Opción A

A.1- Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real **a** y resuélvelo en los casos que es compatible $\begin{cases} x+y-az=0 \\ -x+ay+az=2a+1 \\ x+y+\left(a^3-2a\right)z=a-1 \end{cases}$ **(3 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ -1 & a & a \\ 1 & 1 & a^3-2a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3-a \end{vmatrix}==1\cdot(a+1)\left(a^3-a\right)=a\cdot(a+1)\left(a^2-1\right)=a\cdot(a+1)(a+1)(a-1)$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow a\cdot(a+1)^2\ (a-1)=0\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ a+1=0\Rightarrow a=-1\Rightarrow \\ a-1=0\Rightarrow a=1 \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{-1\,,\,0\,,\,1\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Sist.\ Compatible\ Determinado$$

$Si\ a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)\Rightarrow 0z=2\Rightarrow z=\frac{2}{0}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\Rightarrow 0z=-1\Rightarrow z=-\frac{1}{0}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<Numero\ incógnitas\Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ Indeterminado\Rightarrow 2z=3\Rightarrow z=\frac{3}{2}\Rightarrow x+y-\frac{3}{2}=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}-y$$

$$Solución\Rightarrow(x\,,\,y\,,\,z)=\left(\frac{3}{2}-\lambda\,,\,\lambda\,,\,\frac{3}{2}\right)$$

Continuación del Problema A.1

Soluciones cuando es Compatible Determinado

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & -a\\ 2a+1 & a & a\\ a-1 & 1 & a^3-2a\end{vmatrix}}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & -a\\ 2a+1 & 0 & a+a^2\\ a-1 & 0 & a^3+a^2-2a\end{vmatrix}}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}=\frac{(-1)\begin{vmatrix}2a+1 & a^2+a\\ a-1 & a^3+a^2-2a\end{vmatrix}}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}=$$

$$x=-\frac{(2a+1)\left(a^3+a^2-2a\right)-(a-1)\left(a^2+a\right)}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}=-a\,\frac{(2a+1)\left(a^2+a-2\right)-(a-1)(a+1)}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}=$$

$$x=-\frac{(2a+1)(a+2)(a-1)-(a-1)(a+1)}{(a+1)^2\,(a-1)}=-(a-1)\frac{(2a+1)(a+2)\ -(a+1)}{(a+1)^2\,(a-1)}=-\frac{2a^2+4a+a+2-a-1}{(a+1)^2}$$

$$x=-\frac{2a^2+4a+1}{(a+1)^2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & -a\\ 1 & 2a+1 & a\\ 1 & a-1 & a^3-2a\end{vmatrix}}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & -a\\ 0 & 2a+1 & 2a\\ 0 & a-1 & a^3-a\end{vmatrix}}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}=\frac{1\cdot\begin{vmatrix}2a+1 & 2a\\ a-1 & a^3-a\end{vmatrix}}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}=\frac{(2a+1)\left(a^3-a\right)-2a\,(a-1)}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}=$$

$$y=\frac{a\,(2a+1)\left(a^2-1\right)-2a\,(a-1)}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}=\frac{a\,(2a+1)(a-1)(a+1)-2a\,(a-1)}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}=(a-1)\frac{\left(2a^2+a\right)\,(a+1)-2a}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}$$

$$y=\frac{2a^3+a^2+2a^2+a-2a}{a\cdot(a+1)^2}=\frac{2a^3+3a^2-a}{a\cdot(a+1)^2}=\frac{a\left(2a^2+3a-1\right)}{a\cdot(a+1)^2}=\frac{2a^2+3a-1}{(a+1)^2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & a & 2a+1\\ 1 & 1 & a-1\end{vmatrix}}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & a-1 & 2a+1\\ 0 & 0 & a-1\end{vmatrix}}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}=\frac{1\cdot\begin{vmatrix}a-1 & 2a+1\\ 0 & a-1\end{vmatrix}}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}=\frac{(a-1)^2}{a\cdot(a+1)^2\,(a-1)}=\frac{a-1}{a\cdot(a+1)^2}$$

$$Solución\Rightarrow(x\,,\,y\,,\,z)=\left(-\frac{2a^2+4a+1}{(a+1)^2}\,,\,\frac{2a^2+3a-1}{(a+1)^2}\,,\,\frac{a-1}{a\cdot(a+1)^2}\right)$$

A.2.- Encuentra el punto de la recta $r\equiv\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$ que forma triangulo isósceles con los puntos $P\equiv(1\,,3\,,-2)$ y $Q\equiv(3\,,1\,,0)$ **(2 puntos)**

Siendo **R** el punto general de la recta, son iguales los módulos de los vectores **PR** y **QR**

$$r\equiv\begin{cases}x=-2+\lambda\\ y=1-2\lambda\\ z=-2+\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{PR}=(-2+\lambda\,,1-2\lambda\,,-2+\lambda)-(1\,,3\,,-2)=(-3+\lambda\,,-2-2\lambda\,,\lambda)\\ \overrightarrow{QR}=(-2+\lambda\,,1-2\lambda\,,-2+\lambda)-(3\,,1\,,0)=(-5+\lambda\,,-2\lambda\,,-2+\lambda)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\left|\overrightarrow{PR}\right|=\sqrt{(-3+\lambda)^2+(-2-2\lambda)^2+\lambda^2}\\ \left|\overrightarrow{QR}\right|=\sqrt{(-5+\lambda)^2+(-2\lambda)^2+(-2+\lambda)^2}\end{cases}\Rightarrow\left|\overrightarrow{PR}\right|=\left|\overrightarrow{QR}\right|\Rightarrow$$

$$(-3+\lambda)^2+(-2-2\lambda)^2+\lambda^2=(-5+\lambda)^2+(-2\lambda)^2+(-2+\lambda)$$

Continuación del Problema A.2

$$9-6\lambda+\lambda^2+4+8\lambda+4\lambda^2+\lambda^2=25-10\lambda+\lambda^2+4\lambda^2+4-4\lambda+\lambda^2\Rightarrow 13+2\lambda+6\lambda^2=29-14\lambda+6\lambda^2\Rightarrow$$

$$13+2\lambda-29+14\lambda=0\Rightarrow -16+16\lambda=0\Rightarrow 16\lambda=16\Rightarrow \lambda=1\Rightarrow R\equiv\begin{cases}x=-2+1\\ y=1-2\cdot 1\\ z=-2+1\end{cases}\Rightarrow R\equiv(-1\,,-1\,,-1)$$

Opción B

B.1- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, calcula $\mathbf{A^3}$ y $\mathbf{A^{38}}$ **(2 puntos)**

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_3\Rightarrow$$

$$A^4=A^3\cdot A=I_3\cdot A=A\Rightarrow A^5=A^4\cdot A=A\cdot A=A^2\Rightarrow A^6=A^5\cdot A=A^2\cdot A=A^3=I_3$$

$$\begin{array}{l|l} 38 & 3 \\ \hline 08 & 12 \\ \ \ \underline{2} & \end{array}\Rightarrow\quad A^{38}=A^2=\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

B.2 Halla la ecuación continua de la recta **r** que es perpendicular a las rectas $r_1\equiv\begin{cases}x+3y-z+8=0\\ x+4y-2z+12=0\end{cases}$ y $r_2\equiv\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-5}{-2}$ **(3 puntos)**

El vector director de la recta **s** buscada, que tiene como componentes las diferencias de las componentes de las rectas dadas, es perpendicular a ambas rectas y por lo tanto su producto escalar una vez con el director de r_1 y la otra con el de r_2 es nulo en los dos casos

$$\begin{cases}-x-3y+z-8=0\\ x+4y-2z+12=0\end{cases}\Rightarrow y-z+4=0\Rightarrow y=-4+z\Rightarrow x-12+3z-z+8=0\Rightarrow x=4-2z\Rightarrow$$

$$\begin{cases}r_1\equiv\begin{cases}x=4-2\lambda\\ y=-4+\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\\ r_2\equiv\begin{cases}x=\mu\\ y=-2+\mu\\ z=5-2\mu\end{cases}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_s}\equiv(4-2\lambda\,,-4+\lambda\,,\lambda)-(\mu\,,-2+\mu\,,5-2\mu)=(4-2\lambda-\mu\,,-2+\lambda-\mu\,,-5+\lambda+2\mu)\\ \overrightarrow{v_{r_1}}=(-2\,,1\,,1)\\ \overrightarrow{v_{r_2}}=(1\,,1\,,-2)\end{cases}$$

Continuación del Problema B.2

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s} \perp \overrightarrow{v_{r_1}} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} \cdot \overrightarrow{v_{r_1}} = 0 \Rightarrow (4-2\lambda-\mu\,,\,-2+\lambda-\mu\,,\,-5+\lambda+2\mu)\cdot(-2\,,1\,,1)=0 \\ \overrightarrow{v_s} \perp \overrightarrow{v_{r_2}} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} \cdot \overrightarrow{v_{r_2}} = 0 \Rightarrow (4-2\lambda-\mu\,,\,-2+\lambda-\mu\,,\,-5+\lambda+2\mu)\cdot(1\,,1\,,-2)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -8+4\lambda+2\mu-2+\lambda-\mu-5+\lambda+2\mu=0 \Rightarrow -15+6\lambda+3\mu=0 \\ 4-2\lambda-\mu-2+\lambda-\mu+10-2\lambda-4\mu=0 \Rightarrow 12-3\lambda-6\mu=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda+\mu=5 \\ \lambda+2\mu=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda+\mu=5 \\ -2\lambda-4\mu=-8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-3\mu=-3 \Rightarrow \mu=\frac{-3}{-3}=1 \Rightarrow \lambda+2\cdot 1=4 \Rightarrow \lambda=2$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (4-2\cdot 2-1\,,\,-2+2-1\,,\,-5+2+2\cdot 1) = (-1\,,-1\,,-1) \equiv (1\,,1\,,1) \\ S \equiv \begin{cases} x=4-2\cdot 1 \\ y=-4+1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow S \equiv (2\,,-3\,,1) \end{cases} \Rightarrow s \equiv x-2=y+3=z-1$$

Opción C

C.1.- Halla las integrales indefinidas

$a)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$ **(1 punto)**

$b)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$ **(1 punto)**

$a)$

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16\geq 0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2+4}{2}=3 \\ x=\dfrac{2-4}{2}=-1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x-3)(x+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-3)}{(x-3)(x+1)} \Rightarrow A(x+1)+B(x-3)=1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=-1 \Rightarrow A(-1+1)+B(-1-3)=1 \Rightarrow -4B=1 \Rightarrow B=-\dfrac{1}{4} \\ x=3 \Rightarrow A(3+1)+B(3-3)=1 \Rightarrow 4A=1 \Rightarrow A=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{\frac{1}{4}}{x-3}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+1}$$

$$\int\frac{dx}{x^2-2x-3}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{4}\cdot\ln t-\frac{1}{4}\cdot\ln u=\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{t}{u}=\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{x-3}{x+1}+K$$

$$\begin{cases} x-3=t \Rightarrow dx=dt \\ x+1=u \Rightarrow dx=du \end{cases}$$

Continuación del Problema C.1

$b)$

$$x^2-2x+2=0 \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 2=4-8=-4<0 \Rightarrow Sin\ soluci\acute{o}n\ en\ la\ recta\ real$$

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+2}=\int \frac{dx}{x^2-2x+1+1}=\int \frac{dx}{(x-1)^2+1}=\int \frac{dt}{t^2+1}=arc\ tg\ t=arc\ tg\ (x-1)+K$$

$$x-1=t \Rightarrow dx=dt$$

C.2.- Demuestra que la función $f(x)=\ln(1+x\ sen\ x)$ tiene un máximo relativo en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$**.** Menciona los resultados teóricos que utilices **(3 puntos)**

Teorema de Bolzano

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que **f(c) = 0**

$$f'(x)=\frac{sen\ x+x\cos x}{1+x\ sen\ x} \Rightarrow \begin{cases} f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\dfrac{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1+\frac{\pi}{2}\ sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{1+\frac{\pi}{2}\cdot 0}{1+\frac{\pi}{2}\cdot 1}=\dfrac{1}{1+\frac{\pi}{2}}>0 \\ f'(\pi)=\dfrac{sen\ (\pi)+\pi\cos(\pi)}{1+(\pi)\ sen\ (\pi)}=\dfrac{0+\pi\cdot(-1)}{1+\pi\cdot 0}=-\dfrac{\pi}{1}=-\pi<0 \end{cases}$$

La función es continua y derivable en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ **y se cumple que**

$sign\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\neq sign\ f'(\pi)$, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que **f'(c) = 0,** que puede ser un máximo o un mínimo relativo

Como además

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left[1+\frac{\pi}{2}\ sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)=\ln\left(\frac{\pi+2}{2}\right)>0 \\ f(\pi)=\ln[1+\pi\ sen\ (\pi)]=\ln(1+\pi\cdot 0)=\ln(1+0)=\ln(1)=0 \end{cases}$$

El valor en el punto **c** debe de ser mayor que **0** y $\ln\left(\frac{\pi+2}{2}\right)$ siendo positivo, ello nos indica que es un **máximo relativo**

Opción D

D.1.- Demuestra que la derivada de la función $f(x)=\sqrt{sen\left[\frac{\pi}{4}\cdot 3^{sen\,x}\right]}$, se anula en algún punto del intervalo $\left(0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Menciona los resultados teóricos que utilices **(2 puntos)**

<u>Teorema de Rolle</u>
Sea **f(x)** una función continua en **[a , b],** derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que **f'(c) = 0**

La función propuesta es continua y derivable en el intervalo $\left(0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$ y se verifica que

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{sen\left[\frac{\pi}{4}\cdot 3^{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right]}=\sqrt{sen\left[\frac{\pi}{4}\cdot 3^{1}\right]}=\sqrt{sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2} \\ f(0)=\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{sen\,0}\right)}=\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{0}\right)}=\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot 1\right)}=\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2} \end{cases}$$

entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que **f'(c) = 0**

D.2.- Sabemos que las funciones $f(x)=\pi\ x-x^2$ y $g(x)=sen\ x$ se cortan solo en dos puntos. Encuentra esos puntos y calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de **f(x)** y **g(x)** **(3 puntos)**

Puntos de corte entre funciones

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0\Rightarrow\begin{cases}\pi\ x-x^2=0\Rightarrow x(\pi-x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ \pi-x=0\Rightarrow x=\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\pi\end{cases}\\ sen\ x=0\Rightarrow x=0+k\ \pi\end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2}\in(0\ ,\pi)\Rightarrow\begin{cases}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi\cdot\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}>0\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=sen\frac{\pi}{2}=1>0\end{cases}\Rightarrow\frac{\pi^2}{4}>1\Rightarrow f(x)>g(x)$$

$$A=\int_0^\pi\left(\pi\ x-x^2\right)dx-\int_0^\pi sen\ x\ dx=\frac{\pi}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^\pi-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^\pi-\left[-\cos x\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\pi^2-0^2\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(\pi^3-0^3\right)+(\cos\pi-\cos 0)$$

$$A=\frac{\pi^3}{2}-\frac{\pi^3}{3}+[(-1)-1]=\frac{\pi^3}{6}-2=\frac{\pi^3-12}{6}\ u^2$$