Opción A

A.1- Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real **a** y resuélvelo en los casos que es compatible $\begin{cases} 2y + a^2 z = a + 4 \\ a\,x - y + (a+2)z = 1 \\ ax - 2y + az = 0 \end{cases}$ **(3 puntos)**

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & a^2 \\ a & -1 & a+2 \\ a & -2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & a^2 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & -2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a^2-4 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & -2 & a \end{vmatrix} = -\left[a\left(a^2-4\right)\right] = -a\cdot(a+2)(a-2)$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow -a\cdot(a+2)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a+2=0 \Rightarrow a=-2 \\ a-2=0 \Rightarrow a=2 \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re - \{-2\,,0\,,2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible .Determinado}$$

$Si\ a = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 2 \\ -4 & -1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado} \Rightarrow$$

$$y + 2z = 1 \Rightarrow y = 1 - 2z \Rightarrow 4x + 4 - 4z + 4z = 0 \Rightarrow 4x = -4 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (-1\,, 1-2\lambda\,,\lambda)$$

$Si\ a = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

$Si\ a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) =\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow$$

Sistema Incompatible

Continuación del Problema A.1

$$Cuando\ el\ sistema\ es\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a+4 & 2 & a^2 \\ 1 & -1 & a+2 \\ 0 & -2 & a \end{vmatrix}}{-a(a-2)(a+2)}=\frac{\begin{vmatrix} a+6 & 0 & a^2+2a+4 \\ 1 & -1 & a+2 \\ -2 & 0 & -a-4 \end{vmatrix}}{-a(a-2)(a+2)}=\frac{(-1)\cdot\begin{vmatrix} a+6 & (a+2)^2 \\ -2 & -(a+4) \end{vmatrix}}{-a(a-2)(a+2)}=\frac{-(a+6)(a+4)+2\cdot(a+2)^2}{a(a-2)(a+2)}$$

$$x=\frac{-a^2-10a-24+2a^2+4a+8}{a(a-2)(a+2)}=\frac{a^2-6a-16}{a(a-2)(a+2)}=\frac{(a-8)(a+2)}{a(a-2)(a+2)}=\frac{a-8}{a(a-2)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & a+4 & a^2 \\ a & 1 & a+2 \\ a & 0 & a \end{vmatrix}}{-a(a-2)(a+2)}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & a+4 & a^2 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & a \end{vmatrix}}{-a(a-2)(a+2)}=\frac{a\begin{vmatrix} a+4 & a^2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{-a(a-2)(a+2)}=\frac{2\cdot(a+4)-a^2}{-(a-2)(a+2)}=-\frac{-a^2+2a+8}{(a-2)(a+2)}$$

$$y=\frac{a^2-2a-8}{(a-2)(a+2)}=\frac{(a+2)(a-4)}{(a-2)(a+2)}=\frac{a-4}{a-2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & a+4 \\ a & -1 & 1 \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-a(a-2)(a+2)}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & a+4 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-a(a-2)(a+2)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix} 2 & a+4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-a(a-2)(a+2)}=-\frac{2-a-4}{(a-2)(a+2)}=\frac{a+2}{(a-2)(a+2)}=\frac{1}{a-2}$$

$$Solución \Rightarrow (x,y,z)=\left(\frac{a-8}{a(a-2)},\frac{a-4}{a-2},\frac{1}{a-2}\right)$$

A.2.- Encuentra la ecuación continua de la recta que está contenida en el plano $\pi \equiv x+2y-z+2=0$ y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y-z+1=0 \\ x+2y-2z-1=0 \end{cases}$

(2 puntos)

El vector director de la recta **s** que debemos hallar es perpendicular al de la recta y al del plano, el producto vectorial de ambos nos dará su valor, el punto **S** que la define es el de intersección de la recta **r** con el plano

$$\begin{cases} 2x+y-z+1=0 \\ -2x-4y+4z+2=0 \end{cases} \Rightarrow -3y+3z+3=0 \Rightarrow -y+z+1=0 \Rightarrow y=1+z \Rightarrow x+2+2z-2z-1=0$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1 \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(0,1,1) \\ \overrightarrow{v_\pi}=(1,2,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_\pi}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}-2\vec{i}=-3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_s}=(-3,1,-1)$$

Continuación del problema A.2

$$\pi \equiv -1+2\,(1+\lambda)-\lambda+2=0 \Rightarrow -1+2+2\lambda-\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=-3 \Rightarrow S\begin{cases} x=-1 \\ y=1+2\cdot(-3) \\ z=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_s=(-3\,,1\,,-1)\equiv(3\,,-1\,,1) \\ S=(-1\,,-5\,,-3) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{-1}=z+3$$

A.3.- Halla las integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{tg^3 x+tg\ x}{1+tg^2 x}\,dx$ **(1 punto)**

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x-2}$ **(1 punto)**

$a)$

$$\int \frac{(tg^2 x+1)\,tg\ x}{1+tg^2 x}\,dx=\int tg\ x\,dx=\int \frac{sen\ x}{\cos x}\,dx=\int \frac{-dt}{t}=-\int \frac{dt}{t}=-\ln t=-\ln\cos x+K$$

$$\cos x=t \Rightarrow -sen\ x\,dx=dt \Rightarrow sen\ x\,dx=-dt$$

$b)$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow \Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9\ge 0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1+3}{2}=1 \\ x=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A\,(x-1)+B\,(x+2)}{(x+2)(x-1)} \Rightarrow A\,(x-1)+B\,(x+2)=1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow A\,(1-1)+B\,(1+2)=1 \Rightarrow 3B=1 \Rightarrow B=\dfrac{1}{3} \\ x=-2 \Rightarrow A\,(-2-1)+B\,(-2+2)=1 \Rightarrow -3A=1 \Rightarrow A=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^2+x-2}=\frac{-\frac{1}{3}}{x+2}+\frac{\frac{1}{3}}{x-1}$$

$$I=\int \frac{dx}{x^2+x-2}=-\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2}+\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1}=-\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t}+\frac{1}{3}\int \frac{du}{u}=-\frac{1}{3}\cdot\ln t+\frac{1}{3}\cdot\ln u=\frac{1}{3}\cdot\ln\frac{u}{t}=\ln\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}$$

$$\begin{cases} x+2=t \Rightarrow dx=dt \\ x-1=u \Rightarrow dx=du \end{cases}$$

$$I=\ln\frac{\sqrt[3]{(x-1)\,(x+2)^2}}{x+2}+K$$

A.4.- Dada la función $f(x)=\sqrt{2+sen\left(\sqrt[3]{x+1}\right)+sen\left(\pi-\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\right)}$ demuestra que existe un valor $\alpha \in (1\ ,2)$ tal que **f'(** α **) = 0**. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso **(3 puntos)**

<u>Teorema del valor medio o de Lagrange</u>

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ ,b)$ tal que: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Geometricamente, como **f'(c)** es la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**

$$\left\{\begin{array}{l} f(1)=\sqrt{2+sen\left(\sqrt[3]{1+1}\right)+sen\left(\pi-\sqrt[3]{1+\frac{2}{1}}\right)}=\sqrt{2+sen\left(\sqrt[3]{2}\right)+sen\left(\pi-\sqrt[3]{3}\right)} \\ f(2)=\sqrt{2+sen\left(\sqrt[3]{2+1}\right)+sen\left(\pi-\sqrt[3]{1+\frac{2}{2}}\right)}=\sqrt{2+sen\left(\sqrt[3]{3}\right)+sen\left(\pi-\sqrt[3]{2}\right)} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$Como \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen\left(\pi-\sqrt[3]{3}\right)=sen\,\pi\cdot\cos\left(\sqrt[3]{3}\right)-\cos\pi\cdot sen\left(\sqrt[3]{3}\right)=0\cdot\cos\left(\sqrt[3]{3}\right)-(-1)\cdot sen\left(\sqrt[3]{3}\right)=sen\left(\sqrt[3]{3}\right) \\ sen\left(\pi-\sqrt[3]{2}\right)=sen\,\pi\cdot\cos\left(\sqrt[3]{2}\right)-\cos\pi\cdot sen\left(\sqrt[3]{2}\right)=0\cdot\cos\left(\sqrt[3]{2}\right)-(-1)\cdot sen\left(\sqrt[3]{2}\right)=sen\left(\sqrt[3]{2}\right) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1)=\sqrt{2+sen\left(\sqrt[3]{2}\right)+sen\left(\sqrt[3]{3}\right)} \\ f(2)=\sqrt{2+sen\left(\sqrt[3]{3}\right)+sen\left(\sqrt[3]{2}\right)} \end{array}\right. \Rightarrow f(1)=f(2) \Rightarrow f'(\alpha)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{0}{1}=0$$

También cumple el **teorema de Rolle**

Sea **f(x)** una función continua en **[a , b],** derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ ,b)$ tal que **f'(c) = 0**

Siendo **f(2) = f(1)** entonces existe, al menos, un punto $c \in (1\ ,2)$ tal que **f'(c) = 0**

Opción B

B.1- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ encuentra todas las matrices **C** tal que cumplen AC = CA

(2 puntos)

$$Siendo\ C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \\ CA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 2b \Rightarrow b - 2b = 0 \Rightarrow (b-2)b = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \\ 2c = c \Rightarrow 2c - c = 0 \Rightarrow (c-2)\,c = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c - 2 = 0 \Rightarrow c = 2 \end{cases} \\ 2d = 2d \Rightarrow d = d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & d \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & d \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & d \end{pmatrix} \end{cases}$$

B.2.- Encuentra la ecuación continúa de la recta que corta perpendicularmente a

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y - z + 2 = 0 \\ 5x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$$ **(3 puntos)**

Sea **t** la recta que se busca, su vector director es el formado por los puntos genéricos de la rectas ya que se apoya en ellas, y el producto escalar de él con cada uno de los vectores directores de las rectas **r** y **s** es nulo. Calculados los parámetros hallaremos uno de los puntos **T** de corte, de la recta **t** con una de las rectas dadas, que con el vector director hallado determinaran la ecuación de la recta buscada

$$\begin{cases} -3x + y + z - 2 = 0 \\ 5x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = -3 + 2x \Rightarrow 3x + 3 - 2x - z + 2 = 0 \Rightarrow z = 5 + x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases} \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = -1 + \mu \\ z = -\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (\lambda - 1 - 2\mu \,, -3 + 2\lambda + 1 - \mu \,, 5 + \lambda + \mu)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_t} = (-1 + \lambda - 2\mu \,, -2 + 2\lambda - \mu \,, 5 + \lambda + \mu) \\ \overrightarrow{v_r} = (1 \,, 2 \,, 1) \\ \overrightarrow{v_s} = (2 \,, 1 \,, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \\ \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (-1 + \lambda - 2\mu \,, -2 + 2\lambda - \mu \,, 5 + \lambda + \mu) \cdot (1 \,, 2 \,, 1) = 0 \Rightarrow -1 + \lambda - 2\mu - 4 + 4\lambda - 2\mu + 5 + \lambda + \mu = 0 \\ (-1 + \lambda - 2\mu \,, -2 + 2\lambda - \mu \,, 5 + \lambda + \mu) \cdot (2 \,, 1 \,, -1) = 0 \Rightarrow -2 + 2\lambda - 4\mu - 2 + 2\lambda - \mu - 5 - \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6\lambda - 3\mu = 0 \Rightarrow 2\lambda - \mu = 0 \\ -9 + 3\lambda - 6\mu = 0 \Rightarrow -3 + \lambda - 2\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu = 2\lambda \Rightarrow -3 + \lambda - 4\lambda = 0 \Rightarrow -3 - 3\lambda = 0 \Rightarrow -3\lambda = 3 \Rightarrow$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow \mu = 2 \cdot (-1) = -2 \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = [-1 + (-1) - 2 \cdot (-2) \,, -2 + 2 \cdot (-1) - (-2) \,, 5 + (-1) + (-2)]$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_t} = (2 \,, -2 \,, 2) \equiv (1 \,, -1 \,, 1) \\ T \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 + 2 \cdot (-1) = -5 \\ z = 5 + (-1) = 4 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow t \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-4}{1}$$

B.3.- Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x) = \cos x + sen\ x$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso **(2 puntos)**

Teorema de Bolzano

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a , b)$ tal que **f(c) = 0**

$$f'(x) = -sen\ x + \cos x$$

Como la función derivada es continua en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ y derivable en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ y siendo los valores de esa función derivada en los extremos del intervalo

$$\begin{cases} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 0 = -1 < 0 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -(-1) + 0 = 1 + 0 = 1 > 0 \end{cases}$$

se cumple que **[sign f' ($\frac{\pi}{2}$) $\neq$ sign f' ($\frac{3\pi}{2}$)]**, entonces existe, al menos, un punto $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ tal que $f'(\alpha) = 0$ en donde hay un máximo o un mínimo

Sabiendo que la función es continua en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ y derivable en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ y siendo los valores de esa función en los extremos del intervalo

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1 = 1 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + (-1) = -1 \end{cases}$$

se cumple que **[sign f ($\frac{\pi}{2}$) $\neq$ sign f ($\frac{3\pi}{2}$)]**, entonces existe, al menos, un punto $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ tal que $f(\beta) = 0$ indica que la función es decreciente en el principio de intervalo citado pasando a creciente en el segundo tramo a partir del extremo absoluto, ya que pasa de signo positivo a negativo, esta condición hace que en el valor encontrado, en el apartado anterior $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, exista un **mínimo absoluto**

B.4.- Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=\sqrt{1-x^2}\quad y\quad g(x)=\dfrac{1-x^2}{2}$ (Observa que f(x) es la parte no negativa de la circunferencia de centro el origen y radio 1) **(3 puntos)**

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow 1-x^2\geq 0\Rightarrow (1-x)(1+x)\geq 0\Rightarrow \begin{cases}1-x\geq 0\Rightarrow -x\geq -1\Rightarrow x\leq 1\\ 1+x\geq 0\Rightarrow x\geq -1\end{cases}$$

x < 1	**(+)**	**(+)**	**(-)**
x > - 1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**

$$Dom(f)=\forall x\in\Re/-1\leq x\leq 1$$

$$y\quad g(x)=\frac{1-x^2}{2}$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OX\Rightarrow y=0\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{1-x^2}=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow (1-x)(1+x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\\ \dfrac{1-x^2}{2}=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow (1-x)(1+x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones\Rightarrow\sqrt{1-x^2}=\frac{1-x^2}{2}\Rightarrow 1-x^2=\frac{(1-x^2)^2}{4}\Rightarrow 4-4x^2=1-2x^2+x^4$$

$$x^4+2x^2-3=0\Rightarrow x^2=t\Rightarrow t^2+2t-3=0\Rightarrow\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16\geq 0\Rightarrow t=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}t=\dfrac{-2+4}{2}=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\\ t=\dfrac{-2-4}{2}=-3\Rightarrow x^2=-3\Rightarrow x=\pm\sqrt{-3}\Rightarrow Sin\ solución\end{cases}$$

$$Simetria\Rightarrow\begin{cases}f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=f(x)\Rightarrow Simetrica\ respecto\ a\ OY\\ g(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{2}=\dfrac{1-x^2}{2}=g(x)\Rightarrow Simetrica\ respecto\ a\ OY\end{cases}$$

$$Signo\ en\ x=\frac{1}{2}\in(0\,,1)\Rightarrow\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>0\\ g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{2}=\dfrac{1-\dfrac{1}{4}}{2}=\dfrac{\dfrac{3}{4}}{2}=\dfrac{3}{8}>0\end{cases}\Rightarrow\frac{4\sqrt{3}}{8}>\frac{3}{8}\Rightarrow f(x)>g(x)$$

Continuación del Problema B.4

$$A = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx - 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-x^2\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-sen^2 t}\ \cos t\ dt - [x]_0^1 + \frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1$$

$$x = sen\ t \Rightarrow dx = \cos t\ dt \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = arc\ sen\ 0 = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = arc\ sen\ 1 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ \ dt - (1-0) + \frac{1}{3}\cdot\left(1^3 - 0^3\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\ \ dt - 1 + \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} \cos^2 t + sen^2 t = 1 \\ \cos^2 t - sen^2 t = \cos 2t \end{cases} \Rightarrow 2\cos^2 t = 1 + \cos 2t \Rightarrow \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\ \ dt - \frac{2}{3} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\ + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\ \ dt - \frac{2}{3} = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos u\ \ dt - \frac{2}{3}$$

$$2t = u \Rightarrow 2\ dt = du \Rightarrow dt = \frac{du}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ t = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u = \pi \end{cases}$$

$$A = \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{1}{2}\ [sen\ u]_0^{\pi} - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ (sen\ \pi - sen\ 0) - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ (0-0) - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$$

$$A = \frac{3\pi - 4}{6}\ u^2$$