Opción A

A.1- Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a y resuélvelo en los casos que es compatible $\begin{cases} (a+1)\,x+y+z=-1 \\ (-a-1)\,x-2\,z=2 \\ y+\left(a^2-a-1\right)z=-a+2 \end{cases}$ **(3 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ -(a+1) & 0 & -2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a^2-a \end{vmatrix}=(a+1)\left(a^2-a\right)=$$

$$|A|=(a+1)(a-1)\,a\Rightarrow Si\;|A|=0\Rightarrow(a+1)(a-1)\,a=0\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ a-1=0\Rightarrow a=1 \\ a+1=0\Rightarrow a=-1 \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{-1\,,0\,,1\}\Rightarrow|A|\neq0\Rightarrow rang\;(A)=3=Número\;de\;incógnitas\Rightarrow Compat.Deter\min ado$$

$Si\;a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases} 2z=2\Rightarrow z=1 \\ 0z=4\Rightarrow z=\dfrac{4}{0}\Rightarrow Sin\;solución \end{cases}\Rightarrow Sistema\;Incompatible$$

$Si\;a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow 0z=1\Rightarrow z=\frac{1}{0}\Rightarrow Sin\;solución\Rightarrow$$

$Sistema\;Incompatible$

$Si\;a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$rang\;(A)=rang\;(A/B)=2<Número\;de\;ingcógnitas\Rightarrow Sistema\;Compatible\;In\det er\min ado\Rightarrow$$

$$y-z=1\Rightarrow y=1+z\Rightarrow 2x+1+z+z=-1\Rightarrow 2x=-2-2z\Rightarrow Solución\Rightarrow(-1-\lambda\,,1+\lambda\,,\lambda)$$

Continuación del Problema A.1

Cuando el sistema es Compatible Determinado

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -2\\ -a+2 & 1 & a^2-a-1\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -2\\ -a+3 & 0 & a^2-a-2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)}=\frac{(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ -a+3 & a^2-a-2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)}$$

$$x=\frac{-(2a-6-2a^2+2a+4)}{a(a-1)(a+1)}=\frac{-(-2a^2+4a-2)}{a(a-1)(a+1)}=\frac{2(a^2-2a+1)}{a(a-1)(a+1)}=\frac{2(a-1)^2}{a(a-1)(a+1)}=\frac{2(a-1)^2}{a(a+1)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a+1 & -1 & 1\\ -(a+1) & 2 & -2\\ 0 & -a+2 & a^2-a-1\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)}=\frac{\begin{vmatrix}a+1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -a+2 & a^2-a-1\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)}=\frac{(a+1)\begin{vmatrix}1 & -1\\ -a+2 & a^2-a-1\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)}=$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ -a+2 & a^2-a-1\end{vmatrix}}{a(a-1)}=\frac{a^2-a-1-a+2}{a(a-1)}=\frac{a^2-2a+1}{a(a-1)}=\frac{(a-1)^2}{a(a-1)}=\frac{a-1}{a}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}a+1 & 1 & -1\\ -(a+1) & 0 & 2\\ 0 & 1 & -a+2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)}=\frac{\begin{vmatrix}a+1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -a+2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)}=\frac{(a+1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -a+2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -a+2\end{vmatrix}}{a(a-1)}=\frac{-a+2-1}{a(a-1)}=-\frac{(a-1)}{a(a-1)}$$

$$z=-\frac{1}{a}$$

A.2.- Encuentra la ecuación continua de la recta que está contenida en el plano $\pi\equiv x-2y+z-4=0$ y corta perpendicularmente a la recta $r\equiv\begin{cases}x-y-z+1=0\\ 3x-y+z-3=0\end{cases}$

(2 puntos)

El vector director de la recta **s** que debemos hallar es perpendicular al de la recta y al del plano, el producto vectorial de ambos nos dará su valor, el punto **S** que la define es el de intersección de la recta **r** con el plano

$$4x-2y-2=0\Rightarrow 2x-y-1=0\Rightarrow y=-1+2x\Rightarrow x+1-2x-z+1=0\Rightarrow z=2-x\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=2-\lambda\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(1,2,-1)\\ \overrightarrow{v_\pi}=(1,-2,1)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_\pi}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}-2\vec{k}-2\vec{i}-\vec{j}=-2\vec{j}-4\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{v_s}=(0,-2,-4)$$

Continuación del problema A.2

$$\pi \equiv \lambda - 2\left(-1+2\lambda\right)+2-\lambda-4=0 \Rightarrow \lambda+2-4\lambda+2-\lambda-4=0 \Rightarrow -4\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow S\begin{cases} x=0 \\ y=-1+2\cdot 0 \\ z=2-0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_s=\left(0\,,-2\,,-4\right)\equiv\left(0\,,1\,,2\right) \\ S=\left(0\,,-1\,,2\right) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \frac{x}{0}=y+1=\frac{z-2}{2}$$

A.3.- Calcular los límites:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\,sen\,x\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$ **(1 punto)**

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$ **(1 punto)**

a)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\,sen\,x\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]}{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)}{0^2}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-sen\left(\frac{\pi}{2}\,sen\,x\right)\cdot\frac{\pi}{2}\cos x}{2\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\frac{\pi}{2}\cos x\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\,sen\,x\right)}{2\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot sen\left[\frac{\pi}{2}\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]}{2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\frac{-\frac{\pi}{2}\cdot 0\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)}{2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{-\frac{\pi}{2}\cdot 0\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\cdot 0}=\frac{-\frac{\pi}{2}\cdot 0\cdot 0}{0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-sen\,x\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\,sen\,x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\,sen\,x\right)\cdot\frac{\pi}{2}\cos x\cdot\cos x}{2}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-sen\,x\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\,sen\,x\right)+\frac{\pi}{2}\cdot\cos^2 x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\,sen\,x\right)}{2}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-sen\frac{\pi}{2}\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\,sen\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\cdot\cos^2\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\,sen\frac{\pi}{2}\right)}{2}=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-1\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)+\frac{\pi}{2}\cdot 0^2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)}{2}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-1\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right)+0}{2}=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\left(-1\right)}{2}=\frac{\pi}{4}$$

Continuación del Problema A.3

$b)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-x\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2+x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1+x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{\frac{1}{\infty}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}+\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}}=\frac{0+1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{1}{2}$$

A.4.- Dada la función $f(x)=\sqrt{ln\left(3^x+x\right)+ln\left(x^2-10x+20\right)}$ demuestra que existe un valor $\alpha\in(1\ ,2)$ tal que **f'(** α **) = 0**. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso **(3 puntos)**

<u>Teorema del valor medio o de Lagrange</u>

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Geometricamente, como **f'(c)** es la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**

$$\left\{\begin{array}{l} f(1)=\sqrt{ln\left(3^1+1\right)+ln\left(1^2-10\cdot 1+20\right)}=\sqrt{ln\ 4+ln\ 11} \\ f(2)=\sqrt{ln\left(3^2+2\right)+ln\left(2^2-10\cdot 2+20\right)}=\sqrt{ln\ 11+ln\ 4}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$f(2)-f(1)=f'(\alpha)\cdot(2-1)\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{\sqrt{ln\ 4+ln\ 11}-\sqrt{ln\ 11+ln\ 4}}{1}=\frac{0}{1}=0$$

También cumple el **teorema de Rolle**

Sea **f(x)** una función continua en **[a , b],** derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que **f'(c) = 0**

Siendo **f(2) = f(1)** entonces existe, al menos, un punto $c\in(1\ ,2)$ tal que **f'(c) = 0**

Opción B

B.1- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ encuentra la matriz X tal que $AXB=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ **(2 puntos)**

$$AXB=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot B^{-1}\Rightarrow\Rightarrow IXI=A^{-1}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot B^{-1}\Rightarrow$$

$$X=A^{-1}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot B^{-1}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}|A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0\Rightarrow\exists A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ |B|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow\exists B^{-1}\Rightarrow B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}\cdot adj\ B^t\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ B^t=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\end{array}\right.\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\cdot\begin{pmatrix}4 & -7\\ -5 & 9\end{pmatrix}$$

B.2.- Encuentra la ecuación continúa de la recta **r** que pasa por el punto $P\equiv(1,1,1)$ y corta a las rectas $r\equiv\begin{cases}x+y+z-1=0\\ 2x+2y+z=0\end{cases}$ y $s\equiv\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ **(3 puntos)**

Sea **t** la recta que se busca

$$\left\{\begin{array}{l}x+y+1=0\Rightarrow x=-1-y\Rightarrow -1-y+y+z-1=0\Rightarrow z=2\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=-1-\mu\\ y=\mu\\ z=2\end{cases}\\ s\equiv\begin{cases}x=2\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=-1+\lambda\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{v_t}=(-1-\mu-2\lambda,\mu-2-\lambda,2+1-\lambda)=(-\mu-2\lambda-1,\mu-\lambda-2,-\lambda+3)$$

$$t\equiv\frac{1-(-1-\mu)}{-\mu-2\lambda-1}=\frac{1-\mu}{\mu-\lambda-2}=\frac{1-2}{-\lambda+3}\Rightarrow t\equiv\frac{2+\mu}{-\mu-2\lambda-1}=\frac{1-\mu}{\mu-\lambda-2}=\frac{-1}{-\lambda+3}\Rightarrow$$

Continuación del Problema B.2

$$\begin{cases} \dfrac{2+\mu}{-\mu-2\lambda-1} = \dfrac{-1}{-\lambda+3} \Rightarrow -2\lambda+6-\mu\lambda+3\mu = \mu+2\lambda+1 \Rightarrow -2\lambda+6-\mu\lambda+3\mu-\mu-2\lambda-1=0 \\ \dfrac{1-\mu}{\mu-\lambda-2} = \dfrac{-1}{-\lambda+3} \Rightarrow -\lambda+3+\lambda\mu-3\mu = -\mu+\lambda+2 \Rightarrow -\lambda+3+\lambda\mu-3\mu+\mu-\lambda-2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\mu\lambda+2\mu+5-4\lambda=0 \\ \lambda\mu-2\mu+1-2\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-\lambda)\mu = 4\lambda-5 \Rightarrow \mu = \dfrac{4\lambda-5}{2-\lambda} \\ (\lambda-2)\mu = 2\lambda-1 \Rightarrow \mu = \dfrac{2\lambda-1}{\lambda-2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{4\lambda-5}{2-\lambda} = \dfrac{2\lambda-1}{\lambda-2} \Rightarrow 5-4\lambda = 2\lambda-1$$

$$6-6\lambda=0 \Rightarrow 6\lambda=6 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \mu = \frac{4\cdot 1-5}{2-1} = -1 \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_t} = [-(-1)-2\cdot 1-1\ ,-1-1-2\ ,-1+3] = (-2\ ,-4\ ,2) \equiv (1\ ,2\ ,-1) \Rightarrow t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow$$

$$t \equiv x-1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

B.3.- Demuestra que la función $f(x) = \sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^x\right)}$ vale $\frac{1}{2}$ en algún punto del intervalo $(0\ ,1)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso **(2 puntos)**

Tomemos la función

$$g(x) = \sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^x\right)} - \frac{1}{2}$$

Teorema de Bolzano

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ ,b)$ tal que **f(c) = 0**

Como la función es continua y derivable en el intervalo $(0\ ,1)$ y siendo los valores de la función en los extremos del intervalo

$$\begin{cases} g(1) = \sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^1\right)} - \frac{1}{2} = \sqrt{sen(\pi)} - \frac{1}{2} = \sqrt{0} - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \\ g(0) = \sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^0\right)} - \frac{1}{2} = \sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)} - \frac{1}{2} = \sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{2} = \sqrt{1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

se cumple que **[sign g(0) $\neq$ sign g(1)]**, entonces existe, al menos, un punto $\alpha \in (a\ ,b)$ tal que $g(\alpha) = 0$ ellos implica que $g(\alpha) = \sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^\alpha\right)} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^\alpha\right)} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$f(\alpha) = \frac{1}{2}$$

B.4.- Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=5-x \ \ y \ \ g(x)=\dfrac{5}{x+1}$ **(3 puntos)**

$$Puntos\ de\ corte\ de\ las\ \ funciones\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} 5-x=0 \Rightarrow x=5 \\ \dfrac{5}{x+1}=0 \Rightarrow 5\neq 0 \Rightarrow No\ hay\ \ puntos\ de\ corte \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ \ funciones \Rightarrow 5-x=\frac{5}{x+1} \Rightarrow 5x+5-x^2-x=5 \Rightarrow -x^2+4x=0 \Rightarrow$$

$$x^2-4x=0 \Rightarrow x\,(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

$$Simetria \Rightarrow \begin{cases} f(-x)=5-(-x)=5+x\neq f(x) \Rightarrow No\ hay\ simetrias \\ g(-x)=\dfrac{5}{(-x)+1}=\dfrac{4}{-x+1}\neq g(x) \Rightarrow No\ hay\ simetrias \end{cases}$$

$$Signo\ en\ x=1\in(0\ ,\ 4) \Rightarrow \begin{cases} f(1)=5-1=4>0 \\ g(1)=\dfrac{5}{1+1}=\dfrac{5}{2}>0 \end{cases} \Rightarrow 4>0 \Rightarrow f(x)>g(x)$$

$$A=\int_0^4 (5-x)\,dx-\int_0^4 \frac{5}{x+1}\,dx=5\cdot[x]_0^4-\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^4-5\int_1^5 \frac{dt}{t}=5\cdot(4-0)-\frac{1}{2}\cdot\left(4^2-0^2\right)-5\cdot[\ln t]_1^5$$

$$x+1=t \Rightarrow dx=dt \Rightarrow \begin{cases} x=4 \Rightarrow t=5 \\ x=0 \Rightarrow t=1 \end{cases}$$

$$A=20-\frac{16}{2}-5\cdot(\ln 5-\ln 1)=20-8-5\cdot(\ln 5-0)=12-5\cdot\ln 5=12-\ln 5^5=(12-\ln 3125)\,u^2$$