Opción A

A.1- Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real **a** y resuélvelo en los casos que es compatible $\begin{cases}(a-1)x+ay+2\,z=-1\\(a-1)x+2ay+3\,z=0\\(1-a)x+az=a^2+1\end{cases}$ **(3 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix}a-1 & a & 2\\a-1 & 2a & 3\\1-a & 0 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-1 & a & 2\\0 & a & 1\\0 & a & a+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-1 & a & 2\\0 & a & 1\\0 & 0 & a+1\end{vmatrix}=a\,(a-1)\,(a+1)\Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow a\,(a-1)\,(a+1)=0\Rightarrow\begin{cases}a-1=0\Rightarrow a=1\\a+1=0\Rightarrow a=-1\Rightarrow\\a=0\end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{-1\,,0\,,1\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ ingcógnitas\Rightarrow Sist.\ Compatible Deter\min ado$$

$Si\ a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -1 & 2 & -1\\-2 & -2 & 3 & 0\\2 & 0 & -1 & 2\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1 & 1\\0 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Núm.\ incógnitas$$

$$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado\Rightarrow -y+z=1\Rightarrow y=-1+z\Rightarrow -2x+1-z+2z=0\Rightarrow 2x=1+z\Rightarrow$$

$$Solución\Rightarrow(x\,,\,y\,,\,z)=\left(\frac{1+\lambda}{2}\,,-1+\lambda\,,\,\lambda\right)$$

$Si\ a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 2 & -1\\-1 & 0 & 3 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 2 & -1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 2 & 1\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 2 & -1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\Rightarrow 0z=-1\Rightarrow z=-\frac{1}{0}\Rightarrow Sin\ solución$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 2 & -1\\0 & 2 & 3 & 0\\0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 2 & -1\\0 & 0 & -1 & 2\\0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 2 & -1\\0 & 0 & -1 & 2\\0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right)\Rightarrow 0z=4\Rightarrow z=\frac{4}{0}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$Soluciones\ cuando\ es\ Compatible\ Deter\min ado$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1 & a & 2\\0 & 2a & 3\\a^2+1 & 0 & a\end{vmatrix}}{a\,(a-1)(a+1)}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & a & 2\\2 & 0 & -1\\a^2+1 & 0 & a\end{vmatrix}}{a\,(a-1)(a+1)}=\frac{(-a)\begin{vmatrix}2 & -1\\a^2+1 & a\end{vmatrix}}{a\,(a-1)(a+1)}=\frac{(-1)\cdot(2a+a^2+1)}{(a-1)(a+1)}=-\frac{(a+1)^2}{(a-1)(a+1)}=-\frac{a+1}{a-1}$$

Continuación del Problema A.1

Continuación Soluciones cuando es Compatible Determinado

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 2 \\ a-1 & 0 & 3 \\ 1-a & a^2+1 & a \end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)}=\frac{\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a^2 & a+2 \end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)}=\frac{\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2+a+2 \end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)}=-\frac{(a-1)\cdot(a^2-a-2)}{a(a-1)(a+1)}$$

$$y=-\frac{(a-2)\cdot(a+1)}{a\ (a+1)}=-\frac{a-2}{a}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a-1 & a & -1 \\ a-1 & 2a & 0 \\ 1-a & 0 & a^2+1 \end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)}=\frac{\begin{vmatrix} a-1 & a & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & a & a^2 \end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)}=\frac{\begin{vmatrix} a-1 & a & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)}=\frac{a\ (a-1)(a^2-1)}{a(a-1)(a+1)}=\frac{(a+1)(a-1)}{a+1}=a-1$$

$$Solución \Rightarrow (x\,,y\,,z)=\left(-\frac{a+1}{a-1}\,,-\frac{a-2}{a}\,,a-1\right)$$

A.2 Se considera la recta **s** que pasa por el punto $P\equiv(0\,,2\,,1)$ y es perpendicular a la recta $r\equiv\begin{cases} x-y-z=0 \\ x-4y+2z+9=0 \end{cases}$ Encuentra el punto de corte de **r** y **s (2 puntos)**

El vector formado por el punto genérico **R** de la recta y el punto **P** es perpendicular a el vector director de la recta **r** , por ello el producto escalar de dichos vectores es nulo dándonos el parámetro para hallar el punto de corte que se pide

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ x-4y+2z+9=0 \end{cases} \Rightarrow -3y+3z+9=0 \Rightarrow -y+z+3=0 \Rightarrow y=z+3 \Rightarrow x-z-3-z=0 \Rightarrow x=3+2z$$

$$r\equiv\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PR}=(3+2\lambda\,,3+\lambda\,,\lambda)-(0\,,2\,,1)=(3+2\lambda\,,1+\lambda\,,\lambda-1) \\ \overrightarrow{v_r}=(2\,,1\,,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PR}\perp\overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{v_r}=0$$

$$(3+2\lambda\,,1+\lambda\,,\lambda-1)\cdot(2\,,1\,,1)=0 \Rightarrow 6+4\lambda+1+\lambda+\lambda-1=0 \Rightarrow 6\lambda+6=0 \Rightarrow 6\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow$$

$$R\equiv\begin{cases} x=3+2\cdot(-1) \\ y=3+(-1) \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow R\equiv(1\,,2\,,-1)$$

Opción B

B.1- Dadas la matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, calcula **rango (AB)** y **rango (BA) (2 puntos)**

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\,(AB)=1$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ -1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 3 & -6\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 3 & -6\\ 0 & 3 & -6\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 3 & -6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$rang\,(BA)=1$$

B.2.- Dado el punto $R\equiv(1\,,-1\,,2)$, encuentra los puntos **P** y **Q** de la recta $r\equiv\begin{cases}x+y+z-4=0\\ x+2y+2z-6=0\end{cases}$ tales que **PQR** sea un triángulo equilátero **(3 puntos)**

Hallaremos el punto medio **M** de **Q** y **R** como el punto de mínima distancia entre el punto **P** y la recta **r**, para ello trazaremos un plano π que contenga a **P** y cuyo vector director es el de la recta **r**, ya que es perpendicular a ella, siendo el producto escalar, de este director y el vector **PG** donde **G** es el punto genérico del plano, es nulo y la ecuación del plano pedido. Hallando la intersección del plano y al recta **r** tendremos el punto **M**
El módulo del vector **MR** o **MQ** es la mitad del módulo del vector **PQ** o **PR**

$$\begin{cases}-x-y-z+4=0\\ x+2y+2z-6=0\end{cases}\Rightarrow y+z-2=0\Rightarrow y=2-z\Rightarrow x+2-z+z-4=0\Rightarrow x=2\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=2\\ y=2-\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_r}=(0\,,-1\,,1)\\ \overrightarrow{PG}=(x\,,\,y\,,\,z)-(1\,,-1\,,2)=(x-1\,,\,y+1\,,\,z-2)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{PG}\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{PG}=0\Rightarrow$$

$$(0\,,-1\,,1)\cdot(x-1\,,\,y+1\,,\,z-2)=0\Rightarrow -y-1+z-2=0\Rightarrow\pi\equiv y-z+3=0\Rightarrow$$

$$Punto\ de\ intersección\ M\Rightarrow 2-\lambda-\lambda+3=0\Rightarrow -2\lambda+5=0\Rightarrow 2\lambda=5\Rightarrow\lambda=\frac{5}{2}\Rightarrow M\equiv\begin{cases}x=2\\ y=2-\frac{5}{2}\\ z=\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{PR}=(2\,,2-\lambda\,,\,\lambda)-(1\,,-1\,,2)=(1\,,3-\lambda\,,\,\lambda-2)\\ \overrightarrow{MR}=(2\,,2-\lambda\,,\,\lambda)-\left(2\,,-\frac{1}{2}\,,\frac{5}{2}\right)=\left(0\,,\frac{5}{2}-\lambda\,,\,\lambda-\frac{5}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow\left|\overrightarrow{MR}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{PR}\right|\Rightarrow\left|\overrightarrow{PR}\right|=2\cdot\left|\overrightarrow{MR}\right|\Rightarrow$$

Continuación del problema B.2

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{1^2 + (3-\lambda)^2 + (\lambda-2)^2} \\ \left|\overrightarrow{MR}\right| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{5}{2}-\lambda\right)^2 + \left(\lambda - \frac{5}{2}\right)^2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1+(3-\lambda)^2 + (\lambda-2)^2} = 2\cdot\sqrt{\left(\frac{5-2\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\lambda-5}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$1+9-6\lambda+\lambda^2+\lambda^2-4\lambda+4 = 4\cdot\left(\frac{25-20\lambda+4\lambda^2+4\lambda^2-20\lambda+25}{4}\right) \Rightarrow$$

$$2\lambda^2-10\lambda+14 = 8\lambda^2-40\lambda+50 \Rightarrow 6\lambda^2-30\lambda+36=0 \Rightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2-4\cdot 1\cdot 6 = 1 \geq 0$$

$$x = \frac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5+1}{2} = 3 \Rightarrow Q \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 2-3 = -1 \Rightarrow Q \equiv (2\,,-1\,,3) \\ z = 3 \end{cases} \\ x = \frac{5-1}{2} = 2 \Rightarrow R \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 2-2 = 0 \Rightarrow R \equiv (2\,,0\,,2) \\ z = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Opción C

C.1.- Halla las integrales indefinidas

$a)\quad \int \frac{2\,dx}{x^2-4}$ **(1 punto)**

$b)\quad \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ **(1 punto)**

$a)$

$$x^2-4 = (x+2)(x-2) \Rightarrow \frac{2}{x^2-4} = \frac{2}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2} = \frac{A\,(x-2)+B\,(x+2)}{(x+2)(x-2)} \Rightarrow$$

$$A\,(x-2)+B\,(x+2) = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow A\,(2-2)+B\,(2+2) = 2 \Rightarrow 4B = 2 \Rightarrow B = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ x = -2 \Rightarrow A\,(-2-2)+B\,(-2+2) = 2 \Rightarrow -4A = 2 \Rightarrow A = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{x^2-4} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2}$$

$$\int \frac{2\,dx}{x^2-4} = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\cdot\ln t + \frac{1}{2}\cdot\ln u = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{u}{t} = \ln\sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + K$$

$$\begin{cases} x+2 = t \Rightarrow dx = dt \\ x-2 = u \Rightarrow dx = du \end{cases}$$

Continuación del problema B.2

$b)$

$$I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int\frac{2t\ dt}{1+t}=\int 2\ dt-2\int\frac{dt}{t+1}=2t-2\int\frac{du}{u}=2\sqrt{x}-2\ \ln u=2\sqrt{x}-\ln u^2=2\sqrt{x}-\ln\left(1+t\right)^2$$

$$x=t^2\Rightarrow dx=2t\ dt \qquad t+1=u\Rightarrow dt=du$$

$$\begin{array}{r|l} 2t & t+1 \\ \hline -2t-2 & 2 \\ -2 & \end{array}$$

$$I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\sqrt{x}-\ln\left(1+\sqrt{x}\right)^2+K$$

C.2.- Dada la función $f(x)=x^{\ln x}$, demuestra que existe $\alpha\in(1\ ,e)$ tal que $f'(\alpha)=1$.
Menciona los resultados teóricos que utilices **(3 puntos)**

__**Teorema del valor medio o de Lagrange**__

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Geometricamente, como **f'(c)** la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**

$$\begin{cases} f(1)=1^{\ln 1}=1^0=1 \\ f(e)=e^{\ln e}=e^1=e \end{cases}\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{f(e)-f(1)}{e-1}=\frac{e-1}{e-1}=1$$

Opción D

D.1.- Demuestra que la derivada de la función $f(x)=\sqrt{x^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}$ se anula en algún punto del intervalo $(1\ ,3)$. Menciona los resultados teóricos que utilices **(2 puntos)**

__**Teorema de Rolle**__

Sea **f(x)** una función continua en **[a , b],** derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b**); entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que **f'(c) = 0**

La función es continua y derivable en $(1\ ,3)$ y se verifica que

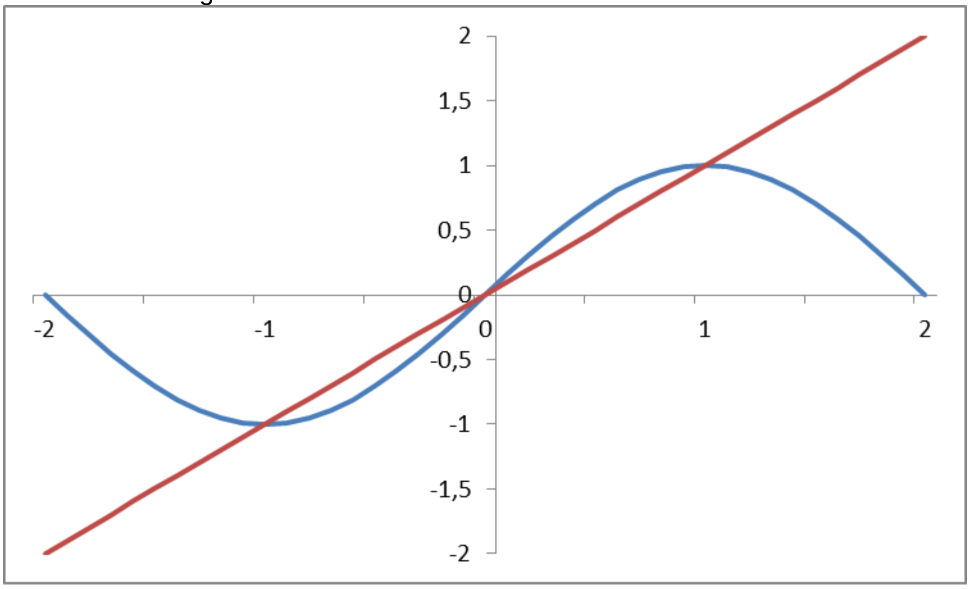
$$\begin{cases} f(1)=\sqrt{1^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)}}=\sqrt{1^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}}=\sqrt{1^0}=1 \\ f(3)=\sqrt{3^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)}}=\sqrt{3^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}}=\sqrt{3^0}=\sqrt{1}=1 \end{cases}\Rightarrow f(1)=f(3)$$

entonces existe, al menos, un punto $c\in(1\ ,3)$ tal que **f'(c) = 0**

D.2.- Encuentra los tres puntos en que se cortan las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre sus gráficas **(3 puntos)**

Utilizaremos las graficas de ambas funciones



$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow \begin{cases} f(-1)=-1 \\ g(-1)=sen\left[\frac{\pi}{2}(-1)\right]=sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \end{cases} \\ x=0 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ g(0)=sen\left[\frac{\pi}{2}\cdot 0\right]=sen\ (0)=0 \end{cases} \\ x=1 \Rightarrow \begin{cases} f(1)=1 \\ g(1)=sen\left[\frac{\pi}{2}\cdot 1\right]=sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \end{cases} \end{cases}$$

$$Simetrias \Rightarrow \begin{cases} f(-x)=-x=-f(-x) \Rightarrow Simétrica\ respecto\ a\ \ O \\ g(-x)=sen\left[\frac{\pi}{2}(-x)\right]=sen\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=-sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)=-g(x) \Rightarrow Simétrica\ respecto\ a\ \ O \end{cases}$$

$$A = 2\cdot\int_0^1 sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx - 2\cdot\int_0^1 x\,dx = 2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1 sen\,t\,dt - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^1 = -\pi\cdot\left[\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(1^2-0^2\right)\cdot$$

$$\frac{\pi}{2}x = t \Rightarrow \frac{\pi}{2}dx = dt \Rightarrow dx = \frac{2}{\pi}dt \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=0 \Rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$A = -\pi\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) - 1 = -\pi\cdot(0-1) - 1 = (\pi-1)\,u^2$$