Opción A

A.1- Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a y resuélvelo en los casos que es compatible $\begin{cases} x+ay+(a-2)z=1 \\ x+2a\ y+(a-4)z=3 \\ ax+a^2\ y+(2a^2-2a-4)z=2a+2 \end{cases}$

(3 puntos)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a-2 \\ 1 & 2a & a-4 \\ a & a^2 & 2a^2-2a-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a-2 \\ 0 & a & -2 \\ 0 & 0 & 2a^2-2a-4-a^2+4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & -2 \\ 0 & a^2-2a \end{vmatrix} = a \cdot (a^2-2a) = a^2 \cdot (a-2)$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow a^2 \cdot (a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a-2=0 \Rightarrow a=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re - \{0\ ,2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ ingcógnitas \Rightarrow Sist.CompatibleDeterminado$$

$Si\ a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = -2 \Rightarrow z = -\frac{2}{0} \Rightarrow Sin\ solución$$

$Si\ a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2z = 2 \Rightarrow z = 1 \\ 0z = -2 \Rightarrow z = -\frac{2}{0} \Rightarrow Sin\ solución \end{cases} \Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$Cuando\ el\ sistema\ es\ Compatible\ Determinado$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a-2 \\ 3 & 2a & a-4 \\ 2a+2 & a^2 & 2a^2-2a-4 \end{vmatrix}}{a^2 \cdot (a-2)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a-2 \\ 1 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a^2-2a \end{vmatrix}}{a^2 \cdot (a-2)} = \frac{-a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -a \\ a+2 & a^2-2a \end{vmatrix}}{a^2 \cdot (a-2)} = -\frac{a^2-2a+a^2-2a}{a \cdot (a-2)}$$

$$x = -\frac{a^2-2a+a^2-2a}{a \cdot (a-2)} = -\frac{2a^2-4a}{a \cdot (a-2)} = -2a\frac{a-2}{a \cdot (a-2)} = -2$$

Continuación del Problema A.1

Continuación Soluciones cuando es Compatible Determinado

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a-2\\ 1 & 3 & a-4\\ a & 2a+2 & 2a^2-2a-4\end{vmatrix}}{a^2\cdot(a-2)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a-2\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & a+2 & a^2-4\end{vmatrix}}{a^2\cdot(a-2)}=\frac{1\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ a+2 & a^2-4\end{vmatrix}}{a^2\cdot(a-2)}=\frac{2\cdot(a-2)\cdot(a+2)+2\cdot(a+2)}{a^2\cdot(a-2)}$$

$$y=\frac{2\cdot(a+2)\cdot(a-2+1)}{a^2\cdot(a-2)}=\frac{2\cdot(a+2)\cdot(a-1)}{a^2\cdot(a-2)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & 2a & 3\\ a & a^2 & 2a+2\end{vmatrix}}{a^2\cdot(a-2)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 0 & a & 2\\ 0 & 0 & a+2\end{vmatrix}}{a^2\cdot(a-2)}=\frac{1\cdot\begin{vmatrix}a & 2\\ 0 & a+2\end{vmatrix}}{a^2\cdot(a-2)}=\frac{a\cdot(a+2)}{a^2\cdot(a-2)}=\frac{(a+2)}{a\cdot(a-2)}$$

$$Solución\Rightarrow(x\,,y\,,z)=\left(-2\,,\frac{2\cdot(a+2)\cdot(a-1)}{a^2\cdot(a-2)}\,,\frac{(a+2)}{a\cdot(a-2)}\right)$$

A.2.- Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos $P\equiv(0\,,1\,,1)$ y $Q\equiv(1\,,0\,,1)$es paralelo a la recta $r\equiv\frac{x+3}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{2}$ **(2 puntos)**

El vector director de la recta **r** unido a los vectores **PQ** y **PG** siendo G el punto genérico del plano π que se busca y que esta determinado por esos vectores.
Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(1\,,0\,,2)\\ \overrightarrow{PQ}=(1\,,0\,,1)-(0\,,1\,,1)=(1\,,-1\,,0)\\ \overrightarrow{PG}=(x\,,y\,,z)-(0\,,1\,,1)=(x\,,y-1\,,z-1)\end{cases}\Rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix}x & y-1 & z-1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow-2x+z-1-2\,(y-1)=0\Rightarrow$$

$$\pi\equiv 2x+2y-z-1=0$$

Opción B

B.1- Halla el valor de a que hace que la matriz $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\1&0&-1&2\\0&1&1&2\\-1&2&-1&a\end{pmatrix}$ no sea regular

(2 puntos)

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\1&0&-1&2\\0&1&1&2\\-1&2&-1&a\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&1&-1&0\\0&1&1&2\\0&1&-1&a+2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&1&-1&0\\0&0&2&2\\0&0&0&a+2\end{pmatrix}\Rightarrow a+2=0\Rightarrow a=-2$$

$$Cuando\ a=-2\Rightarrow |A|=0\ (al\ tener\ una\ \ fila\ de\ ceros)\Rightarrow A\ no\ es\ regular$$

B.2.- Halla la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas

$r_1\equiv\begin{cases}x+z-1=0\\2x+y+z+1=0\end{cases}$ y $r_2\equiv\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ **(3 puntos)**

Sea **t** la recta que se busca, el vector formado por los puntos generales de las rectas es perpendicular a los vectores directores de estas y por ello los productos escalares son nulos.

$$\begin{cases}x=1-z\Rightarrow 2-2z+y+z+1=0\Rightarrow y=-3+z\Rightarrow r_1\equiv\begin{cases}x=1-\mu\\y=-3+\mu\\z=\mu\end{cases}\\ r_2\equiv\begin{cases}x=-\lambda\\y=\lambda\\z=-1+2\lambda\end{cases}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_t}=(1-\mu+\lambda\ ,-3+\mu-\lambda\ ,\mu+1-2\lambda)\\ \overrightarrow{v_{r_1}}=(-1\ ,1\ ,1)\\ \overrightarrow{v_{r_2}}=(-1\ ,1\ ,2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_t}\perp\overrightarrow{v_{r_1}}\Rightarrow\overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_{r_1}}=0\\ \overrightarrow{v_t}\perp\overrightarrow{v_{r_2}}\Rightarrow\overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_{r_2}}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(1-\mu+\lambda\ ,-3+\mu-\lambda\ ,\mu+1-2\lambda)\cdot(-1\ ,-1\ ,1)=0\Rightarrow -1+\mu-\lambda-3+\mu-\lambda+\mu+1-2\lambda=0\\(1-\mu+\lambda\ ,-3+\mu-\lambda\ ,\mu+1-2\lambda)\cdot(-1\ ,1\ ,2)=0\Rightarrow -1+\mu-\lambda-3+\mu-\lambda+2\mu+2-4\lambda=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}3\mu-4\lambda-3=0\\4\mu-6\lambda-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\mu-4\lambda-3=0\\2\mu-3\lambda-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6\mu-8\lambda-6=0\\-6\mu+9\lambda+3=0\end{cases}\Rightarrow\lambda-3=0\Rightarrow\lambda=3\Rightarrow$$

$$2\mu-3\cdot 3-1=0\Rightarrow 2\mu-10=0\Rightarrow 2\mu=10\Rightarrow\mu=5\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_t}=(1-5+3\ ,-3+5-3\ ,5+1-2\cdot 3)=(-1\ ,-1\ ,0)\\ R_1\begin{cases}x=1-5=-4\\y=-3+5=2\\z=5\end{cases}\end{cases}\Rightarrow t\equiv\frac{x+4}{-1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-5}{0}$$

Continuación del Problema B.2

$$\begin{cases} \dfrac{2+\mu}{-\mu-2\lambda-1} = \dfrac{-1}{-\lambda+3} \Rightarrow -2\lambda+6-\mu\lambda+3\mu = \mu+2\lambda+1 \Rightarrow -2\lambda+6-\mu\lambda+3\mu-\mu-2\lambda-1=0 \\ \dfrac{1-\mu}{\mu-\lambda-2} = \dfrac{-1}{-\lambda+3} \Rightarrow -\lambda+3+\lambda\mu-3\mu = -\mu+\lambda+2 \Rightarrow -\lambda+3+\lambda\mu-3\mu+\mu-\lambda-2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\mu\lambda+2\mu+5-4\lambda=0 \\ \lambda\mu-2\mu+1-2\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-\lambda)\,\mu = 4\lambda-5 \Rightarrow \mu = \dfrac{4\lambda-5}{2-\lambda} \\ (\lambda-2)\,\mu = 2\lambda-1 \Rightarrow \mu = \dfrac{2\lambda-1}{\lambda-2} \end{cases} \Rightarrow \frac{4\lambda-5}{2-\lambda} = \frac{2\lambda-1}{\lambda-2} \Rightarrow 5-4\lambda = 2\lambda-1$$

$$6-6\lambda=0 \Rightarrow 6\lambda=6 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \mu = \frac{4\cdot 1-5}{2-1} = -1 \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_t} = [-(-1)-2\cdot 1-1\,,-1-1-2\,,-1+3] = (-2\,,-4\,,2) \equiv (1\,,2\,,-1) \Rightarrow t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow$$

$$t \equiv x-1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

Opción C

C.1.- Halla la integral $\int e^x sen\ x\ dx$ **(2 puntos)**

$$I = \int e^x sen\ x\ dx = -e^x \cos\ x - \left[\int -\cos\ x\ e^x dx\right] = -e^x \cos\ x + \int e^x \cos\ x\ dx =$$

$$\begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ sen\ x\ dx = dv \Rightarrow v = \int sen\ x\ dx = -\cos\ x \end{cases} \qquad \begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ \cos\ x\ dx = dv \Rightarrow v = \int sen\ x\ dx = sen\ x \end{cases}$$

$$I = \int e^x sen\ x\ dx = -e^x sen\ x \cos\ x + e^x sen\ x - \int e^x sen\ x\ dx \Rightarrow I = e^x(-\cos\ x + sen\ x) - I \Rightarrow$$

$$2I = e^x(sen\ x - \cos\ x) \Rightarrow I = \int e^x sen\ x\ dx = \frac{e^x}{2}(sen\ x - \cos\ x) + K$$

C.2.- Dada la función $f(x) = x^x - 2^x + x - 1$ demuestra que existen $\alpha, \beta \in (1, 2)$ tales que $f(\alpha) = 0 \ y \ f'(\beta) = 3$. Di que teoremas utilizas **(3 puntos)**

Teorema de Bolzano

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a)** $\neq$ **sign f(b)],** entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que
f(c) = 0

La función es **continua y derivable** en el intervalo **[1 , 2]**

$$\begin{cases} f(1) = 1^1 - 2^1 + 1 - 1 = -1 < 0 \\ f(2) = 2^2 - 2^2 + 2 - 1 = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow Como\ sign\ f(1) \neq sign\ f(1) \Rightarrow \exists \alpha \in (1, 2) \Rightarrow f(\alpha) = 0$$

Teorema del valor medio o de Lagrange

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Geometricamente, como **f'(c)** la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(2) - f(1) = f'(\beta)(2 - 1) \Rightarrow f'(\beta) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1 - (-1)}{1} = 2$$

Creo que el problema tiene errores en el enunciado, debe de ser f'(β) = 2

Opción D

D.1.- Representa gráficamente la función $f(x) = x^3 - 3x$ **(3 puntos)**

$$Dom\ (f) = \forall x \in \Re \Rightarrow Im(f) = \forall y \in \Re$$

$$Puntos\ de\ corte\ con \Rightarrow \begin{cases} OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0 \\ OX \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 0 = x^3 - 3x = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 3(x^2 - 1) > 0 \Rightarrow 3(x - 1)(x + 1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases}$$

	$-\infty$ **-1**	**-1** **1**	**1** ∞
3 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 2	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Continuación del Problema D.1

Crecimiento $\forall x \in \Re / (x < -1) \cup (x > 1)$ **Decrecimiento** $\forall x \in \Re / -1 < x < 1$

$$\text{Máximo relativo en } x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \text{De crecimiento pasa a decrecimiento}$$

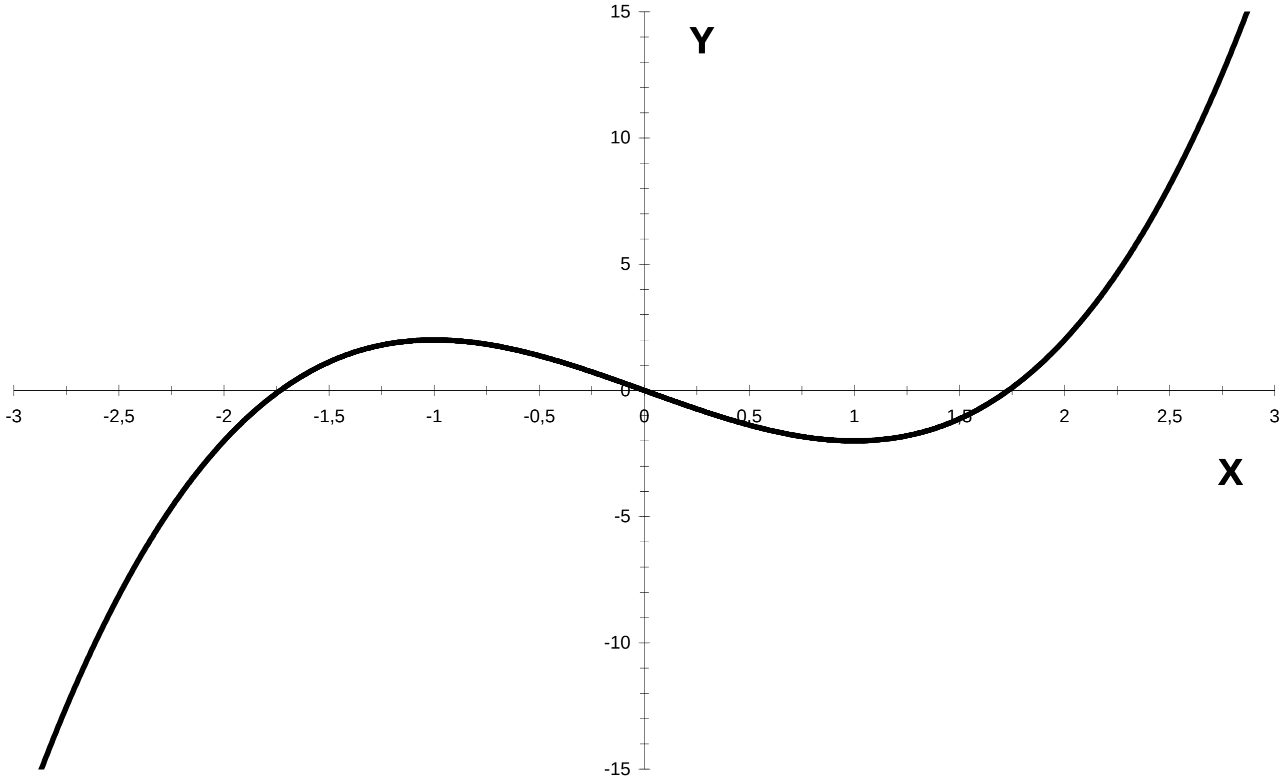
$$\text{Mínimo relativo en } x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2 \Rightarrow \text{De crecimiento pasa a decrecimiento}$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow \text{Concavidad} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow 6x > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Cóncava} \Rightarrow \forall x \in \Re / x > 0 \\ \text{Cónvexa} \Rightarrow \forall x \in \Re / x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Punto de inf lexión} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Simetrías

$$f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x) \Rightarrow \text{Simétrica respecto a OY}$$



D.2.- Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = x$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = x^3 - 3x = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow x^3 - 3x = x \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$Simetrías \Rightarrow \begin{cases} f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x) \\ g(-x) = (-x) = -x = -(x) = -g(x) \end{cases} \Rightarrow Simétricas\ respecto\ a\ O$$

$$1 \in (0\,, 2) \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2 < 0 \\ g(1) = 1 > 0 \end{cases}$$

$$A = 2\int_0^2 x\,dx + 2\left|\int_0^2 (x^3 - 3x)\,dx\right| = 2\int_0^2 x\,dx - 2\int_0^2 (x^3 - 3x)\,dx = 2\int_0^2 (-x^3 + 4x)\,dx = -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^2 + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^2$$

$$A = -\frac{2}{3} \cdot (2^3 - 0^3)_0^2 + 4 \cdot (2^2 - 0^2) = -\frac{16}{3} + 16 = \frac{32}{3}\,u^2$$