Opción A

A.1- Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a y resuélvelo en los casos que es compatible $\begin{cases} x+(a-1)\,y=2 \\ -x+\left(a^2-a\right)y+2\,z=a-1 \\ ax+\left(a^2-a\right)y+\left(a^2+1\right)z=2a \end{cases}$ **(3 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 0 \\ -1 & a^2-a & 2 \\ a & a^2-a & a^2+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 0 \\ 0 & a^2-1 & 2 \\ 0 & a^2-a-a^2+a & a^2+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 0 \\ 0 & a^2-1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2+1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} a^2-1 & 2 \\ 0 & a^2+1 \end{vmatrix}$$

$$|A|=\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)=0\Rightarrow(a-1)(a+1)\left(a^2+1\right)=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-1=0\Rightarrow a=1 \\ a+1=0\Rightarrow a=-1 \\ a^2+1=0\Rightarrow a^2=-1\Rightarrow a=\pm\sqrt{-1}\Rightarrow Sin\ solución \end{cases}\Rightarrow$$

$$\forall a\in\Re-\{-1\,,1\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ ingcógnitas\Rightarrow Sist.\ CompatibleDeterminado$$

$Si\ a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado\Rightarrow$$

$$2z=0\Rightarrow z=0\Rightarrow x-2y=2\Rightarrow x=2+2y\Rightarrow Solución\Rightarrow(x\,,y\,,z)=(2+2\lambda\,,\lambda\,,0)$$

$Si\ a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases} 2z=2\Rightarrow z=1 \\ 0z=-2\Rightarrow z=-\dfrac{2}{0}\Rightarrow Sin\ solución \end{cases}\Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$Cuando\ el\ sistema\ es\ Compatible\ Determinado$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & a-1 & 0 \\ a-1 & a^2-a & 2 \\ 2a & a^2-a & a^2+1 \end{vmatrix}}{(a-1)(a+1)\left(a^2+1\right)}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & a-1 & 0 \\ -a-1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a^2+1 \end{vmatrix}}{(a-1)(a+1)\left(a^2+1\right)}=\frac{-(a-1)\cdot\begin{vmatrix} -(a+1) & 2 \\ 0 & a^2+1 \end{vmatrix}}{(a-1)(a+1)\left(a^2+1\right)}=-\frac{(a+1)\left(a^2+1\right)}{(a+1)\left(a^2+1\right)}$$

$x=-1$

Continuación del Problema A.1

Continuación Soluciones cuando es Compatible Determinado

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & a-1 & 2\\ a & 2a & a^2+1\end{vmatrix}}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & a+1 & 2\\ 0 & 0 & a^2+1\end{vmatrix}}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}=\frac{(a+1)^2}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}=\frac{1}{(a-1)(a^2+1)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & a-1 & 2\\ -1 & a^2-a & a-1\\ a & a^2-a & 2a\end{vmatrix}}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & a-1 & 2\\ 0 & a^2-1 & a+1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}=\frac{0^2}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}=0$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(-1\ ,\ \frac{1}{(a-1)(a^2+1)}\ ,0\right)$$

A.2.- Halla la ecuación general del plano que equidista a los puntos $P\equiv(2\ ,1\ ,3)$ y $Q\equiv(0\ ,3\ ,-1)$es paralelo al plano $\pi\equiv 3x-y+z+1=0$ **(2 puntos)**

El plano α que se busca es de la forma $3x-y+z+D=0$ y que contiene el punto, **R**, medio de los puntos **P** y **Q**

$$R\begin{cases} x=\dfrac{2+0}{2}=1\\ y=\dfrac{1+3}{2}=2\\ z=\dfrac{3+(-1)}{2}=1\end{cases} \Rightarrow 3\cdot 1-2+1+D=0\Rightarrow 2+D=0\Rightarrow D=-2\Rightarrow \alpha\equiv 3x-y+z-2=0$$

Opción B

B.1- Calcula el valor del determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **(2 puntos)**

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A|=(-1)\cdot(-5-8)=13$$

B.2.- Halla la ecuación continua de la recta que corta que pasa por el punto $P\equiv(1\ ,0\ ,0)$ y corta a las rectas $r_1\equiv\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ y $r_2\equiv\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$ **(3 puntos)**

Sea **t** la recta que se busca.

$$\begin{cases} r_1\equiv\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} \\ 3x+y-4=0 \Rightarrow y=4-3x \Rightarrow x+8-6x+z-1=0 \Rightarrow z=-7+5x \Rightarrow r_2\equiv\begin{cases} x=\mu \\ y=4-3\mu \\ z=-7+5\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_t}=(2+\lambda-\mu\ ,1-\lambda-4+3\mu\ ,2\lambda+7-5\mu)=(2+\lambda-\mu\ ,-3-\lambda+3\mu\ ,7+2\lambda-5\mu)$$

$$t\equiv\frac{1-(2+\lambda)}{2+\lambda-\mu}=\frac{0-(1-\lambda)}{-3-\lambda+3\mu}=\frac{0-2\lambda}{7+2\lambda-5\mu}\Rightarrow t\equiv\frac{-1-\lambda}{2+\lambda-\mu}=\frac{-1+\lambda}{-3-\lambda+3\mu}=\frac{-2\lambda}{7+2\lambda-5\mu}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-1-\lambda}{2+\lambda-\mu}=\dfrac{-2\lambda}{7+2\lambda-5\mu}\Rightarrow -7-2\lambda+5\mu-7\lambda-2\lambda^2+5\lambda\mu=-4\lambda-2\lambda^2+2\lambda\mu \\ \dfrac{-1+\lambda}{-3-\lambda+3\mu}=\dfrac{-2\lambda}{7+2\lambda-5\mu}\Rightarrow -7-2\lambda+5\mu+7\lambda+2\lambda^2-5\lambda\mu=6\lambda+2\lambda^2-6\lambda\mu \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -7-2\lambda+5\mu-7\lambda-2\lambda^2+5\lambda\mu+4\lambda+2\lambda^2-2\lambda\mu=0\Rightarrow -7-5\lambda+5\mu+3\lambda\mu=0\Rightarrow \mu(5+3\lambda)=7+5\lambda \\ -7-2\lambda+5\mu+7\lambda+2\lambda^2-5\lambda\mu-6\lambda-2\lambda^2+6\lambda\mu=0\Rightarrow -7-\lambda+5\mu+\lambda\mu=0\Rightarrow \mu(5+\lambda)=7+\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

Continuación del Problema B.2

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{7+5\lambda}{5+3\lambda} \\ \mu = \dfrac{7+\lambda}{5+\lambda} \end{cases} \Rightarrow \frac{7+5\lambda}{5+3\lambda} = \frac{7+\lambda}{5+\lambda} \Rightarrow 35+7\lambda+25\lambda+5\lambda^2 = 35+21\lambda+5\lambda+3\lambda^2 \Rightarrow$$

$$32\lambda+5\lambda^2 = 26\lambda+3\lambda^2 \Rightarrow 2\lambda^2+6\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda(\lambda+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow \mu = \dfrac{7}{5} \\ \lambda+3 = 0 \Rightarrow \lambda = -3 \Rightarrow \mu = \dfrac{7-3}{5-3} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Con \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = \dfrac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow \vec{v_t} = \left(2+0-\dfrac{7}{5}, -3-0+3\cdot\dfrac{7}{5}, 7+2\cdot 0-5\cdot\dfrac{7}{5}\right) = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{6}{5}, 0\right) \equiv (1, 2, 0) \\ Con \begin{cases} \lambda = -3 \\ \mu = 2 \end{cases} \Rightarrow \vec{v_t} = [2+(-3)-2, -3-(-3)+3\cdot 2, 7+2\cdot(-3)-5\cdot 2] = (-3, 6, -9) \equiv (1, -2, 3) \end{cases}$$

$$Dos\ soluciones \Rightarrow \begin{cases} t \equiv x-1 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{0} \\ t \equiv x-1 = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{3} \end{cases}$$

Opción C

C.1.- Halla los límites siguientes:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+2}{2-2\,sen\,x}\right)^{\frac{2}{x}}$$ **(1 punto)**

$$b)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2+x-5}-2}{1-\sqrt{2x-1}}$$ **(1 punto)**

$a)$

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+2}{2-2\,sen\,x}\right)^{\frac{2}{x}} = \left(\frac{0^2+2}{2-2\,sen\,0}\right)^{\frac{2}{0}} = \left(\frac{2}{2-0}\right)^{\frac{2}{0}} = 1^{\infty} \Rightarrow$$

$$ln\ L = ln\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+2}{2-2\,sen\,x}\right)^{\frac{2}{x}}\right] = \lim_{x\to 0} ln\left(\frac{x^2+2}{2-2\,sen\,x}\right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{x} ln\left(\frac{x^2+2}{2-2\,sen\,x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\,ln\left(\dfrac{x^2+2}{2-2\,sen\,x}\right)}{x} =$$

$$= \frac{2\,ln\left(\dfrac{0^2+2}{2-2\,sen\,0}\right)}{0} = \frac{2\,ln\,1}{0} = \frac{2\cdot 0}{0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} =$$

Continuación Problema C.1

a)Continuación

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot \dfrac{\frac{1}{x^2+2}}{2-2\,sen\,x}\cdot \dfrac{2x\,(2-2\,sen\,x)-(-2)\cos x\,(x^2+2)}{(2-2\,sen\,x)^2}}{1} = \lim_{x\to 0} 2\cdot \frac{2x(1-sen\,x)+2(x^2+2)\cos x}{2\,(1-sen\,x)(x^2+2)} =$$

$$\lim_{x\to 0} 2\frac{x(1-sen\,x)+(x^2+2)\cos x}{(1-sen\,x)(x^2+2)} = 2\frac{2\cdot 0\cdot(1-sen\,0)+(0^2+2)\cos 0}{(1-sen\,0)(0^2+2)} = 2\frac{0+2\cdot 1}{(1-0)(0^2+2)} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow$$

$$\ln L = 2 \Rightarrow L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+2}{2-2\,sen\,x}\right)^{\frac{2}{x}} = e^2$$

b)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2+x+5}-2}{1-\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt[3]{2\cdot 1^2+1+5}-2}{1-\sqrt{2\cdot 1-1}} = \frac{\sqrt[3]{8}-2}{1-\sqrt{1}} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{4x+1}{3\sqrt[3]{(2x^2+x+5)^2}}}{\dfrac{2}{-2\sqrt{2x-1}}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} -\frac{(4x+1)\sqrt{2x-1}}{3\sqrt[3]{(2x^2+x+5)^2}} = -\frac{(4\cdot 1+1)\sqrt{2\cdot 1-1}}{3\sqrt[3]{(2\cdot 1^2+1+5)^2}} = -\frac{5\sqrt{1}}{3\sqrt[3]{8^2}} = -\frac{5}{3\sqrt[3]{2^6}} = -\frac{5}{3\cdot 4} = -\frac{5}{12}$$

C.2.- Demuestra que la función $y = x^3 - x - sen\,\pi x$ tiene un máximo relativo en **(-1 , 0)** y un mínimo relativo en el intervalo **(0 , 1)**. Menciona los resultados teóricos que utilices **(3 puntos)**

Teorema de Rolle

Sea **f(x)** una función continua en **[a , b]**, derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ ,b)$ tal que **f'(c) = 0**

La función es continua y derivable en toda la recta real, por lo tanto en los intervalos que se citan

En $(-1\ ,0)$

$$\begin{cases} f(-1) = (-1)^3 - (-1) - sen\,[\pi\cdot(-1)] = -1+1+sen\,(-\pi) = 0 \\ f(0) = 0^3 - 0 - sen\,(\pi\cdot 0) = 0+0+sen\,0 = 0 \end{cases} \Rightarrow Como\ \ f(-1) = f(0) \Rightarrow \exists f'(c) = 0$$

$$Como\ -\frac{1}{2}\in(-1\ ,0) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right) - sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-(-1) = \frac{3}{8}+1 = \frac{11}{8} > 0 \Rightarrow$$

Es un máximo relativo

Continuación del problema C.2.-

$En\ (0\ ,1)$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 1 - sen\,(\pi \cdot 1) = 1 - 1 + sen\,(-\pi) = 0 \\ f(0) = 0^3 - 0 - sen\,(\pi \cdot 0) = 0 + 0 + sen\ 0 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow Como\ \ f(1) = f(0) \Rightarrow \exists f'(c) = 0$$

$$Como\ \frac{1}{2} \in (-1\ ,0) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{8} - 1 = -\frac{11}{8} < 0 \Rightarrow$$

Es un mínimo relativo

Opción D

D.1.- Demuestra que la función $f(x) = x^x$ tiene un mínimo relativo en **x =** $\frac{1}{e}$ **(2 puntos)**

$$ln\ f(x) = ln\,x^x \Rightarrow ln\ f(x) = x\ ln\,x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = ln\,x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = f(x)(ln\,x + 1) \Rightarrow f'(x) = x^x\ (ln\,x + 1)$$

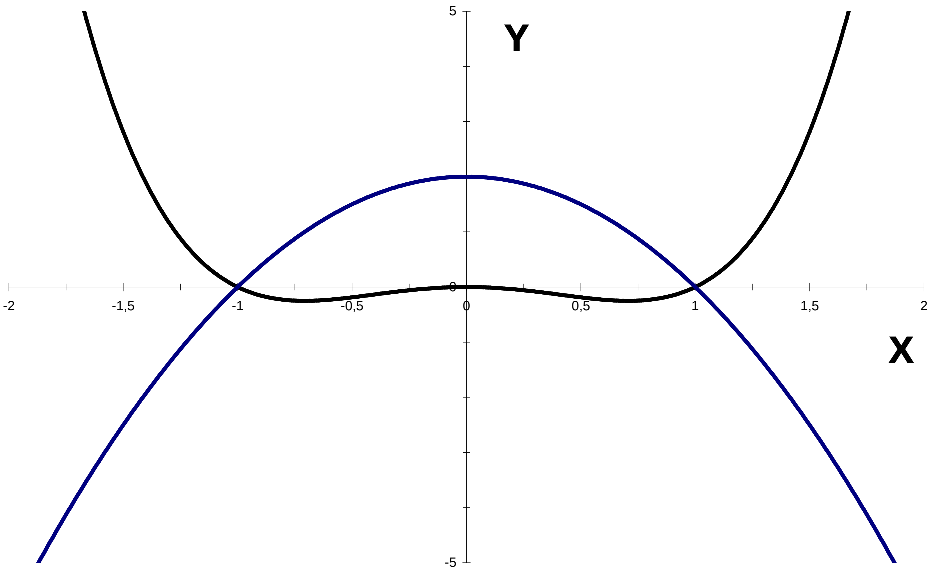
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^x\ (ln\,x + 1) = 0 \Rightarrow ln\,x + 1 = 0 \Rightarrow ln\,x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$f''(x) = x^x\ (ln\,x + 1)(ln\,x + 1) + x^x \cdot \frac{1}{x} = x^x\ (ln\,x + 1)^2 + x^{x-1} = x^{x-1}\left[(ln\,x + 1)^2 + x\right]$$

$$f''\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}-1}\left[(ln\,e^{-1} + 1)^2 + \frac{1}{e}\right] = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1-e}{e}}\left[(-1+1)^2 + \frac{1}{e}\right] = e^{\frac{e-1}{e}} \cdot e^{-1} = e^{\frac{e-1}{e}-1} = e^{\frac{e-1-e}{e}} = e^{\frac{-1}{e}} = \sqrt[e]{\frac{1}{e}} > 0$$

$$Minimo\ relativo\ en\ \ x = e^{-1} \Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = \sqrt[e]{\frac{1}{e}}$$

D.2.- Se consideran las funciones $f(x) = x^4 - x^2$ y $g(x) = 2 - 2x^2$. Dibuja sus gráficas y calcula el área de la región encerrada por ellas



Continuación Problema D.2

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^4-x^2=0 \Rightarrow \left(x^2-1\right)x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases} \\ 2-2x^2=0 \Rightarrow 2\left(x^2-1\right)=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^4-x^2=2-2x^2 \Rightarrow x^4+x^2-2=0 \Rightarrow x^2=t \Rightarrow t^2+t-2=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9\geq 0 \Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{-1+3}{2}=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ t=\frac{-1-3}{2}=-2 \Rightarrow x^2=-2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-2} \Rightarrow \text{Sin sol.} \end{cases}$$

$$\text{Simetrías} \Rightarrow \begin{cases} f(-x)=(-x)^4-(-x)^2=x^4-x^2=f(x) \\ g(-x)=2-(-x)^2=2-x^2=g(x) \end{cases} \Rightarrow \text{Simétricas respecto a } OY$$

$$\frac{1}{2}\in(0\,,2) \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{16}<0 \\ g\left(\frac{1}{2}\right)=2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=2-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}{}^{2}<0 \end{cases}$$

$$A=2\int_0^1\left(2-2x^2\right)dx+2\left|\int_0^1\left(x^4-x^2\right)dx\right|=2\int_0^1\left(2-2x^2\right)dx-2\int_0^1\left(x^4-x^2\right)dx=2\int_0^1\left(2-2x^2-x^4+x^2\right)dx\;{}_{0}^{2}$$

$$A=2\int_0^1\left(2-x^2-x^4\right)dx\;{}^{2}=4\cdot[x]_0^1-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^1-2\cdot\frac{1}{5}\cdot\left[x^5\right]_0^1=4\cdot(1-0)-\left(1^2-0^2\right)-\frac{2}{5}\cdot\left(1^5-0^5\right)$$

$$A=4-1-\frac{2}{5}=3-\frac{2}{5}=\frac{13}{5}u^2$$