Opción A

A.1- Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real **a** y resuélvelo en los casos que es compatible $\begin{cases} x+2y+a\,z=0 \\ ax+(3a-1)\,y+(1+a^2)\,z=2 \\ x+2y+(a^2-a)\,z=a-2 \end{cases}$ **(3 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 3a-1 & a^2+1 \\ 1 & 2 & a^2-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2a \end{vmatrix}=(a^2-2a)(a-1)=a\,(a-2)(a-1)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow$$

$$a\,(a-2)(a-1)=0\Rightarrow\begin{cases} a-1=0\Rightarrow a=1 \\ a-2=0\Rightarrow a=2\Rightarrow \\ a=0 \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{0\,,1\,,2\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ ingcógnitas\Rightarrow Sist.\,CompatibleDeter\min ado$$

$Si\ a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)\Rightarrow 0z=-2\Rightarrow z=-\frac{2}{0}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases} z=2 \\ 0z=1\Rightarrow z=\frac{1}{0}\Rightarrow Sin\ solución \end{cases}\Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado\Rightarrow$$

$$y+z=2\Rightarrow y=2-z\Rightarrow x+4-2z+2z=0\Rightarrow x=-4\Rightarrow Solución\Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=(-4\,,\,2-\lambda\,,\,\lambda)$$

Continuación del Problema A.1

Continuación Soluciones cuando es Compatible Deter min *ado*

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2 & a\\ 0 & 3a-1 & a^2+1\\ a-2 & 2 & a^2-a\end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)}=\frac{2(3a-1)\left(a^2-a\right)+2\left(a^2+1\right)(a-2)-4\left(a^2+1\right)}{a(a-1)(a-2)}=$$

$$=\frac{(3a-1)\left(2a^2-2a-a^2+2a\right)+\left(a^2+1\right)(2a+4-4)}{a(a-1)(a-2)}=\frac{a^2(3a-1)+2a\left(a^2+1\right)}{a(a-1)(a-2)}=\frac{a\left(3a^2-a+2a^2+a\right)}{a(a-1)(a-2)}$$

$$x=\frac{5a^2}{(a-1)(a-2)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\ a & 0 & a^2+1\\ 1 & a-2 & a^2-a\end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\ 0 & -2a & 1\\ 0 & a-4 & a^2-2a\end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)}=\frac{1\cdot\begin{vmatrix}-2a & 1\\ a-4 & a^2-2a\end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)}=\frac{-2a\cdot\left(a^2-2a\right)-(a-4)}{a(a-1)(a-2)}=\frac{-2a^3+4a^2-a}{a(a-1)(a-2)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\ a & 3a-1 & 0\\ 1 & 2 & a-2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\ 0 & a-1 & -a^2\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)}=\frac{1\cdot\begin{vmatrix}a-1 & a^2\\ 0 & -2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)}=\frac{(-2)(a-1)(a-2)}{a(a-1)(a-2)}=-\frac{2}{a\ (a-2)}$$

$$Solución\Rightarrow(x\,,\,y\,,\,z)=\left(\frac{5a^2}{(a-1)(a-2)}\,,\,\frac{-2a^3+4a^2-a+4}{a(a-1)(a-2)}\,,\,-\frac{2}{a\ (a-2)}\right)$$

A.2.- Los puntos $P_1\equiv(1\,,0\,,1)$, $P_2\equiv(2\,,-2\,,3)$ y $P_3\equiv(-1\,,1\,,3)$ son tres vértices de un cuadrado. Encuentra el cuarto vértice **(2 puntos)**

Veremos, inicialmente, cuales puntos forman lados contiguos, serán aquellos cuyas distancias sean iguales

$$\overrightarrow{P_2P_1}\equiv(2\,,-2\,,3)-(1\,,0\,,1)=(1\,,-2\,,2)\Rightarrow d(P_1P_2)=\left|\overrightarrow{P_2P_1}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3\,u$$

$$\overrightarrow{P_3P_1}\equiv(-1\,,1\,,3)-(1\,,0\,,1)=(-2\,,1\,,2)\Rightarrow d(P_1P_3)=\left|\overrightarrow{P_3P_1}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=3\,u$$

Los lados contiguos son **P_1P_2** y **P_1P_3**. La diagonal la forma el segmento **P_2P_3** y su punto medio **Q** también los es entre P_1 y P_4 siendo este el punto buscado

$$Q\equiv\left(\frac{2+(-1)}{2}\,,\frac{(-2)+1}{2}\,,\frac{3+3}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\,,3\right)\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}=\frac{1+x_{P_4}}{2}\Rightarrow 1+x_{P_4}=1\Rightarrow x_{P_4}=0\\ -\frac{1}{2}=\frac{0+y_{P_4}}{2}\Rightarrow y_{P_4}=1\\ 3=\frac{1+z_{P_4}}{2}\Rightarrow 1+z_{P_4}=6\Rightarrow z_{P_4}=5\end{cases}\Rightarrow$$

$$P_4\equiv(0\,,1\,,5)$$

Opción B

B.1- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. Encuentra dos matrices, B y C, de tamaño 3 x 2, tales que el rango de **AB** sea 2 y el rango de **AC** sea 1. **(2 puntos)**

$$Sea \Rightarrow \begin{cases} B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\f&g\end{pmatrix} \Rightarrow AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\f&g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c-a&d-b\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix} \\ C=\begin{pmatrix}g&h\\j&k\\l&m\end{pmatrix} \Rightarrow AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}g&h\\j&k\\l&m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g&h\\j&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g&h\\j-g&k-h\end{pmatrix}\Rightarrow C=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\\5&6\end{pmatrix} \end{cases}$$

B.2.- El plano π es el que pasa por los puntos $P_1\equiv(-3\,,0\,,0)$, $P_2\equiv(1\,,-1\,,-1)$ y $P_3\equiv(-1\,,0\,,-1)$ encuentra los puntos de la recta $r_1\equiv\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{-1}$ que estén a distancia 1 del plano π **(3 puntos)**

Hallaremos, inicialmente, la ecuación general del plano π, contando para ello con los vectores $\mathbf{P_1P_2}$, $\mathbf{P_1P_3}$ y el vector $\mathbf{P_1G}$, siendo **G** el punto generador del plano.
Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector $\mathbf{P_1G}$ es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano. Después hallaremos la distancia pedida de un punto general de la recta al plano π

$$\begin{cases}\overrightarrow{P_1P_2}\equiv(1\,,-1\,,-1)-(-3\,,0\,,0)=(4\,,-1\,,-1)\\ \overrightarrow{P_1P_3}\equiv(-1\,,0\,,-1)-(-3\,,0\,,0)=(2\,,0\,,-1)\\ \overrightarrow{P_1G}\equiv(x\,,y\,,z)-(-3\,,0\,,0)=(x+3\,,y\,,z)\end{cases}\Rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix}x+3&y&z\\4&-1&-1\\2&0&-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x+3-2y+2z+4y=0\Rightarrow$$

$$\pi\equiv x+2y+2z+3=0$$

$$r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=1\\z=-2-\lambda\end{cases}\Rightarrow 1=\pm\frac{\lambda+2\cdot1+2\cdot(-2-\lambda)+3}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\Rightarrow 1=\pm\frac{\lambda+2-4-2\lambda+3}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sqrt{2}=\pm(1-\lambda)\Rightarrow$$

$$2=(1-\lambda)^2\Rightarrow 2=1-2\lambda+\lambda^2\Rightarrow\lambda^2-2\lambda-1=0\Rightarrow\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)=4+4=8\geq0\Rightarrow$$

$$\lambda=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}\Rightarrow Punto\ A\equiv\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\\y=1\\z=-2-(1+\sqrt{2})=-3-\sqrt{2}\end{cases}\\ \lambda=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}\Rightarrow Punto\ B\equiv\begin{cases}x=1-\sqrt{2}\\y=1\\z=-2-(1-\sqrt{2})=-3+\sqrt{2}\end{cases}\end{cases}$$

Opción C

C.1.- Halla los límites siguientes:

$$a)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}}$$ **(1 punto)**

$$b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{\ln(2x+1)-sen\ 2x}$$ **(1 punto)**

$a)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}} = \frac{0}{\infty-\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}\right)} = \frac{\infty}{\infty\cdot(\infty-\infty)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x(x+1)}\,[x-2-(x+1)]} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}\right)}{(-3)\sqrt{x(x+1)}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x^2}}}{(-3)\sqrt{\frac{x(x+1)}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\frac{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x}}}{(-3)\sqrt{\frac{x+1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}\right)}{(-3)\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1}\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{(-3)\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{2}{\infty}}+\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}\right)}{(-3)\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}\right)}{(-3)\sqrt{1+0}} = \frac{2\cdot 2}{(-3)\cdot 1} = -\frac{4}{3}$$

$b)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{\ln(2x+1)-sen\ 2x} = \frac{e^0-e^0}{\ln(2\cdot 0+1)-sen\ (2\cdot 0)} = \frac{1-1}{\ln 1-sen\ 0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\, e^{x^2}+2x\, e^{-x^2}}{\frac{2}{2x+1}-2\cos 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\left(e^{x^2}+e^{-x^2}\right)}{2\,\frac{1-(2x+1)\cos 2x}{2x+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,(2x+1)\left(e^{x^2}+e^{-x^2}\right)}{1-(2x+1)\cos 2x} = \frac{0\cdot(2\cdot 0+1)\left(e^0+e^0\right)}{1-(2\cdot 0+1)\cos(2\cdot 0)} =$$

$$= \frac{0\cdot 1\cdot(1+1)}{1-1\cdot 1} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0} \frac{(4x+1)\left(e^{x^2}+e^{-x^2}\right)+2x\left(e^{x^2}-e^{-x^2}\right)\cdot x\cdot(2x+1)}{-2\cdot\cos 2x+2\,(2x+1)\,sen 2x}$$

Continuación Problema C.1

$b)$*Continuación*

$$= \frac{(4\cdot 0+1)\left(e^0+e^0\right)+2\cdot 0^2\cdot(2\cdot 0+1)\left(e^0-e^0\right)}{-2\cdot\cos(2\cdot 0)+2\cdot[(2\cdot 0)+1]\,sen\,(2\cdot 0)} = \frac{1\cdot(1+1)+0\cdot 1\cdot(1-1)}{-2\cdot 1+2\cdot 1\,0} = \frac{2}{-2} = -1$$

C.2.- Demuestra que la función $f(x)=(x+1)\ln\left(2x^2-x+1\right)$ tiene un mínimo relativo en el intervalo **(0 , 1)**. Menciona los resultados teóricos que utilices **(3 puntos)**

<u>Teorema de Bolzano</u>

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)],** entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que **f(c) = 0**

La función es continua y derivable en toda la recta real, por lo tanto en los intervalos que se citan

$$f'(x)=1\cdot\ln\left(2x^2-x+1\right)+\frac{(4x-1)(x+1)}{2x^2-x+1}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} f'(0)=\ln\left(2\cdot 0^2-0+1\right)+\dfrac{(4\cdot 0-1)(0+1)}{2\cdot 0^2-0+1}=\ln 1+\dfrac{(-1)\cdot 1}{0-0+1}=0+\dfrac{(-1)}{1}=-1<0 \\ f'(1)=\ln\left(2\cdot 1^2-1+1\right)+\dfrac{(4\cdot 1-1)(1+1)}{2\cdot 1^2-1+1}=\ln 2+\dfrac{3\cdot 2}{2}=3+\ln 2>0 \end{cases}$$

Como **f'(x)** es continua en el intervalo **[0 , 1],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[-1 $\neq$ 3+ln 2],** entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que **f'(c) = 0** que puede ser un **máximo o un mínimo** relativo

$$\begin{cases} f(0)=(0+1)\ln\left(2\cdot 0^2-0+1\right)=1\cdot\ln 1=0 \\ f(1)=(1+1)\ln\left(2\cdot 1^2-1+1\right)=2\cdot\ln 2=\ln 4 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\in(0\ ,1)\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\ln\left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1\right]=\frac{3}{2}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\cdot\ln 1=0\Rightarrow$$

$$f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)<f(1)\Rightarrow \textit{Mínimo relativo}$$

Opción D

D.1.- Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x-1}$ **(2 puntos)**

Asíntotas verticales

$$x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow f(1)=\frac{2\cdot 1^2+1}{1-1}=\frac{3}{0}\Rightarrow \textit{Sin solución}\Rightarrow \textit{En } x=1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\dfrac{3}{1^- -1}=\dfrac{3}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{3}{1^+ -1}=\dfrac{3}{0^+}=\infty\end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}}{\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2+\dfrac{1}{\infty}}{\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{1}{\infty}}=\frac{2+0}{0-0}=\frac{2}{0}=\infty\Rightarrow$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(-x)^2+(-x)}{(-x)-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{-x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{x}{x^2}}{-\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2}{0}=\infty\Rightarrow$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2+x}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=\frac{2+\dfrac{1}{\infty}}{1-\dfrac{1}{\infty}}=\frac{2+0}{1-0}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2+x}{x-1}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-2x^2-2x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x-1}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{x}{x}}{\dfrac{x}{x}-\dfrac{1}{x}}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1-\dfrac{1}{x}}=\frac{-1}{1-\dfrac{1}{\infty}}=\frac{-1}{1-0}=-1\Rightarrow \textit{Existe asíntota oblicua, } y=2x-1, \textit{ cuando } x\to\infty$$

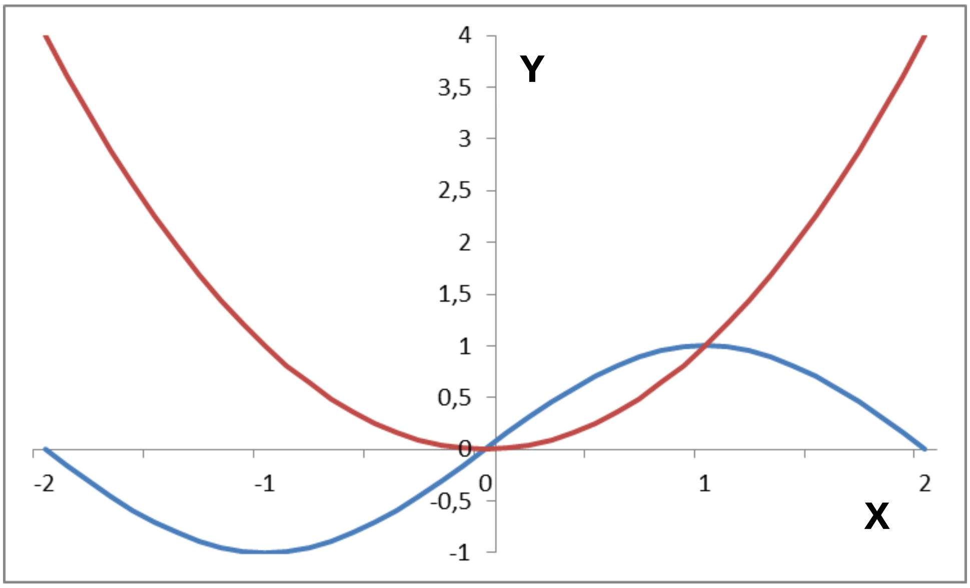
Continuación del Problema D.1

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^2+x}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{2-0}{1+0}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x^2+x}{x-1}-2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-2x^2-2x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{-x-1}=\frac{\infty}{-\infty}=$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{-\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{-1-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{-1-0}=-1\Rightarrow \textit{Existe asíntota oblicua},\ y=2x-1,\ \textit{cuando}\ x\to-\infty$$

D.2.- Dibuja las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=sen\,\frac{\pi}{2}x$. Comprueban que sólo se cortan cuando **x = 0** y **x = 1**. Calcula el área de la región del plano encerrada por las gráficas de las funciones **f(x)** y **g(x)** **(3 puntos)**



$$\begin{cases}\begin{cases} f(0)=0^2=0 \\ g(0)=sen\,\frac{\pi}{2}\cdot 0=sen\,0=0\end{cases}\Rightarrow f(0)=g(0) \\ \begin{cases} f(1)=1^2=1 \\ g(1)=sen\,\frac{\pi}{2}\cdot 1=sen\,\frac{\pi}{2}=1\end{cases}\Rightarrow f(1)=g(1)\end{cases}$$

$$A=\int_0^1 sen\,\frac{\pi}{2}x\,dx-\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,t\,dt-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1=-\frac{2}{\pi}\left[\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right)=$$

$$\frac{\pi}{2}x=t\Rightarrow\frac{\pi}{2}dx=dt\Rightarrow dx=\frac{2}{\pi}dt\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$A=-\frac{2}{\pi}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)-\frac{1}{3}=-\frac{2}{\pi}\cdot(0-1)-\frac{1}{3}=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{3}=\frac{6+\pi}{3\pi}\,u^2$$