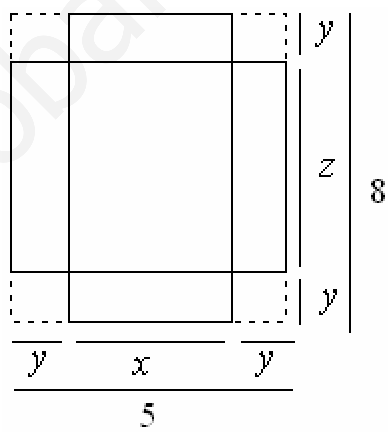
Ejercicios de optimización

Estrategias para resolver problemas de optimización:

- Asignar símbolos a todas las magnitudes a determinar.
- Escribir una ecuación primaria para la magnitud que debe ser optimizada.
- Reducir la ecuación primaria a una ecuación con solo una variable independiente. Eso puede exigir el uso de las ecuaciones secundarias (ligaduras) que relacionen las variables independientes de la ecuación primaria.
- Determinar el dominio de la ecuación primaria. Esto es, hallar los valores para los que el problema planteado tiene sentido.
- Determinar el valor máximo o mínimo mediante las técnicas dadas (Derivadas).

Problemas resueltos de optimización:

E1 Con una cartulina de 8X5 metros se desea construir una caja sin tapa, de volumen máximo. Hallar las dimensiones de dicha caja.



Solución: Como hay que optimizar el volumen de una caja abierta, la ecuación a optimizar es:

$$\mathrm{V}(x, y, z) = xyz$$

Donde *x* define el ancho de la caja, *z* lo largo e *y* lo alto. Dichas variables como definen dimensiones, no pueden ser negativas. Tampoco pueden ser nulas porque no habría caja, por tanto:

$$x > 0 \qquad y > 0 \qquad z > 0$$

Fijándonos en el dibujo adjunto de la cartulina, es posible deducir dos ecuaciones de ligadura:

$$2y + x = 5 \qquad 2y + z = 8$$

Despejando en ellas *x* y *z*:

$$x = 5 - 2y \qquad z = 8 - 2y$$

Dos variables han quedado ligadas a una sola, ahora utilizaremos las ecuaciones de ligadura para que la ecuación del volumen de tres variables pase a ser de una variable:

$$\mathrm{V}(y) = (5 - 2y)y(8 - 2y) = 40y - 26y^2 + 4y^3$$

Ahora procedemos a calcular sus máximos y mínimos con derivadas:

$$\mathrm{V}'(y) = 40 - 52y + 12y^2 \rightarrow \mathrm{V}'(y) = 0 \rightarrow 40 - 52y + 12y^2 = 0$$

$$y = \frac{52 \pm \sqrt{52^2 - 4\cdot 40\cdot 12}}{24} = \frac{52 \pm 28}{24} = \begin{cases} y = 10/3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Dos valores candidatos a máximos, mínimos o puntos de inflexión. Utilizando la derivada segunda:

$$\mathrm{V}''(y) = -52 + 24y \begin{cases} \mathrm{V}''(10/3) = 28 & \text{mínimo} \\ \mathrm{V}''(1) = -28 & \text{máximo} \end{cases}$$

Una vez determinado el máximo, el resto de dimensiones se halla con las ecuaciones de ligadura:

$$x = 5 - 2 = 3 \qquad z = 8 - 2 = 6$$

Luego la caja de volumen máximo tiene por dimensiones $3 \times 1 \times 6$.

E2 Un rectángulo esta acotado por los ejes y por la gráfica de $y = (6 - x)/2$ ¿Qué longitud debe tener el rectángulo para que su área sea máxima?

Solución: Como tenemos que optimizar una función de área de un rectángulo, por tanto:

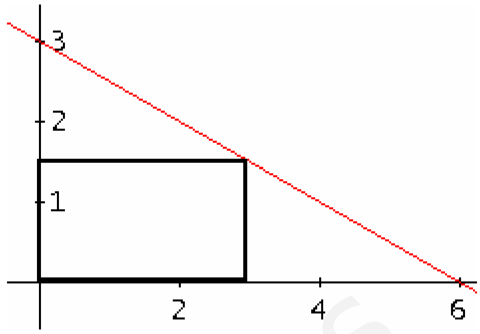
$$A(x, y) = xy$$

Estas dos variables definen sus dimensiones y deben cumplir (viendo el dibujo) que:

$$0 < x < 6 \qquad y < 0 < 3$$

La ecuación de ligadura es la que define la recta:

$$y = (6 - x)/2$$



Y con esto, y sustituyendo en la ecuación de área:

$$A(x) = x(6 - x)/2 = (6x - x^2)/2$$

Y ahora derivando calculamos sus máximos y mínimos.

$$A'(x) = 3 - x \to A'(x) = 0 \to 3 - x = 0 \to x = 3$$

Realizando la derivada segunda:

$$A''(x) = -1 \to A''(3) = -1 \quad \text{máximo}$$

Se trata de un máximo, una vez hallada la longitud de su base hallo la de su altura mediante la ecuación de ligadura:

$$y = (6 - 3)/2 = 3/2$$

E3 ¿Qué puntos de la gráfica de $y = 4 - x^2$ están mas cerca del punto (0, 2)?

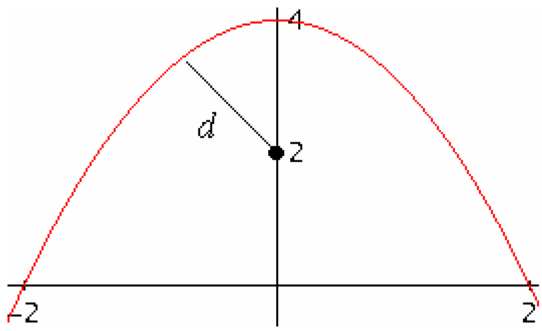
Dato: distancia entre dos puntos $(x, y), (x_0, y_0)$: $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Solución: La ecuación que tenemos que optimizar es la de la distancia entre el punto (0, 2) y otro punto que pertenecerá a una curva:

$$d(x, y) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2}$$

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$$

Donde x e y pueden tomar cualquier valor real. El problema nos da la ligadura (con la curva):



$$y = 4 - x^2$$

Esta curva liga las dos variables x e y, sustituyendo en la ecuación de la distancia:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

Derivando ahora esta función buscamos los posibles máximos y mínimos:

$$d'(x) = \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} \to d'(x) = 0 \to \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = 0 \to 2x^3 - 3x = 0$$

$$2x^3 - 3x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases}$$

Recurrir ahora a la derivada segunda puede resultar pesado en cuanto a cálculos, en su lugar utilizaremos crecimiento y decrecimiento para distinguir cuales son los máximos de los mínimos o de los puntos de inflexión.

	$-\sqrt{3/2}$		0		$\sqrt{3/2}$	
$2x^3-3x$	$-$		$+$	$-$		$+$
$\sqrt{x^4-3x^2+4}$	$+$		$+$	$+$		$+$
$d'(x)$	$-$		$+$	$-$		$+$

A partir de aquí es fácil ver que $x=\pm\sqrt{3/2}$ son mínimos, y que $x=0$ es un máximo. Mediante la ecuación de la curva calculo la coordenada y de cada punto mínimo:

$$y\left(\pm\sqrt{3/2}\right)=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

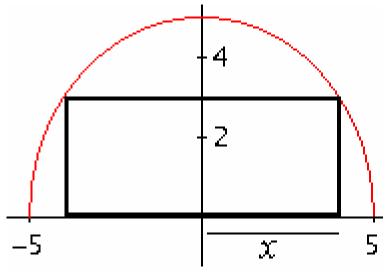
Por tanto las coordenadas de los puntos mínimos son:

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right) \qquad \left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)$$

E4 Un rectángulo esta limitado por el eje x y por el semicírculo:

$$y=\sqrt{25-x^2}$$

¿Para qué longitud y anchura del rectángulo se hace mínima su área?



Solución: Como tenemos que optimizar una función de área de un rectángulo, su expresión es:

$$\mathrm{A}(x,y)=(2x)y$$

Las dos variables por definir dimensiones deben ser mayores que cero y menores que los valores lógicos que vemos en la gráfica:

$$0<x<5 \qquad y<0<5$$

La ecuación de ligadura es la que define la semicircunferencia:

$$y=\sqrt{25-x^2}$$

Y con esto, y sustituyendo en la ecuación de área:

$$\mathrm{A}(x,y)=2x\sqrt{25-x^2}$$

Procedemos ahora a calcular sus máximos y mínimos:

$$\mathrm{A}'(x)=\sqrt{25-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{25-x^2}}=\frac{50-2x^2-2x^2}{\sqrt{25-x^2}}=\frac{50-4x^2}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$\mathrm{A}'(x)=0\rightarrow\frac{50-4x^2}{\sqrt{25-x^2}}=0\rightarrow x=\frac{\pm5}{\sqrt{2}}$$

Solo vale la solución positiva. Recurrir a la derivada segunda es más difícil, así que recurriremos a crecimiento y decrecimiento:

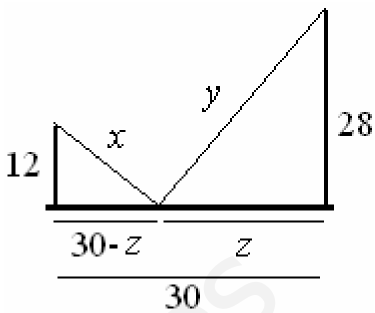
	0		$5/\sqrt{2}$		5
$\mathrm{A}'(x)$		$+$		$-$	

Se trata de un máximo. Ya hemos hallada para que valor de la dimensión de la base se maximiza el área, ahora mediante la ecuación de ligadura calculamos la anchura:

$$y=\sqrt{25-(5/\sqrt{2})^2}=5/\sqrt{2}$$

E5 Dos postes de 12 y 28 m de altura, distan 30 m entre si. Hay que conectarlos mediante un cable que este atado en algún punto del suelo entre los postes. ¿En que punto ha de amarrarse al suelo con el fin de utilizar la menor longitud de cable posible?

Solución: Haciendo primero un dibujo del problema, como el realizado a la derecha, nos indica un poco como analizar el problema. Primeramente tenemos una función de longitud que optimizar:



$$\mathrm{L}(x, y) = x + y$$

Los valores lógicos que toma x e y en el problema son:

$$0 < x < \sqrt{12^2 + 30^2} \qquad 0 < y < \sqrt{28^2 + 30^2}$$

Fijándonos en el dibujo, es posible ligar estas dos variables a otra variable llamada z mediante dos ecuaciones de ligadura que aparecen de la aplicación del teorema de Pitágoras en los dos triángulos formados.

$$x = \sqrt{12^2 + (30 - z)^2} \qquad y = \sqrt{28^2 + z^2}$$

Fijémonos que z no tiene sentido si es mayor que 30 o menor que cero. Sustituyendo estas variables en la función de longitud:

$$\mathrm{L}(z) = \sqrt{12^2 + (30 - z)^2} + \sqrt{28^2 + z^2}$$

y derivando para buscar los máximos y los mínimos:

$$\mathrm{L}'(z) = \frac{-30 + z}{\sqrt{12^2 + (30 - z)^2}} + \frac{z}{\sqrt{28^2 + z^2}}$$

$$\mathrm{L}'(z) = 0 \rightarrow \frac{-30 + z}{\sqrt{12^2 + (30 - z)^2}} + \frac{z}{\sqrt{28^2 + z^2}} = 0$$

$$\frac{-30 + z}{\sqrt{12^2 + (30 - z)^2}} = \frac{-z}{\sqrt{28^2 + z^2}} \rightarrow \left(\frac{-30 + z}{\sqrt{12^2 + (30 - z)^2}}\right)^2 = \left(\frac{-z}{\sqrt{28^2 + z^2}}\right)^2$$

Haciendo unas operaciones llegaremos a:

$$640z^2 - 47040z + 705600 = 0 \rightarrow \begin{cases} z = 21 \text{ m} \\ z = 52.5 \text{ m} \end{cases}$$

De estas dos soluciones hay que descartar la de 52.5 m, pues el problema dice que debe atarse la cuerda entre los postes. Dada la dificultad que entraña realizar el método de la derivada segunda, utilizaremos crecimiento y decrecimiento:

	0		21		30
$\mathrm{L}'(x)$	|	$-$	|	$+$	|

Estamos ante un mínimo. Luego a la distancia que debe encontrarse el nudo de cada poste es a 21 m del poste más alto y a 9 m del poste más bajo.

E6 Se pide calcular el volumen máximo de un paquete rectangular enviado por correo, que posee una base cuadrada y cuya suma de anchura + altura + longitud sea 108.

Solución: Hay que optimizar una función de área de un paquete rectangular, de base cuadra:

$$\mathrm{A}(x, y) = x^2 y$$

Todas las variables deben ser positivas y menores que 108:

$$0 < x < 108 \qquad 0 < y < 108$$

Y sabemos que la suma de anchura + altura + longitud es 108, luego la ligadura es:

$$2x + y = 108 \rightarrow y = 108 - 2x$$

y sustituyendo en la función de área:

$$\mathrm{A}(x) = x^2(108 - 2x) = 108x^2 - 2x^3$$

Derivando y buscando máximos y mínimos:

$$\mathrm{A}'(x) = 216x - 6x^2 \rightarrow \mathrm{A}'(x) = 0 \rightarrow 216x - 6x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 36 \end{cases}$$

Descartamos la solución nula por no tener sentido, y ahora con la segunda derivada verificamos si es máximo o mínimo:

$$\mathrm{A}''(x) = 216 - 12x \rightarrow \mathrm{A}'(36) = -216 \quad \text{máximo}$$

Por tanto el máximo volumen de dicho paquete es:

$$\mathrm{A}(216) = 108(216)^2 - 2(216)^3 = 46656$$

E7 Un fabricante desea diseñar una caja abierta con base cuadrada y que tenga un área total de 108 metros cuadrados de superficie. ¿Qué dimensiones producen la caja de máximo volumen? Dato: La abertura de la caja es uno de los lados cuadrangulares.

Solución: Nuevamente optimizamos un volumen, esta vez de una caja de base cuadrada, por tanto la ecuación primaria es:

$$\mathrm{V}(x, y) = x^2 y$$

Como son dimensiones de una caja las dos variables, entonces:

$$x > 0 \qquad y > 0$$

Se trata de una caja abierta por una de sus caras cuadradas, por tanto el área viene dada por:

$$108 = x^2 + 4xy$$

Esta es una ecuación de ligadura. Si en ella despejamos y:

$$y = \frac{108 - x^2}{4x}$$

Utilizando las ecuaciones de ligadura sobre la ecuación de volumen la reducimos a una ecuación de una variable:

$$\mathrm{V}(x) = x^2 \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108x - x^3}{4}$$

Derivándola ahora para calcular sus máximos y mínimos:

$$\mathrm{V}'(x) = \frac{108 - 3x^2}{4} \rightarrow \mathrm{V}'(x) = 0 \rightarrow \frac{108 - 3x^2}{4} = 0 \rightarrow 108 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{108}{3}} = \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 \end{cases}$$

De estas dos posibles soluciones, no es valida $x = -6$ pues las dimensiones no pueden ser negativas. Con la otra solución recurrimos a la derivada segunda:

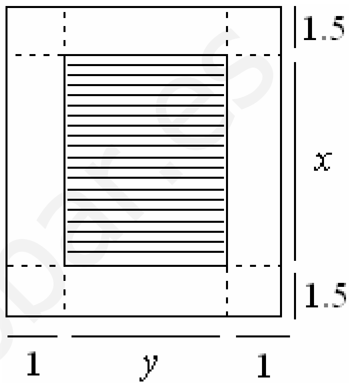
$$\mathrm{V}''(x) = \frac{-6x}{4} \rightarrow \mathrm{V}''(6) = -9 \quad \text{máximo}$$

Se trata de un máximo, ahora recurrimos a las ecuación de ligadura para calcular la dimensión que falta:

$$y = \frac{108 - 36}{24} = 3$$

Luego las dimensiones son 6x6x3.

E8 Una página rectangular debe contener 24 dm^2 de texto, con márgenes superior e inferior de 1.5 dm y laterales de 1dm pulgada, ¿Qué dimensiones de la página requieren la mínima cantidad de papel?



Solución: En este caso tenemos que optimizar una expresión de área, como es una página de las características del problema (ver dibujo), entonces la ecuación a optimizar es:

$$A(x, y) = 4\cdot(1.5\cdot1) + xy + 2(1\cdot x) + 2(1.5\cdot y) = 6 + xy + 2x + 3y$$

Evidentemente las variables por definir dimensiones no nulas, sus valores deben estar:

$$x > 0 \quad y > 0$$

Nos dice el problema que deben ser 24 dm^2 de texto, esto quiere decir, viendo el dibujo, que la ecuación de ligadura es:

$$xy = 24$$

Que es el área reservada al texto. Despejando de la ligadura:

$$y = \frac{24}{x}$$

Y sustituyendo en la ecuación primaria:

$$A(x) = 6 + 24 + 2x + 3\frac{24}{x} = 30 + 2x + \frac{72}{x}$$

Calculando ahora su derivada y buscando máximos y mínimos:

$$A'(x) = 2 - \frac{72}{x^2} = \frac{2x^2 - 72}{x^2} \rightarrow A'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x^2 - 72}{x^2} = 0$$

$$2x^2 - 72 = 0 \rightarrow x = \pm 6$$

La solución negativa no tiene sentido, por tanto no es válida. En cambio la positiva la analizamos con la derivada segunda:

$$A''(x) = \frac{144}{x^3} \rightarrow A''(6) = \frac{144}{216} \quad \text{mínimo}$$

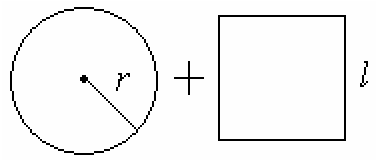
Se trata de un mínimo. Por la ligadura sabemos que:

$$y = \frac{24}{6} = 4$$

Por tanto las dimensiones de la página son: (1 + 1 + 4)x(1.5 + 1.5 + 6)$\rightarrow$6x9

E9 Con 4 metros de alambre se desean construir un círculo y un cuadrado. ¿Cuanto alambre hay que emplear en cada figura para lograr que entre ambas encierren el área mínima posible?

Solución: En este problema hay que optimizar una función de área. La ecuación de área viene regida por:



$$\mathrm{A}(l,r) = l^2 + \pi r^2$$

Que es tanto la suma del área del círculo como del cuadrado.

Estas dos variables por definir una dimensión de una figura y un radio, deben ser positivas y menores que 4 y $2/\pi$:

$$0 \le l \le 1 \qquad 0 \le r \le 2/\pi$$

Pues ninguna figura puede tener más alambre que la longitud de 4 m. Por otra parte, como solo pueden usarse 4 m de alambre, llegamos a la siguiente ecuación de ligadura que es la suma del alambre necesario para circulo y cuadrado.

$$4 = 4l + 2\pi r$$

Despejando l:

$$l = \frac{4-2\pi r}{4} = 1 - \frac{\pi r}{2}$$

y sustituyendo en la ecuación de área, queda reducida a una ecuación de una variable:

$$\mathrm{A}(r) = \left(1 - \frac{\pi r}{2}\right)^2 + \pi r^2 = 1 - \pi r + \frac{\pi^2 r^2}{4} + \pi r^2$$

Derivando ahora:

$$\mathrm{A}'(r) = -\pi + \frac{\pi^2 r}{2} + 2\pi r \to \mathrm{A}'(r) = 0 \to -\pi + \frac{\pi^2 r}{2} + 2\pi r = 0 \to r = \frac{1}{2+\pi/2} \approx 0.28$$

Al usar derivada segunda:

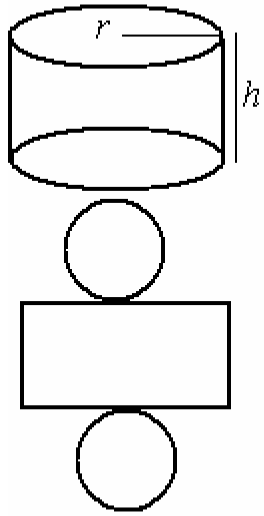
$$\mathrm{A}''(r) = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi \to \mathrm{A}''(0.28) = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi \quad \text{mínimo}$$

Para este valor de r hay área mínima, el lado del cuadrado valdrá:

$$l = 1 - \frac{\pi \cdot 0.28}{2} \approx 0.56 \quad \text{m}$$

E10 Dado un cilindro de volumen 4 m^3, determinar sus dimensiones para que su área total sea mínima.

Solución: Se trata de optimizar el área de un cilindro. La función de área de un cilindro es la suma de sus dos caras circulares más el área lateral rectangular, tal y como se ve en el dibujo de abajo:



$$\mathrm{A}(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Ambas variables deben ser mayores que cero por representar dimensiones:

$$0 < r \qquad h < 0$$

Como el cilindro debe tener 4 m^3 de capacidad, el volumen actúa aquí de ligadura de variables, así mediante la expresión del volumen de un cilindro ligo r con h:

$$4 = h\pi r^2 \to h = \frac{4}{\pi r^2}$$

Y sustituyendo en la función de área:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{4}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{8}{r}$$

Derivando y buscando máximos y mínimos:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{8}{r^2} \to A'(r) = 0 \to 4\pi r - \frac{8}{r^2} = 0 \to \frac{4\pi r^3 - 8}{r^2} = 0 \to r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \approx 0.86$$

Recurriendo ahora a la derivada segunda:

$$A''(r) = \frac{4\pi r^3 + 16}{r^3} \to A''(\sqrt[3]{2/\pi}) = 12\pi \quad \text{mínimo}$$

Mediante la ecuación de ligadura determino la altura, que vale $h = 1.72$. Por tanto para $h = 1.72$ m y $r = 0.86$ m el área del cilindro es mínima teniendo 4 m^3 de volumen.

11º Inscribir en una esfera de radio 1 m un cilindro circular que tenga

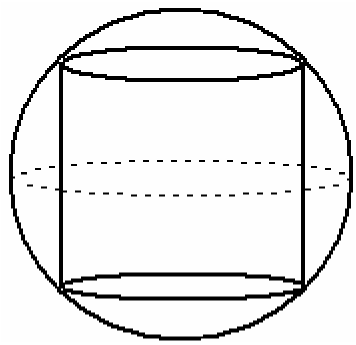
a) Volumen máximo

b) Área lateral máxima.

En ambos casos determinar sus dimensiones, radio de la base y altura.

Solución: a) Se nos pide optimizar el volumen de un cilindro:

$$V(r,h) = \pi r^2 h$$



Ambas variables, r y h, deben ser positivas:

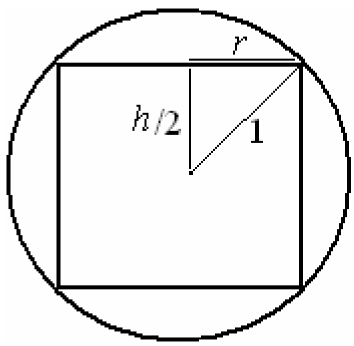
$$0 < r \qquad h < 0$$

Fijándonos en el dibujo inferior, que vendría a ser como un corte del dibujo superior por uno de sus meridianos, podemos reconocer a simple vista la ecuación de ligadura:

$$1^2 = r^2 + (h/2)^2 \to r = \sqrt{1 - h^2/4}$$

Sustituyendo ahora en las función de volumen:

$$V(h) = \frac{4\pi h - \pi h^3}{4}$$



Ahora derivamos cada expresión para buscar sus máximos y mínimos:

$$V'(h) = \frac{4\pi - 3\pi h^2}{4} \to V'(h) = 0 \to \frac{4\pi - 3\pi h^2}{4} = 0$$

$$h = \frac{\pm 2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1.15 \text{ m}$$

Se desecha la solución negativa por carecer de sentido, y mediante la derivada segunda:

$$V''(h) = \frac{-3\pi h}{2} \to V''(1.15) = -5.44 \quad \text{máximo}$$

Utilizando ahora la ligadura llego a la conclusión que $r \approx 0.817$ m

b) En este apartado se nos pide optimizar una función de área:

$$A(r,h) = 2\pi rh$$

Utilizando las mismas condiciones que en el apartado a) y la misma ligadura, la función a optimizar pasa a ser de una variable:

$$A(h) = \pi h\sqrt{4 - h^2}$$

Derivando y calculando sus máximos y mínimos:

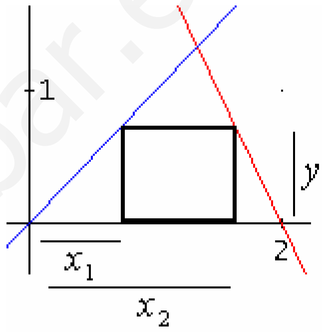
$$A'(h)=\frac{4\pi-2\pi h^2}{\sqrt{4-h^2}} \to A'(h)=0 \to \frac{4\pi-2\pi h^2}{\sqrt{4-h^2}}=0 \to 4-2h^2=0 \to h=\pm\sqrt{2}\approx\pm 1.41$$

Nos quedamos solo con la solución positiva. Ahora verificamos si es máximo o mínimo mediante crecimiento y decrecimiento:

	0		$\sqrt{2}$		
$A'(x)$	|	$+$	|	$-$	|

Se trata de un máximo. Utilizando ahora la ecuación de ligadura determino que $r \approx 0.707$ m

12º Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene un lado sobre el eje x y está inscrito en el triangulo determinado por las rectas $y=0, y=x, y=4-2x$.



Solución: Hay que optimizar un área rectangular:

$$A(x,y)=xy$$

Por tanto las dos dimensiones deben ser positivas.

$$0<x \qquad 0<y$$

Una vez construido el dibujo, vemos que la base x es la diferencia de las dos variables x_1 y x_2, y que estas variables se relacionan con y mediante las ecuaciones de las rectas:

$$y=x_1 \qquad y=4-2x_2$$

Que en este problema sirven como ligaduras. Despejando ambas variables, x_1 y x_2:

$$x_1=y \qquad x_2=\frac{4-y}{2}$$

y como:

$$x=x_2-x_1=\frac{4-y}{2}-y$$

sustituyendo en la función de área:

$$A(y)=\left(\frac{4-y}{2}-y\right)y=\frac{4y-3y^2}{2}$$

derivando y calculando máximos y mínimos:

$$A'(y)=\frac{4-6y}{2}=2-3y \to A'(y)=0 \to 2-3y=0 \to y=\frac{2}{3}$$

Haciendo la derivada segunda:

$$A''(y)=-3 \to A''(2/3)=-3 \quad \text{máximo}$$

Es un máximo, con la ecuación de ligadura:

$$x=\frac{4-2/3}{2}-2/3=1$$

Ósea, un rectángulo de dimensiones 1x(2/3)

13º El alcance R de un proyectil lanzado con velocidad inicial v_0 y con un ángulo θ respecto de la horizontal es:

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Calcular el ángulo θ que produce alcance máximo.

Solución: El rango de valores coherentes con el problema de θ es:

$$0 < \theta < \pi/2$$

Ahora, haciendo derivadas y buscando máximos y mínimos:

$$\mathrm{R}'(\theta) = \frac{2v_0^2 \cos(2\theta)}{g} \to \mathrm{R}'(\theta) = 0 \to \frac{2v_0^2 \cos(2\theta)}{g} = 0 \to \cos(2\theta) = 0$$

$$\theta = \frac{\arccos 0}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Donde $k \in \mathbf{Z}$. El único valor de θ coherente con el problema es $\pi/4$, con $k = 0$. Ahora investigándolo con la derivada segunda:

$$\mathrm{R}''(\theta) = \frac{-4v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \to \mathrm{R}''(\pi/4) = \frac{-4v_0^2 \sin(\pi/2)}{g} = \frac{-4v_0^2}{g}$$

Es pues un máximo.

14º Ecuación que describe la altura en función del tiempo:

$$h(t) = vt - \frac{g}{2}t^2$$

donde la gravedad g = 10 m/s^2. Si se lanza un cuerpo hacia arriba con velocidad inicial 40m/s, ¿Calcule cual es la máxima altura que alcanzará si la aceleración gravitacional es 10m/s?

Solución: El problema ya nos da la ecuación de altura que tenemos que optimizar:

$$\mathrm{h}(t) = vt - \frac{g}{2}t^2$$

Conociendo los valores de la velocidad y de la gravedad:

$$\mathrm{h}(t) = 40t - \frac{10}{2}t^2 = 40t - 5t^2$$

En física, los tiempos no puede ser negativos, por tanto $t \geq 0$. Derivando y buscando máximos y mínimos:

$$\mathrm{h}'(t) = 40 - 10t \to \mathrm{h}'(t) = 0 \to 40 - 10t = 0 \to t = 4 \ \text{ s}$$

Mediante la derivada segunda verificamos si es máximo o mínimo:

$$\mathrm{h}''(t) = -10 \to \mathrm{h}''(4) = -10 \quad \text{máximo}$$

Ahora sustituyendo en la función de altura, obtenemos la máxima altura alcanzada:

$$\mathrm{h}(t) = 40 \cdot 4 - 5(4)^2 = 80 \text{ m}$$

Problemas de optimización:

1º Queremos construir una caja abierta, de base cuadrada y volumen 256 l. Halla las dimensiones para que la superficie, y por tanto el coste, sea mínimo. **Sol:** $x = 8$, $y = 4$.

2º Entre todos los rectángulos de área 16 halla el de perímetro mínimo. **Sol:** $x = y = 4$.

3º De todos los cilindros inscritos en una esfera de radio 1 m, hallar el valor del volumen del que lo tenga máximo. **Sol:** $V = 4\sqrt{3}/9\,\pi$.

4º Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio $2\sqrt{2}$, ¿cuál es el de superficie máxima? **Sol:** Un cuadrado de lado 4.

5º La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es 40 cm. Halla sus dimensiones para que la superficie de ese rectángulo sea máxima. **Sol:** Dos catetos iguales de 20 cm.

6º Hallar las dimensiones de un rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio 2. **Sol:** $x = y = \sqrt{8}$.

7º De todos los triángulos isósceles de perímetro 9. Hallar las dimensiones del que tenga área máxima. **Sol:** $x = y = 3$.

8º Hallar dos números que sumen 18 y que su producto sea máximo**. Sol:** 9 y 9.

9º Hallar dos números que sumen 9 y que el producto del cuadrado de uno por el triple del otro sea máximo. **Sol:** $x = 6$, $y = 3$.

10º Se quiere vallar una parcela rectangular junto a una carretera. Si la valla junto a la carretera cuesta 1 euro/m y el resto 50 céntimos/m. ¿Cuáles serán las dimensiones de la parcela para que el área sea máxima si disponemos de 180 euros? **Sol:** 60×90 m.

11º Un ganadero quiere encerrar a sus ovejas en un redil rectangular de área máxima, para lo cual aprovecha la pared de la finca y con 100 metros de valla construye ese redil. Halla las dimensiones del rectángulo. **Sol:** 25×50.

12º La suma de las aristas de un prisma recto de base cuadrada es 36. Halla las dimensiones para que el volumen sea máximo. **Sol:** $x = y = 3$.

13º Un círculo de diámetro 8 cm se divide en dos trozos para formar los diámetros de otros dos círculos. Halla la medida de los trozos para que la diferencia entre el área del círculo grande y las de los dos pequeños sea máxima. **Sol:** $d = d' = 4$ cm.

14º Halla los puntos de la curva $y^2 = x$ cuya distancia al punto (3/2, 0) sea mínima. **Sol:** $(1, \pm 1)$.

15º Un folio debe tener 288 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del folio para que el gasto de papel sea mínimo? **Sol:** 28×14 cm.

16º La vidriera de una iglesia está formada por un rectángulo y sobre él media circunferencia, si se quiere que el perímetro sea mínimo y que el área sea $8+2\pi$ m^2. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la vidriera? **Sol:** $x = 4$, $y = 2$ m.

17º Entre los pares de números cuyo producto es 64 encuentra aquellos positivos cuya suma de cuadrados sea mínima. **Sol:** 8 y 8.

18º En un campo se quiere limitar una parcela de 24 m^2 por medio de una valla rectangular y además dividirla en dos partes iguales por medio de otra valla paralela a uno de los lados. ¿Qué dimensiones deben elegirse para que la cantidad de valla sea mínima?
Sol: 6 m de largo por 4 m de ancho.

19º Se quieren fabricar latas de refresco (cilíndricas) cuyo contenido sea de 1/3 de litro, de manera que el coste de la chapa sea mínimo; halla su altura y radio de la base. Mide las dimensiones de cualquier lata que tengas en casa y comprueba si se fabrican siguiendo ese criterio. **Sol:** $R = \sqrt[3]{6\pi}$, $h = \sqrt[3]{36/27\pi}$.

20º Queremos vallar una parcela rectangular de 200 m^2 de una finca aprovechando un muro ya existente, de modo que en ese lado no es necesaria una valla. ¿Cómo debe ser ese rectángulo para que el coste de la valla sea mínimo? **Sol:** 10×20 m.

21º Se desea abrir una ventana rectangular en una pared de una casa. Queremos que nos salga lo más económica posible sin perder luz, para ello pretendemos que el área sea de 16/15 m^2. Sabemos que el coste en vertical es de 50 euros/m y en horizontal 30 euros/m. ¿Cómo debe ser la ventana? **Sol:** 4/5 × 4/3.