=3-\left(\frac{1}{2}\right)^2=3-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}>0 \end{cases}$$

$$Signo\ en\ x=\frac{6}{5}\in(0\ ,1) \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{6}{5}\right)=\left(\frac{6}{5}\right)^2-1=\frac{36}{25}-1=\frac{11}{25}>0 \\ g\left(\frac{6}{5}\right)=3-\left(\frac{6}{5}\right)^2=3-\frac{36}{25}=\frac{39}{25}>0 \end{cases} \Rightarrow g(x)>f(x)$$

$$A=2\left|\int_0^1 (x^2-1)\,dx\right|+2\int_0^1 (3-x^2)\,dx+2\int_1^{\sqrt{2}} (3-x^2)\,dx-2\int_1^{\sqrt{2}} (x^2-1)\,dx=$$

$$A=-2\int_0^1 (x^2-1)\,dx+2\int_0^1 (3-x^2)\,dx+2\int_1^{\sqrt{2}} (3-x^2)\,dx-2\int_0^1 (x^2-1)\,dx=2\int_0^{\sqrt{2}} (3-x^2)\,dx-2\int_0^{\sqrt{2}} (x^2-1)\,dx$$

$$A=2\int_0^{\sqrt{2}} (4-2x^2)\,dx=4\int_0^{\sqrt{2}} (1-x^2)\,dx=4\cdot[x]_0^{\sqrt{2}}-4\cdot\frac{1}{3}\cdot[x^3]_0^{\sqrt{2}}=4\cdot(\sqrt{2}-0)-\frac{4}{3}\cdot\left(\sqrt{2^3}-0^3\right)$$

$$A=4\cdot\sqrt{2}-\frac{4}{3}\cdot 2\sqrt{2}=\left(4-\frac{8}{3}\right)\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\ u^2$$