# Opción A

**A.1-** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real **a** y resuélvelo en los casos que es compatible $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+\left(a^2-a-1\right)y=-1 \\ x+\left(a^2-a-1\right)y+(a-2)z=1-a^2 \end{cases}$ **(3 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & a^2-a-1 & 0 \\ 1 & a^2-a-1 & a-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & a^2-a & 1 \\ 0 & a^2-a & a-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & a^2-a & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix}=1\cdot(a-2)\left(a^2-a\right)=a\cdot(a-2)(a-1)$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow a\cdot(a-2)(a-1)=0\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ a-2=0\Rightarrow a=2\Rightarrow \\ a-1=0\Rightarrow a=1 \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{0\,,1\,,2\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Sist.\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<Numero\ incógnitas$$

$$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado\Rightarrow z=-1\Rightarrow x-y+1=0\Rightarrow x=y-1$$

$$Solución\Rightarrow(x\,,\,y\,,\,z)=(\lambda-1\,,\,\lambda\,,\,-1)$$

$Si\ a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<Numero\ incógnitas\Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado\Rightarrow z=-1\Rightarrow x-y+1=0\Rightarrow x=y-1$$

$$Solución\Rightarrow(x\,,\,y\,,\,z)=(\mu-1\,,\,\mu\,,\,-1)$$

$Si\ a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)\Rightarrow 0z=-2\Rightarrow z=-\frac{2}{0}\Rightarrow Sin\ solución$$

$Sistema\ Incompatible$

**Continuación del Problema A.1**

*Soluciones cuando es Compatible Determinado*

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -\left(a^2-a-1\right)\\ 1-a^2 & 0 & a-2-\left(a^2-a-1\right)\end{vmatrix}}{a\cdot(a-2)(a-1)}=\frac{\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -\left(a^2-a-1\right)\\ 1-a^2 & 0 & -a^2+2a-1\end{vmatrix}}{a\cdot(a-2)(a-1)}=\frac{-(-1)\begin{vmatrix}-1 & -a^2+a+1\\ 1-a^2 & -a^2+2a-1\end{vmatrix}}{a\cdot(a-2)(a-1)}=$$

$$x=\frac{a^2-2a+1-\left(1-a^2\right)\left(-a^2+a+1\right)}{a\cdot(a-2)(a-1)}=\frac{a^2-2a+a^2-a-a-a^4+a^3+a^2}{a\cdot(a-2)(a-1)}=\frac{-a^4+a^3+3a^2-4a}{a\cdot(a-2)(a-1)}=$$

$$x=\frac{-a^3+a^2+3a-4}{(a-2)(a-1)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1-a^2 & a-2\end{vmatrix}}{a\cdot(a-2)(a-1)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1-a^2 & a-1\end{vmatrix}}{a\cdot(a-2)(a-1)}=\frac{1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1-a^2 & a-1\end{vmatrix}}{a\cdot(a-2)(a-1)}=\frac{-(a-1)-\left(1-a^2\right)}{a\cdot(a-2)(a-1)}=\frac{(1-a)-(1-a)(1+a)}{a\cdot(a-2)(a-1)}$$

$$y=\frac{(1-a)[1-(1+a)]}{a\cdot(a-2)(a-1)}=\frac{-(a-1)(1-1-a)}{a\cdot(a-2)(a-1)}=\frac{-(-a)}{a\cdot(a-2)}=\frac{1}{a-2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & a^2-a-1 & -1\\ 1 & a^2-a-1 & 1-a^2\end{vmatrix}}{a\cdot(a-2)(a-1)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & a^2-a & -1\\ 0 & a^2-a & 1-a^2\end{vmatrix}}{a\cdot(a-2)(a-1)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & a^2-a & -1\\ 0 & 0 & 1-a^2+a^2-a\end{vmatrix}}{a\cdot(a-2)(a-1)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & a^2-a & -1\\ 0 & 0 & 1-a\end{vmatrix}}{a\cdot(a-2)(a-1)}$$

$$z=\frac{\left(a^2-a\right)(1-a)}{a\cdot(a-2)(a-1)}=\frac{a\,(a-1)(1-a)}{a\cdot(a-2)(a-1)}=\frac{1-a}{a-2}$$

$$Solución\Rightarrow(x\,,\,y\,,\,z)=\left(\frac{-a^3+a^2+3a-4}{(a-2)(a-1)}\,,\,\frac{1}{a-2}\,,\,\frac{1-a}{a-2}\right)$$

**A.2.-** Halla la ecuación del plano $\pi$ que pasa por el punto $P\equiv(3\,,-1\,,\,4)$ y es paralelo a las rectas $r_1\equiv\begin{cases}5x-y+3z-4=0\\ 2x-y+z-1=0\end{cases}$ y $r_2\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-3}$ **(2 puntos)**

La recta r es la intersección del plano $\pi$ que equidista de **P** y **Q** y del plano $\alpha$ que equidista de **P** y **R.**

Un plano que equidista de dos puntos esta determinado por el punto medio de ellos y el vector que forman, que es el del plano, que es perpendicular al vector formado por el punto medio hallado y el punto **G** genérico del plano siendo su producto escalar nulo y la ecuación pedida del plano

$$r_1\equiv\begin{cases}5x-y+3z-4=0\\ -2x+y-z+1=0\end{cases}\Rightarrow 3x+2z-3=0\Rightarrow 3x=-2z+3\Rightarrow x=-\frac{2}{3}z+1\Rightarrow-\frac{4}{3}z+2-y+z-1=0\Rightarrow$$

$$y=-\frac{1}{3}z+1=0\Rightarrow\overrightarrow{v_{r_1}}=\left(-\frac{2}{3}\,,-\frac{1}{3}\,,1\right)\equiv(2\,,1\,,-3)$$

**Continuación del Problema A.2**

$$r_1 \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}} = (2\,,1\,,-3) \\ \overrightarrow{v_{r_2}} = (1\,,2\,,-3) \\ \overrightarrow{PG} = (x\,,\,y\,,\,z) - (3\,,-1\,,4) = (x-3\,,\,y+1\,,\,z-4) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-3\cdot(x-3) - 3\cdot(y+1) + 4\cdot(z-4) - (z-4) + 6\cdot(x-3) + 6\cdot(y+1) = 0 \Rightarrow$$

$$3\cdot(x-3) + 3\cdot(y+1) - 3\cdot(z-4) = 0 \Rightarrow (x-3) + (y+1) - (z-4) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y - z + 2 = 0$$

## Opción B

**B.1-** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ halla su inversa y úsala para encontrar la matriz **X** que cumple **AXA = I₂ (2 puntos)**

Para que el determinante sea nulo una fila o columna debe de ser , en todos sus términos, nula

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1}AXAA^{-1} = A^{-1}I_2A^{-1} \Rightarrow I_2XI_2 = A^{-1}A^{-1} \Rightarrow X = \left(A^{-1}\right)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

**B.2**.- Dados los puntos $P \equiv (4\,,2\,,1)$ y $Q \equiv (3\,,3\,,1)$ encuentra los dos puntos **$R_1$** y **$R_2$** del plano $\pi \equiv x - y - 2z + 3 = 0$ tales que **$PQR_1$** y **$PQR_2$** son triángulos equiláteros **(3 puntos)**

Sean los puntos $R_1 \equiv (x\,,\,y\,,\,z)$ y $R_2 \equiv (x\,,\,y\,,\,z)$

a) La longitud del lado del triángulo es el módulo del vector **PQ**

b) El lado **$PR_1$** es igual que **$QR_1$**

c) Los puntos **$R_1$** y **$R_2$** están contenidos en el plano $\pi$

d) El lado **$PR_1$** es igual a la longitud del lado, lo mismo que el lado **$PR_2$**

$a)$

$$\overrightarrow{PQ} \equiv (3\,,3\,,1) - (4\,,2\,,1) = (-1\,,1\,,0) \Rightarrow Lado\ del\ triangulo \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ u$$

$b)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PR_1} \equiv (x\,,\,y\,,\,z) - (4\,,2\,,1) = (x-4\,,\,y-2\,,\,z-1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PR_1}\right| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} \\ \overrightarrow{QR_1} \equiv (x\,,\,y\,,\,z) - (3\,,3\,,1) = (x-3\,,\,y-3\,,\,z-1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{QR_1}\right| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{PR_1}\right| = \left|\overrightarrow{QR_1}\right| \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} \Rightarrow$$

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 \Rightarrow -8x - 4y + 20 + 6x + 6y - 18 = 0 \Rightarrow$$

$$-2x + 2y + 2 = 0 \Rightarrow -x + y + 1 = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0$$

**Continuación del Problema B.2**

$c)$

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-y-2z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ -x+y+2z-3=0 \end{cases} \Rightarrow 2z-4=0 \Rightarrow 2z=4 \Rightarrow z=2$$

$d)$

$$y=x-1$$

$$\left|\overrightarrow{PR_1}\right|=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+(2-1)^2}=\pm\sqrt{2} \Rightarrow (x-4)^2+(y-2)^2+(2-1)^2=2 \Rightarrow$$

$$x^2-8x+16+y^2-4y+4+1^2=2 \Rightarrow x^2-8x+16+(x-1)^2-4(x-1)+5-2=0 \Rightarrow$$

$$x^2-8x+16+x^2-2x+1-4x+4+3=0 \Rightarrow 2x^2-14x+24=0 \Rightarrow x^2-7x+12=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=(-7)^2-4\cdot1\cdot12=1\geq 0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7+1}{2}=4 \Rightarrow y=4-1=3 \Rightarrow R_1\equiv(4\,,3\,,2) \\ x=\dfrac{7-1}{2}=3 \Rightarrow y=3-1=2 \Rightarrow R_2\equiv(3\,,2\,,2) \end{cases}$$

## Opción C

**C.1.-** Calcula los siguientes límites

$a)\quad \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$ **(1 punto)**

$b)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1-\cos x)}$ **(1 punto)**

$a)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}=\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{[(x+1)-(x-1)]\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{[(x+2)-(x-2)]\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1-x+1)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{(x+2-x+2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{4\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}+\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}}{2\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}}{2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)}=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{1}}{2\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)}=\frac{1}{2}$$

$b)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1-\cos x)}=\frac{\ln\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2}}}{\ln\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\ln\sqrt{1-0}}{\ln(1-0)}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\text{Aplicando L´Hopital}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos x}}\cdot\dfrac{sen\ x}{2\sqrt{1-\cos x}}}{\dfrac{1}{1-\cos x}\cdot sen\ x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{sen\ x}{2(1-\cos x)}}{\dfrac{sen\ x}{1-\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos x)sen\ x}{2(1-\cos x)sen\ x}=\frac{1}{2}$$

**C.2**.- Hallar el máximo relativo, el mínimo relativo y la asíntota oblicua de la función $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$ **(3 puntos)**

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x-1)-(x^2+2x-2)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x+2x-2-x^2-2x+2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\Rightarrow$$

$$Creciente\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}>0\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x-2>0\Rightarrow x=2\\(x-1)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

| | $-\infty$ a **0** | **0** a **2** | **2** a $\infty$ |
|---|---|---|---|
| **x > 0** | **( - )** | **( + )** | **( +)** |
| **x > 2** | **( - )** | **( - )** | **( +)** |
| **$(x-1)^2 > 0$** | **( + )** | **( + )** | **( +)** |
| **Solución** | **( + )** | **( - )** | **( +)** |

**Creciente** $\forall x\in\Re/(x<0)\cup(x>2)$ **Decreciente** $\forall x\in\Re/0<x<2$

**Máximo relativo en x = 0** $\Rightarrow f(0)=\dfrac{0^2+2\cdot0-2}{0-1}=2$ **(de creciente pasa a decreciente)**

**Mínimo relativo en x = 2** $\Rightarrow f(2)=\dfrac{2^2+2\cdot2-2}{2-1}=6$ **(de decreciente pasa a creciente)**

**Asíntotas oblicuas**

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2x-2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-2}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+2\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$m=\frac{1+\frac{2}{\infty}-\frac{2}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0-0}{1-0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+2x-2}{x-1}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-2-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{3-\frac{2}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{3-0}{1-0}=3\Rightarrow Existe\ asíntota\ oblicua,\ y=x+3, cuando\ x\to\infty$$

**Continuación del Problema B.2**

**Asíntotas oblicuas (Continuación)**

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2+2x-2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^2+2(-x)-2}{(-x)^2-(-x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-2}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-2\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}m=\frac{1-\frac{2}{\infty}-\frac{2}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{1-0-0}{1+0}=1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+2x-2}{x-1}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-2-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3(-x)-2}{(-x)-1}=$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x-2}{-x-1}=\frac{-\infty}{-\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}{-\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3-\frac{2}{x}}{-1-\frac{1}{x}}=\frac{-3-\frac{2}{\infty}}{-1-\frac{1}{\infty}}=\frac{-3-0}{-1-0}=3\Rightarrow$$

$$\textit{Existe asíntota oblicua}, y=x+3, \textit{cuando } x\to-\infty$$

## Opción D

**D.1.-** Dada la función $f(x)=x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ , demuestra que existe $\alpha\in(1\,,\,2)$ tal que $f'(\alpha)=-2$ . Menciona los resultados teóricos que utilices **(2 puntos)**

**<u>Teorema del valor medio o de Lagrange</u>**
Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\,,b)$ tal que: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Geometricamente, como **f'(c)** la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**

$$\begin{cases} f(1)=1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ f(2)=2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)=2\cdot\cos(\pi)=2\cdot(-1)=-2\end{cases}\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{-2-0}{1}=-2$$

**D.2.-** Halla los puntos en que se cortan las funciones $f(x)=x^3-3x$ y $g(x)=2x^2$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas **(3 puntos)**

$$\textit{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^3-3x=2x^2 \Rightarrow x^3-2x^2-3x=0 \Rightarrow x\left(x^2-2x-3\right)=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2-2x-3=0 \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16\geq 0 \Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2+4}{2}=3 \\ x=\dfrac{2-4}{2}=-1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\textit{Puntos de corte con } OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ x^3-3x=0 \Rightarrow \left(x^2-3\right)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\textit{Simetrías} \Rightarrow \begin{cases} f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-\left(x^3-3x\right)=-f(x) \Rightarrow \textit{Simétrica respecto a O} \\ g(-x)=2(-x)^2=2x^2=g(x) \Rightarrow \textit{Simétrica respecto a OY} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}\in(-1,0) \Rightarrow \begin{cases} f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3-3\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{11}{8}>0 \\ g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}>0 \end{cases} \Rightarrow \frac{11}{8}<\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)>g(x)$$

$$1\in\left(0,\sqrt{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} f(1)=1^3-3\cdot1=-2<0 \\ g(1)=2\cdot1^2=2>0 \end{cases}$$

$$2\in\left(\sqrt{3},3\right) \Rightarrow \begin{cases} f(2)=2^3-3\cdot2=2>0 \\ g(2)=2\cdot2^2=8>0 \end{cases} \Rightarrow 8>2 \Rightarrow g(x)>f(x)$$

$$A=\int_{-1}^{0}\left(x^3-3x\right)dx-\int_{-1}^{0}2x^2\,dx+\left|\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(x^3-3x\right)dx\right|+\int_{0}^{\sqrt{3}}2x^2\,dx+\int_{\sqrt{3}}^{3}2x^2\,dx-\int_{\sqrt{3}}^{3}\left(x^3-3x\right)dx$$

$$A=\int_{-1}^{0}\left(x^3-3x\right)dx-\int_{-1}^{0}2x^2\,dx-\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(x^3-3x\right)dx+\int_{0}^{3}2x^2\,dx-\int_{\sqrt{3}}^{3}\left(x^3-3x\right)dx=$$

$$A=\int_{-1}^{0}\left(x^3-3x\right)dx-\int_{-1}^{0}2x^2\,dx-\int_{0}^{3}\left(x^3-3x\right)dx+\int_{0}^{3}2x^2\,dx=\int_{-1}^{0}\left(x^3-3x-2x^2\right)dx+\int_{0}^{3}\left(-x^3+3x+2x^2\right)dx$$

$$A=\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_{-1}^{0}-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{0}-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_{0}^{3}+3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{0}^{3}+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{0}^{3}$$

$$A=\frac{1}{4}\cdot\left[0^4-(-1)^4\right]-\frac{3}{2}\cdot\left[0^2-(-1)^2\right]-\frac{2}{3}\cdot\left[0^3-(-1)^3\right]-\frac{1}{4}\cdot\left(3^4-0^4\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(3^2-0^2\right)+\frac{2}{3}\cdot\left(3^3-0^3\right)$$

$$A=\frac{1}{4}\cdot(0-1)-\frac{3}{2}\cdot(0-1)-\frac{2}{3}\cdot(0+1)-\frac{1}{4}\cdot(81-0)+\frac{3}{2}\cdot(9-0)+\frac{2}{3}\cdot(27-0)=-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}-\frac{81}{4}+\frac{27}{2}+\frac{54}{3}$$

$$A=-\frac{82}{4}+\frac{30}{2}+\frac{52}{3}=\frac{-256+180+104}{12}=\frac{28}{12}=\frac{7}{3}u^2$$