Opción A

A.1- Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a y resuélvelo en los casos que es compatible $\begin{cases} (a^2+a)\,x+(2a+1)y+az=1 \\ (a^2+a)\,x+(3a+3)y+(a+1)\,z=2 \\ (a+2)y-az=a+2 \end{cases}$ **(3 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix} a^2+a & 2a+1 & a \\ a^2+a & 3a+3 & a+1 \\ 0 & a+2 & -a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2+a & 2a+1 & a \\ 0 & a+2 & 1 \\ 0 & a+2 & -a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2+a & 2a+1 & a \\ 0 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -a-1 \end{vmatrix}=-(a+1)(a+2)(a^2+a)$$

$$|A|=-a\,(a+1)^2\,(a+2)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow -a\,(a+1)^2\,(a+2)=0\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a+1=0\Rightarrow a=-1 \\ a+2=0\Rightarrow a=-2 \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{-2\,,-1\,,0\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Compat.Determinado$$

Si $a=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)\Rightarrow 0z=-2\Rightarrow z=-\frac{2}{0}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow$$

Sistema Incompatible

Si $a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ incógnitas$$

$$\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado\Rightarrow y+z=1\Rightarrow y=1-z\Rightarrow 2x-1+z-z=1\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1$$

$$Solución\Rightarrow(1\,,1-\lambda\,,\lambda)$$

Si $a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases} 1\cdot z=5\Rightarrow z=5 \\ 0z=4\Rightarrow z=\frac{4}{0}\Rightarrow Sin\ solución \end{cases}\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

Continuación del Problema A.1

Cuando el sistema es Compatible Determinado

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2a+1 & a\\ 2 & 3a+3 & a+1\\ a+2 & a+2 & -a\end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2a+1 & a\\ 2 & 3a+3 & a\\ a+2 & a+2 & -a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2a+1 & 0\\ 2 & 3a+3 & 1\\ a+2 & a+2 & 0\end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)}=$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2a+1 & a\\ 1 & a+2 & 0\\ a+3 & 3a+3 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2a+1 & 0\\ 2 & 3a+3 & 1\\ a+2 & a+2 & 0\end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix}1 & a+2\\ a+3 & 3a+3\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}1 & 2a+1\\ a+2 & a+2\end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)}=$$

$$x=\frac{a\cdot[3a+3-(a+3)(a+2)]-[(a+2)-(a+2)(2a+1)]}{-a(a+1)^2(a+2)}=\frac{a\cdot(3a+3-a^2+3a+2a+6)-(a+2)[1-2a-1]}{-a(a+1)^2(a+2)}$$

$$x=\frac{a\cdot(-a^2+8a+9)-2a(a+2)}{-a(a+1)^2(a+2)}=a\frac{(-a^2+8a+9-2a-4)}{-a(a+1)^2(a+2)}=-\frac{(-a^2+6a+5)}{(a+1)^2(a+2)}=\frac{a^2-6a-5}{(a+1)^2(a+2)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a^2+a & 1 & a\\ a^2+a & 2 & a+1\\ 0 & a+2 & -a\end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)}=\frac{\begin{vmatrix}a^2+a & 1 & a\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & a+2 & -a\end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)}=\frac{\begin{vmatrix}a^2+a & 1 & a\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2a-2\end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)}=\frac{(a^2+a)(-2a-2)}{-a(a+1)^2(a+2)}$$

$$y=\frac{-2a(a+1)(a+1)}{-a(a+1)^2(a+2)}=\frac{2(a+1)^2}{(a+1)^2(a+2)}=\frac{2}{a+2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}a^2+a & 2a+1 & 1\\ a^2+a & 3a+3 & 2\\ 0 & a+2 & a+2\end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)}=\frac{\begin{vmatrix}a^2+a & 2a+1 & 1\\ 0 & a+2 & 1\\ 0 & a+2 & a+2\end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)}=\frac{\begin{vmatrix}a^2+a & 2a+1 & 1\\ 0 & a+2 & 1\\ 0 & 0 & a+1\end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)}=\frac{(a^2+a)(a+2)(a+1)}{-a(a+1)^2(a+2)}$$

$$z=\frac{a(a+1)}{-a(a+1)}=-1$$

$$Solución\Rightarrow(x,y,z)=\left(\frac{a^2-6a-5}{(a+1)^2(a+2)},\frac{2}{a+2},-1\right)$$

A.2.- Dado los puntos $P \equiv (2\,,1\,,1)\ y\ Q \equiv (1\,,2\,,-1)$, encuentra los puntos **R** y S de la recta $r \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{0}$ que cumplen que **PQR** y **PQS** son triángulos equiláteros **(2 puntos)**

La recta formada por los puntos **P** y **Q**, tendrá que ser perpendicular a la recta **r** dada, por ello el producto escalar de **PQ** y el del vector director de la recta es nulo, pudiéndose hallar así el punto medio **M** del vector **PQ** que es el mismo que el punto medio de **RS**
La distancia entre **MR**, dada por su módulo, es la mitad de la distancia de **PR**, calculado, también, su módulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (1\,,2\,,-1) - (2\,,1\,,1) = (-1\,,1\,,-2) \\ \overrightarrow{v_r} = (1\,,1\,,0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{v_r} = (-1\,,1\,,-2) \cdot (1\,,1\,,0) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{v_r}$$

$$M \equiv \left(\frac{1+2}{2}\,,\frac{2+1}{2}\,,\frac{-1+1}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}\,,\frac{3}{2}\,,0 \right) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PR} = (-2+\lambda\,,-2+\lambda\,,0) - (2\,,1\,,1) = (-4+\lambda\,,-3+\lambda\,,-1) \\ \overrightarrow{MR} = (-2+\lambda\,,-2+\lambda\,,0) - \left(\frac{3}{2}\,,\frac{3}{2}\,,0 \right) = \left(-\frac{7}{2} + \lambda\,,-\frac{7}{2} + \lambda + \lambda\,,0 \right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left| \overrightarrow{PR} \right| = \sqrt{(\lambda-4)^2 + (\lambda-3)^2 + (-1)^2} \\ \left| \overrightarrow{MR} \right| = \sqrt{\left(\lambda - \frac{7}{2} \right)^2 + \left(\lambda - \frac{7}{2} \right)^2 + 0^2} \end{cases} \Rightarrow \left| \overrightarrow{MR} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{PR} \right| \Rightarrow \left| \overrightarrow{PR} \right| = 2 \cdot \left| \overrightarrow{MR} \right| \Rightarrow$$

$$\sqrt{\lambda^2 - 8\lambda + 16 + \lambda^2 - 6\lambda + 9 + 1} = 2 \cdot \sqrt{\lambda^2 - 7\lambda + \frac{49}{4} + \lambda^2 - 7\lambda + \frac{49}{4}} \Rightarrow$$

$$2\lambda^2 - 14\lambda + 26 = 4 \cdot \left(2\lambda^2 - 14\lambda + \frac{49}{2} \right) \Rightarrow 2\lambda^2 - 14\lambda + 26 = 8\lambda^2 - 56\lambda + 98 \Rightarrow 6\lambda^2 - 42\lambda + 72 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1 \geq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{7+1}{2} = 4 \\ \lambda = \frac{7-1}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$R \equiv \begin{cases} x = -2 + 4 = 2 \\ y = -2 + 4 = 2 \Rightarrow R \equiv (2\,,2\,,0) \\ z = 0 \end{cases} \qquad S \equiv \begin{cases} x = -2 + 3 = 1 \\ y = -2 + 3 = 1 \Rightarrow R \equiv (1\,,1\,,0) \\ z = 0 \end{cases}$$

A.3.- Halla la derivada y su valor en el punto **x = 1** para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^{\left(x+2^x\right)}$ **(1 punto)**

b) $g(x) = arc\ tg\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$ **(1 punto)**

$a)$

$$\ln f(x) = \ln x^{\left(x+2^x\right)} = \left(x+2^x\right)\ln x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \left(1+2^x\cdot\ln 2\right)\ln x + \frac{1}{x}\cdot\left(x+2^x\right) \Rightarrow$$

$$f'(x) = f(x)\cdot\left[\left(1+2^x\cdot\ln 2\right)\ln x + \frac{\left(x+2^x\right)}{x}\right] = x^{\left(x+2^x\right)}\left[\left(1+2^x\cdot\ln 2\right)\ln x + \frac{\left(x+2^x\right)}{x}\right]$$

$$f'(1) = 1^{\left(1+2^1\right)}\left[\left(1+2^1\cdot\ln 2\right)\ln 1 + \frac{\left(1+2^1\right)}{1}\right] = 1^3\left[\left(1+2\cdot\ln 2\right)\cdot 0 + \frac{3}{1}\right] = 1\cdot(0+3) = 3$$

$b)$

$$g'(x) = \frac{1}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\cdot\left[-sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2\cdot\left[1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]}$$

$$g'(x) = -\frac{\pi\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)}{2\cdot\left[1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)\right]} = -\frac{\pi\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\cdot\left[1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]} = -\frac{\pi\cdot 1}{2\cdot\left(1+0^2\right)} = -\frac{\pi}{2}$$

A.4.- Dada la función $f(x) = \ln\left[3 + x + sen\left(\dfrac{\pi\, x^3}{x^2 + x + 2}\right)\right]$ demuestra que existe un valor $\alpha \in (-1\,,\,2)$ tal que **f(α) = 1**. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso **(3 puntos)**

Tomemos la función $g(x) = \ln\left[3 + x + sen\left(\dfrac{\pi\, x^3}{x^2 + x + 2}\right)\right] - 1$

<u>Teorema de Bolzano</u>

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) ≠ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\,,b)$ tal que **f(c) = 0**

Como la función es continua y derivable en el intervalo $(-1\,,\,2)$ y siendo los valores de la función en los extremos del intervalo

$$\begin{cases} g(-1) = \ln\left[3 + (-1) + sen\left(\dfrac{\pi\cdot(-1)^3}{(-1)^2 + (-1) + 2}\right)\right] - 1 = \ln\left[2 + sen\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right] - 1 = \ln\,(2-1) - 1 = -1 < 0 \\ g(2) = \ln\left[3 + 2 + sen\left(\dfrac{\pi\cdot 2^3}{2^2 + 2 + 2}\right)\right] - 1 = \ln\left[5 + sen\left(\dfrac{8\pi}{8}\right)\right] - 1 = \ln\,(5+0) - 1 = \ln 5 - 1 > 0 \end{cases}$$

se cumple que **[sign g(-1) ≠ sign g(2)]**, entonces existe, al menos, un punto $\alpha \in (-1\,,\,2)$ tal que $g\,(\alpha) = 0$ ellos implica que $g(\alpha) = \ln\left[3 + \alpha + sen\left(\dfrac{\pi\,\alpha^3}{\alpha^2 + \alpha + 2}\right)\right] - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\ln\left[3 + \alpha + sen\left(\dfrac{\pi\,\alpha^3}{\alpha^2 + \alpha + 2}\right)\right] = 1 \Rightarrow f(\alpha) = 1$$

Opción B

B.1- Calcula el determinante de **A.B** y el de **A + B** siendo

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&1&-2\\0&2&-2\end{pmatrix}\ y\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-3&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$$ **(2 puntos)**

$$A.B=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&1&-2\\0&2&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-3&0\\0&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3&3\\2&1&-2\\4&-2&-2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$|A.B|=\begin{vmatrix}0&-3&3\\2&1&-2\\0&-4&2\end{vmatrix}=(-2)\cdot\begin{vmatrix}-3&3\\-4&2\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-6+12)=(-2)\cdot 6=-12$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&1&-2\\0&2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-3&0\\0&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&3\\2&-2&-2\\0&0&-4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$|A+B|=\begin{vmatrix}3&-1&3\\2&-2&-2\\0&0&-4\end{vmatrix}=(-4)\cdot\begin{vmatrix}3&-1\\2&-2\end{vmatrix}=(-4)\cdot(-6+2)=(-4)\cdot(-4)=16$$

B.2.- Encuentra la ecuación continúa de la recta que corta perpendicularmente a las rectas

$$r\equiv\begin{cases}2x+y+z-6=0\\x-y+2z-3=0\end{cases}\quad y\quad s\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+2}{4}$$ **(3 puntos)**

Sea **t** la recta que se busca, su vector director es el formado por los puntos genéricos de la rectas ya que se apoya en ellas, y el producto escalar de él con cada uno de los vectores directores de las rectas **r** y **s** es nulo. Calculados los parámetros hallaremos uno de los puntos **T** de corte, de la recta **t** con una de las rectas dadas, que con el vector director hallado determinaran la ecuación de la recta buscada

$$\begin{cases}3x+3z-9=0\Rightarrow x+z=3\Rightarrow x=3-z\Rightarrow 3-z-y+2z-3=0\Rightarrow y=z\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=3-\mu\\y=\mu\\z=\mu\end{cases}\\ s\equiv\begin{cases}x=-1+2\lambda\\y=-2+\lambda\\z=-2+4\lambda\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_t}=(3-\mu+1-2\lambda\,,\,\mu+2-\lambda\,,\,\mu+2-4\lambda)=(4-\mu-2\lambda\,,\,2+\mu-\lambda\,,\,2+\mu-4\lambda)\\ \overrightarrow{v_r}=(-1\,,1\,,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(2\,,1\,,4)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_t}\perp\overrightarrow{v_r}\\ \overrightarrow{v_t}\perp\overrightarrow{v_s}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_r}=0\Rightarrow(4-\mu-2\lambda\,,\,2+\mu-\lambda\,,\,2+\mu-4\lambda)\cdot(-1\,,1\,,1)=0\\ \overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_s}=0\Rightarrow(4-\mu-2\lambda\,,\,2+\mu-\lambda\,,\,2+\mu-4\lambda)\cdot(2\,,1\,,4)=0\end{cases}\Rightarrow$$

Continuación del Problema B.2

$$\begin{cases} -4+\mu+2\lambda+2+\mu-\lambda+2+\mu-4\lambda=0 \Rightarrow 3\mu-3\lambda=0 \Rightarrow \mu-\lambda=0 \Rightarrow \mu=\lambda \\ 8-2\mu-4\lambda+2+\mu-\lambda+8+4\mu-16\lambda=0 \Rightarrow 18+3\mu-21\lambda=0 \Rightarrow \mu-7\lambda=-6 \end{cases} \Rightarrow \lambda-7\lambda=-6 \Rightarrow$$

$$-6\lambda=-6\lambda=1 \Rightarrow \mu=1 \Rightarrow \overrightarrow{v_t}=(4-1-2\cdot 1\,,\,2+1-1\,,\,2+1-4\cdot 1)=(1\,,\,2\,,\,-1) \Rightarrow T \equiv \begin{cases} x=3-1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_t}=(1\,,\,2\,,\,-1) \\ T\equiv(2\,,1\,,1) \end{cases} \Rightarrow t \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

B.3.- Dada la función $f(x)=sen\left(\pi\cdot 2^x\right)+\cos(\pi\ x)$ demuestra que existe un valor $\alpha\in(-1\,,\,2)$ tal que $f'(\alpha)=\frac{1}{3}$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso **(2 puntos)**

__**Teorema del valor medio o de Lagrange**__

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\,,b)$ tal que: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Geometricamente, como **f'(c) es** la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**

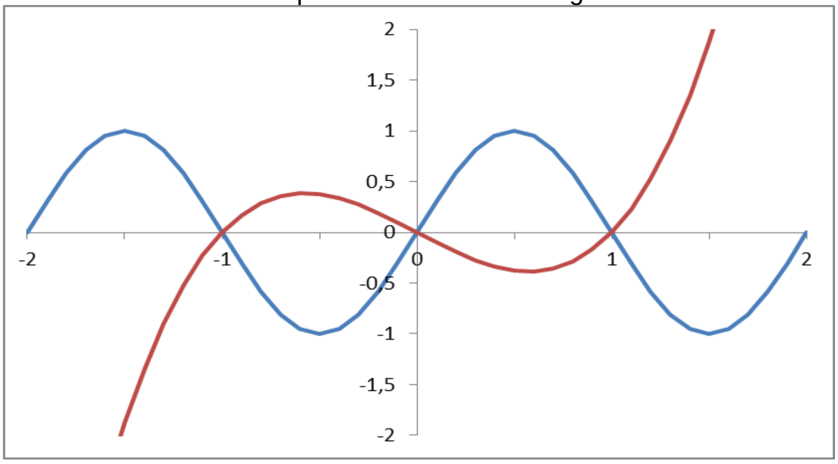
La función es continua y derivable en el intervalo $(-1\,,\,2)$ verificándose que

$$\begin{cases} f(-1)=sen\left(\pi\cdot 2^{-1}\right)+\cos[\pi\cdot(-1)]=sen\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(-\pi)=1+\cos(\pi)=1-1=0 \\ f(2)=sen\left(\pi\cdot 2^2\right)+\cos[\pi\cdot 2]=sen(4\pi)+\cos(2\pi)=sen(0)+\cos(0)=0+1=0 \end{cases}$$ existe

al menos un punto $\alpha\in(-1\,,\,2)$ tal que $f'(\alpha)=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{1-0}{2+1}=\frac{1}{3}$

B.4.- Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-x \;\; y \;\; g(x)=sen\,(\pi\, x)$ Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de **f(x)** y **g(x)** **(3 puntos)**

Estudiaremos estos tres puntos analizando sus gráficas



$$Puntos\ de\ corte\ de\ las\ \ funciones\ con\ OX\ \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^3-x=0 \Rightarrow \left(x^2-1\right)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases} \\ sen\left(\pi\cdot\dfrac{1}{2}\right) == 0 \Rightarrow \pi\ x = 0+\pi\cdot k \Rightarrow x=k\in Z \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ \ funciones \Rightarrow Tomados\ de\ la\ resolución\ gráfica \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$Simetria \Rightarrow \begin{cases} f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-\left(x^3-x\right)=-f(x) \Rightarrow Simetria\ respecto\ a\ O \\ g(-x)=sen\,[\pi\,(-x)]=sen\,(-\pi\ x)=-sen\,(\pi\ x)=-g(x) \Rightarrow Simetria\ respecto\ a\ O \end{cases}$$

$$Signo\ en\ x=\frac{1}{2}\in(0\,,1) \Rightarrow \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{8}<0 \\ g\left(\dfrac{1}{2}\right)=sen\left(\pi\cdot\dfrac{1}{2}\right)=sen\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\right)=1>0 \end{cases}$$

$$A=2\int_0^1 sen\,(\pi\ x)\,dx+\left|2\int_0^1\left(x^3-x\right)dx\right|=2\int_0^\pi sen\ t\ \frac{dt}{\pi}-2\int_0^1\left(x^3-x\right)dx=$$

$$\pi\ x=t \Rightarrow \pi dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=\pi \\ x=0 \Rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$A=-\frac{2}{\pi}\cdot[\cos t]_0^\pi-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_0^1+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^1=-\frac{2}{\pi}\cdot(\cos\pi-\cos 0)-\frac{1}{2}\cdot\left(1^4-0^4\right)+\left(1^2-0^2\right)$$

$$A=-\frac{2}{\pi}\cdot(0-1)-\frac{1}{2}+1=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2}=\frac{4+\pi}{2\,\pi}\ u^2$$