

Derivación de polinomios y series de potencias

Reglas de derivación:

$$f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$$

$$f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = anx^{n-1}$$

$$f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u' + v'$$

Ejemplos:

$$f(x) = 4 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$$

$$f(x) = 3x^2 \rightarrow f'(x) = 6x$$

$$f(x) = x^4 + 4 \rightarrow f'(x) = 4x^3$$

$$f(x) = 3x^5 - x^3 \rightarrow f'(x) = 15x^4 - 3x^2$$

$$f(x) = \frac{x^9}{7} - \frac{x^7}{\sqrt{5}} \rightarrow f'(x) = \frac{9x^8}{7} - \frac{7x^6}{\sqrt{5}}$$

Ejercicios:

1° Derive las siguientes funciones polinómicas:

a) $f(x) = x^3 + 5x^{20} + 2x$

b) $f(x) = \frac{x}{5} + 7x^4$

c) $f(x) = \frac{x^4 - 3x}{4}$

d) $f(x) = x^2 + 4$

e) $f(x) = 6x^7 + 5x^2 + 5$

f) $f(x) = 4x^5 + x^3 + 4$

g) $f(x) = \frac{5x^6}{6} - 3x^5 - 2$

h) $f(x) = \frac{x^4}{4} + x^5 - 2x^2$

i) $f(x) = \pi x^2 + \sqrt{3}x^3$

j) $f(x) = x^{-2} + 4x^{-5}$

k) $f(x) = x^{-1} - x^{-2}$

l) $f(x) = x^{-4} + 2x^{-3}$

m) $f(x) = \frac{5}{x} + \frac{4}{5}$

n) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^2}$

ñ) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^{10}}$

Sol:

a) $f'(x) = 3x^2 + 100x^{19} + 2$

b) $f'(x) = \frac{1}{5} + 28x^3$

c) $f'(x) = x^3 - \frac{3}{4}$

d) $f'(x) = 2x$

e) $f'(x) = 42x^6 + 10x$

f) $f'(x) = 20x^4 + 3x^2$

g) $f'(x) = 5x^5 - 15x^4$

h) $f'(x) = x^3 + 5x^4 - 4x$

i) $f'(x) = 2\pi x + 3\sqrt{3}x^2$

j) $f'(x) = -2x^{-3} - 20x^{-6}$

k) $f'(x) = -x^{-2} + 2x^{-3}$

l) $f'(x) = -4x^{-5} - 6x^{-4}$

m) $f'(x) = -5x^{-2}$

n) $f'(x) = -3x^{-4} - 10x^{-3}$

ñ) $f'(x) = -2x^{-3} - 10x^{-11}$

2° Derive, con un poco de ingenio, las siguientes funciones:

a) $f(x) = 7x^{5/4} - 8x^{1/2}$

b) $f(x) = x^{2/3} + 4x^{5/4}$

c) $f(x) = 3x^{1/3} + 4x^{1/4}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt[5]{x}$

e) $f(x) = -2\sqrt[7]{x^2} + \sqrt[9]{x^2}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x}}}$

Sol:

a) $f'(x) = \frac{35}{4}x^{1/4} + 4x^{-1/2}$

b) $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} + 5x^{1/4}$

c) $f'(x) = -x^{-2/3} + x^{-3/4}$

d) $f'(x) = 1 + \frac{x^{-4/5}}{5}$

e) $f'(x) = -\frac{4x^{-5/7}}{7} + \frac{2x^{-7/9}}{9}$

f) $f'(x) = \frac{x^{-119/120}}{120}$

Derivación de potencias de funciones

Reglas de derivación.

$$f(x) = au^n \rightarrow f'(x) = anu' u^{n-1}$$

Ejemplos:

$$f(x) = (x^2 + x)^3 \rightarrow f'(x) = (6x + 3)(x^2 + x)^2$$

$$f(x) = (3x + x^2)^{100} \rightarrow f'(x) = 100(3 + 2x)(3x + x^2)^{99}$$

$$f(x) = (x^3 + x^2 + 1)^6 \rightarrow f'(x) = 6 \cdot (3x^2 + 2x) \cdot (x^3 + x^2 + 1)^5$$

$$f(x) = (4x^3 + 5x^2 + 7)^{15} \rightarrow f'(x) = 15 \cdot (12x^2 + 10x) \cdot (4x^3 + 5x^2 + 7)^{14}$$

$$f(x) = \frac{(x^5 + 4x^3 + 6)^{15}}{8} \rightarrow f'(x) = \frac{15 \cdot (5x^4 + 12x^2) \cdot (x^5 + 4x^3 + 6)^{14}}{8}$$

$$f(x) = \frac{(x^3 - 2x)^3}{4} + \frac{(2x^3 - 2)^6}{5} \rightarrow f'(x) = \frac{3 \cdot (3x^2 - 2) \cdot (x^3 - 2x)^2}{4} + \frac{6 \cdot (6x^2) \cdot (2x^3 - 2)^5}{5}$$

Ejercicios:

3º Derive las siguientes funciones con paréntesis:

a) $f(x) = (x+1)^7$

b) $f(x) = (x^2 + 3x + 5)^3$

c) $f(x) = \left(\frac{x^7}{7} + \sqrt{3}x^3\right)^4$

d) $f(x) = \frac{(x^4 - 3x^2)^2}{3}$

e) $f(x) = (4x^{7/2} + 3)^{\sqrt{5}}$

f) $f(x) = (x^2 - x^\pi)^e$

g) $f(x) = (2x^3 + 7x)^{-5}$

h) $f(x) = (2x^3 + 3x^{-4} + 2)^7$

i) $f(x) = (x^6 + 3x^4 - 5x)^8$

j) $f(x) = \frac{(x^3 + 7x^2 - 5)^6}{7}$

k) $f(x) = \frac{(5x^4 + 3x^{-2})^5}{12}$

l) $f(x) = \frac{3}{5} \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^3$

m) $f(x) = (5x^2 - 3x)^{5/2}$

n) $f(x) = (4x^6 - x)^{7/3}$

Sol:

a) $f'(x) = 7(x+1)^6$

b) $f'(x) = 3(2x+3)(x^2 + 3x + 5)^2$

c) $f'(x) = 4(x^6 + 3\sqrt{3}x^2) \left(\frac{x^7}{7} + \sqrt{3}x^3\right)^3$

d) $f'(x) = \frac{2}{3}(4x^3 - 6x)(x^4 - 3x^2)$

e) $f'(x) = \sqrt{5}(14x^{5/2})(4x^{7/2} + 3)^{\sqrt{5}-1}$

f) $f'(x) = e(2x - \pi x^{\pi-1})(x^2 - x^\pi)^{e-1}$

g) $f'(x) = -5(6x^2 + 7)(2x^3 + 7x)^{-6}$

h) $f'(x) = 7(6x^2 - 12x^{-5})(2x^3 + 3x^{-4} + 2)^6$

i) $f'(x) = 8(6x^5 + 12x^3 - 5)(x^6 + 3x^4 - 5x)^7$

j) $f'(x) = \frac{6(3x^2 + 14x)(x^3 + 7x^2 - 5)^5}{7}$

k) $f'(x) = \frac{5(20x^3 - 6x^{-3})(5x^4 + 3x^{-2})^4}{12}$

l) $f'(x) = \frac{9}{5} \left(\frac{1}{4} - x^{-2}\right) \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^2$

m) $f'(x) = \frac{5}{2}(10x - 3)(5x^2 - 3x)^{3/2}$

n) $f'(x) = \frac{7}{3}(24x^5 - 1)(4x^6 - x)^{4/3}$

Derivación de raíces cuadradas y raíces de orden superior

Reglas de derivación.

$$f(x) = \sqrt[n]{u} \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

Ejemplos:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} \rightarrow f'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 3x)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot (2x - 3) \cdot (x^2 - 3x)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 3x)^4}}$$

Ejercicios:

4° Derive las siguientes funciones con paréntesis:

a) $f(x) = \sqrt[3]{2x + 4}$

b) $f(x) = \sqrt[10]{x^3 + 10x}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

d) $f(x) = \sqrt{x + x^2 + x^3}$

e) $f(x) = \sqrt[4]{\sqrt{x} + \sqrt[3]{10x}}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} + 3x}$

g) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}$

h) $f(x) = \sqrt[6]{x^5 + \sqrt{x}}$

i) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x}}$

j) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

k) $f(x) = \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2 + 1} + 7}$

l) $f(x) = \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2 + 1} + 7}$

Sol:

a) $f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x + 4)^2}}$

b) $f'(x) = \frac{3x^2 + 10}{10 \cdot \sqrt[10]{(x^3 + 10x)^9}}$

c) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

d) $f'(x) = \frac{1 + 2x + 3x^2}{2\sqrt{x + x^2 + x^3}}$

e) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{10}{3 \cdot \sqrt[3]{(10x)^2}}}{4 \cdot \sqrt[4]{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{10x})^3}}$

f) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3}{3 \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{x} + 3x)^2}}$

g) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}} \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

h) $f'(x) = \frac{5x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{6 \cdot \sqrt[6]{(x^5 + \sqrt{x})^5}}$

i) $f'(x) = \frac{7}{8 \cdot \sqrt[8]{x}}$

j) $f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}}$

k) $f'(x) = \frac{\frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}}{5 \cdot \sqrt[5]{(\sqrt[3]{x^2 + 1} + 7)^4}}$

Derivación de producto de funciones

Reglas de derivación.

$$\boxed{f(x) = uv \rightarrow f'(x) = u'v + v'u} \quad \boxed{f(x) = u(v(x)) \rightarrow f'(x) = u'(v(x))v'(x)}$$

Ejemplos:

$$f(x) = (x^2 - 1)(x+1) \rightarrow f'(x) = 2x(x-1) + (x^2 - 1)$$

$$f(x) = (x + 4x^2)(x+1) \rightarrow f'(x) = (1 + 8x)(x+1) + (x + 4x^2)$$

$$f(x) = (x + x^7)^5 (x^2 - 1)^7 \rightarrow f'(x) = 5(1 + 7x^6)(x + x^7)^4 (x^2 - 1)^7 + 14x(x^2 - 1)^6 (x + x^7)^5$$

Ejercicios:

5° Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1)$

b) $f(x) = x^2(7x^7 + 8)$

c) $f(x) = (x^2)^3(x + 1)$

d) $f(x) = (x - 1)^{-1}(x + 1)$

e) $f(x) = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^4 \left(\frac{4x}{3}\right)^3$

f) $f(x) = (x^2 - 3)^{-5}(x - x^2)$

g) $f(x) = (x^{-1} - 2)^{-2}(1 + x^2)$

h) $f(x) = x(x - 1)^2(x - 2)^3$

i) $f(x) = (x^2 + x)(x + 2x^2)(x + 1)$

j) $f(x) = (x^3 + 7x)(x^7 + 5x^2)$

k) $f(x) = \sqrt{x+1} \sqrt[3]{x-1}$

l) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x+1)^4}$

Sol:

a) $f'(x) = 2x(x - 1) + (x^2 - 1)$

b) $f'(x) = 2x(7x^7 + 8) + 49x^8$

c) $f'(x) = 6x^5(x + 1) + x^6$

d) $f'(x) = -(x - 1)^{-2}(x + 1) + (x - 1)^{-1}$

e) $f'(x) = \frac{4}{3}\left(\frac{x}{3} + 1\right)^3 \left(\frac{4x}{3}\right)^3 + 4\left(\frac{x}{3} + 1\right)^4 \left(\frac{4x}{3}\right)^2$

f) $f'(x) = -10x(x^2 - 3)^{-6}(x - x^2) + (1 - 2x)(x^2 - 3)^{-5}$

g) $f'(x) = 2x^{-2}(x^{-1} - 2)^{-3}(1 + x^2) + 2x(x^{-1} - 2)^{-2}$

h) $f'(x) = (x - 1)^2(x - 2)^3 + 2x(x - 1)(x - 2)^3 + 3x(x - 1)^2(x - 2)^2$

i) $f'(x) = (2x + 1)(x + 2x^2)(x + 1) + (x^2 + x)(1 + 4x)(x + 1) + (x^2 + x)(x + 2x^2)$

j) $f'(x) = (3x^2 + 7)(x^7 + 5x^2) + (x^3 + 7x)(7x^6 + 10x)$

k) $f'(x) = \frac{(x+1)^{-1/2}}{2} \sqrt[3]{x-1} + \frac{(x-1)^{-2/3}}{3} \sqrt{x+1}$

l) $f'(x) = \sqrt{x^2+1}(x+1)^2 + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+1}}(x+1)^2 + 2x\sqrt{x^2+1}(x+1)$

Funciones racionales

Reglas de derivación.

$$f(x) = \frac{1}{v} \rightarrow f'(x) = -\frac{v'}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{u}{v} \rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Ejemplos:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^{100} + 4x} \rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^{100} + 4x) - (100x^{99} + 4)x^2}{(x^{100} + 4x)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} \rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^3 + 1) - 3x^2(x^2 + 1)}{(x^3 + 1)^2}$$

Ejercicios:

6° Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^5 - 6x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{(4x - x^2)^3}$

Sol:

a) $f'(x) = -\frac{3x^2 - 2}{(x^3 - 2x)^2}$

b) $f'(x) = -\frac{5x^4 - 12x}{(x^5 - 6x^2)^2}$

c) $f'(x) = -\frac{5 \cdot (4 - 2x)}{(4x - x^2)^5}$

7° Usando las reglas de derivación anteriores derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 3}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \frac{(x+3)^2}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{3x}$

f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x}}$

g) $f(x) = \frac{\sqrt{3x}}{x}$

h) $f(x) = \frac{x^i + 1}{x^e - 2}$

Sol:

a) $f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 1) - 2x(x^3 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$

b) $f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x^4}{(x^2 + 1)^2}$

c) $f'(x) = \frac{2(x+3)(x-2) - (x+3)^2}{(x-2)^2}$

d) $f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x^3}{(x^2 - 1)^2}$

e) $f'(x) = \frac{9x(x-1)^2 - 3(x-1)^3}{9x^2}$

f) $f'(x) = \frac{1}{3x} \left(\sqrt{3x} - x \frac{3}{2\sqrt{3x}} \right)$

g) $f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(x \frac{3}{2\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right)$

h) $f'(x) = \frac{ix^i(x^e - 2) - ex^e(x^i + 1)}{(x^e - 2)^2}$

8° Demostrar que las siguientes funciones tienen por derivada:

a) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} \rightarrow f'(x) = 2x$

b) $f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + x^2}{x^2 + 3x + 1} \rightarrow f'(x) = 2x$

c) $f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x}{x^3 + 2x^2 + x} \rightarrow f'(x) = 1$

h) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 2x + 1}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

Funciones exponenciales

Reglas de derivación.

$$f(x) = a^u \rightarrow f'(x) = u' a^u \ln a$$

$$f(x) = e^u \rightarrow f'(x) = u' e^u$$

Ejemplos:

$$f(x) = e^{4x+3} \rightarrow f'(x) = 4e^{4x+3}$$

$$f(x) = e^{x^2+3x} \rightarrow f'(x) = (2x+3)e^{x^2+3x}$$

$$f(x) = 2^{x^2} \rightarrow f'(x) = 2x \cdot 2^{x^2} \ln 2$$

$$f(x) = 2^{x^3+5x^2} \rightarrow f'(x) = (3x^2+10x)2^{x^3+5x^2} \ln 2$$

$$f(x) = \sqrt[x+2]{2^x} = 2^{\frac{x}{x+2}} \rightarrow f'(x) = \left(\frac{2}{(x+2)^2} \right) 2^{\frac{x}{x+2}} \ln 2$$

Ejercicios:

9° Usando las reglas de derivación anteriores derive las siguientes funciones:

- a) $f(x) = e^{x^3+2x}$ b) $f(x) = e^{2x+1}$ c) $f(x) = e^{-x^2}$ d) $f(x) = e^{x^7+5x^6+3}$
e) $f(x) = 2^{x^3+2x}$ f) $f(x) = 3^{2x+1}$ g) $f(x) = 4^{-x^2}$ h) $f(x) = \pi^{x^7+5x^6+3}$

Sol:

- a) $f'(x) = (3x^2+2) \cdot e^{x^3+2x}$ b) $f'(x) = 2e^{2x+1}$ c) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$
d) $f'(x) = (7x^6+30x^5) \cdot e^{x^7+5x^6+3}$ e) $f'(x) = (3x^2+2) \cdot 2^{x^3+2x} \cdot \ln 2$
f) $f'(x) = 2 \cdot 3^{2x+1} \ln 3$ g) $f'(x) = -2x \cdot 4^{-x^2} \cdot \ln 4$
h) $f'(x) = (7x^6+30x^5) \cdot \pi^{x^7+5x^6+3} \cdot \ln \pi$

10° Derive las siguientes funciones:

- a) $f(x) = e^{x^2} + e^{x+1} + 5$ b) $f(x) = e^{x^2-2x} + 2^x$ c) $f(x) = xe^x + e^x + e$
d) $f(x) = x^4 e^{3x} + xe^{x+1}$ e) $f(x) = \left(\left((e^x)^x \right)^x \right)^x$ f) $f(x) = \sqrt{\frac{2}{x\sqrt{e^{6x+1}}}}$
g) $f(x) = 4^x + 7^{x^2+3x}$ h) $f(x) = \left(2^{x^2-3} \right)^x$ i) $f(x) = 10^{e^x}$
j) $f(x) = 4^{x^3} + e^{x^6} + 1$ k) $f(x) = \sqrt[x]{e} + x^{-2}\sqrt{2}$ l) $f(x) = e^{\sqrt{x}} + x^e + e^{\sqrt{7}}$

Sol:

- a) $f'(x) = 2xe^{x^2} + e^{x+1}$ b) $f'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x} + 2^x \ln 2$
c) $f'(x) = 2e^x + xe^x$ d) $f'(x) = 4x^3 e^{3x} + 3e^{3x} x^4 + e^{x+1} + xe^{x+1}$
e) $f'(x) = 4x^3 e^{x^4}$ f) $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{x^2} e^{-\frac{6x+1}{x}}$
g) $f'(x) = 4^x \cdot \ln 4 + (2x+3) \cdot 7^{x^2+3x} \cdot \ln 7$ h) $f'(x) = (3x^2-3)2^{x^2-3x}$
i) $f'(x) = e^x 10^{e^x} \ln 10$ j) $f'(x) = 3x^2 4^{x^3} \ln 4 + 6x^5 e^{x^6}$
k) $f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2} - \frac{2^{1/(x-2)}}{(x-2)^2} \ln 2$ l) $f'(x) = -\frac{5^{1/e^x}}{e^{2x}} \ln 5 + e \cdot x^{e-1}$

Funciones logarítmicas

Reglas de derivación.

$$f(x) = \log_a u \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u} \log_a e$$

$$f(x) = \ln u \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$$

Ejemplos:

$$f(x) = \log_4(8x + x^3) \rightarrow f'(x) = \frac{8 + 3x^2}{8x + x^3} \log_4 e$$

$$f(x) = \ln(3x^4 + 7) \rightarrow f'(x) = \frac{12x^3}{3x^4 + 7}$$

Ejercicios:

11° Usando las reglas de derivación anteriores derive las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \ln(3x - 1)$ b) $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$ c) $f(x) = \ln(x^3 - 2x^4)$
d) $f(x) = \log(6x - 5)$ e) $f(x) = \log(2x^2 - x)$ f) $f(x) = \log(2x^5 - x^{-2})$
g) $f(x) = \log_2(6x - x^2)$ h) $f(x) = \log_3(3x^2 - x^6)$ i) $f(x) = \log_5(x^2 - 8x)$

Sol:

- a) $f'(x) = \frac{3}{3x - 1}$ b) $f'(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x}$ c) $f'(x) = \frac{3x^2 - 8x^3}{x^3 - 2x^4}$
d) $f'(x) = \frac{6}{6x - 5} \log e$ e) $f'(x) = \frac{2x - 1}{2x^2 - x} \log e$ f) $f'(x) = \frac{10x^4 + 2x^{-3}}{2x^5 - x^{-2}} \log e$
g) $f'(x) = \frac{6 - 2x}{6x - x^2} \log_2 e$ h) $f'(x) = \frac{6x - 6x^5}{3x^2 - x^6} \log_3 e$ i) $f'(x) = \frac{2x - 8}{x^2 - 8x} \log_5 e$

12° Derive las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \ln\left(\frac{x^3}{5}\right)$ b) $f(x) = x \ln(x + 1)$ c) $f(x) = \ln\left(\frac{x + 2}{x^2}\right)^3$
d) $f(x) = \frac{1}{\ln \sqrt{x}}$ e) $f(x) = \ln \sqrt{x - 2}$ f) $f(x) = \log_2(x^{\sqrt{7}})$
g) $f(x) = \log_{50}(\sqrt{4x^3 + 5})$ h) $f(x) = \frac{\ln x}{3^x}$ i) $f(x) = \ln(1 + e^{x^4 + 1})$
j) $f(x) = e^{1 + \ln x}$ k) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 4}\right)$ l) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

Sol:

- a) $f'(x) = \frac{3}{x}$ b) $f'(x) = \ln(x + 1) + \frac{x}{x + 1}$ c) $f'(x) = \frac{3}{x + 2} - \frac{6}{x}$
d) $f'(x) = \frac{-2}{x(\ln x)^2}$ e) $f'(x) = \frac{1}{2(x - 2)}$ f) $f'(x) = \frac{\sqrt{7}}{x} \log_2 e$
g) $f'(x) = \frac{6x^2}{4x^3 + 5} \log_{50} e$ h) $f'(x) = \frac{3^{-x}}{x} - 3^{-x} \ln 3 \cdot \ln x$ i) $f'(x) = \frac{4x^3 e^{x^4 + 1}}{1 + e^{x^4 + 1}}$
j) $f'(x) = \frac{1}{x} e^{1 + \ln x} = e$ k) $f'(x) = \frac{x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 4)(x^2 - x)}$ l) $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(x) \cdot \ln(\ln x)}$

Funciones trigonométricas

Reglas de derivación.

$$f(x) = \sin u \rightarrow f'(x) = u' \cdot \cos u$$

$$f(x) = \cos u \rightarrow f'(x) = -u' \cdot \sin u$$

$$f(x) = \tan u \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

Ejemplos:

$$f(x) = \sin(4x^2) \rightarrow f'(x) = 8x \cos(4x^2) \quad f(x) = \cos(x^2) \rightarrow f'(x) = -2x \sin(x^2)$$

$$f(x) = \tan(x^3 - x) \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{\cos^2(x^3 - x)} \quad f(x) = \tan(\sin(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{-\cos x}{\cos^2(\sin(x))}$$

Ejercicios:

13° Usando las reglas de derivación anteriores derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \cos(3x)$ b) $f(x) = \sin(3x^2 - 2)$ c) $f(x) = 4 \sin x - 3 \cos x$

d) $f(x) = \sin(3x + 5)$ e) $f(x) = \cos(\sin x)$ f) $f(x) = \sin(2x^6 + 7)$

g) $f(x) = \tan(x^3 + 2)$ h) $f(x) = \tan(2x^7 + 2x)$ i) $f(x) = \tan(x - \cos x)$

Sol:

a) $f'(x) = -3 \sin(3x)$ b) $f'(x) = 6x \cdot \cos(3x^2 - 2)$ c) $f'(x) = 4 \cos x + 3 \sin x$

d) $f'(x) = 3 \cos(3x + 5)$ e) $f'(x) = -\cos x \sin(\sin x)$ f) $f'(x) = 12x^5 \cdot \cos(2x^6 + 7)$

g) $f'(x) = \frac{3x^2}{\cos^2(x^3 + 2)}$ h) $f'(x) = \frac{14x^6 + 2}{\cos^2(2x^7 + 2x)}$ i) $f'(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos^2(x - \cos x)}$

14° Derive las siguientes funciones y simplifíquelas si fuese posible:

a) $f(x) = \sin(\sqrt{3x^2 - 5x})$ b) $f(x) = \sin^2(x)$ c) $f(x) = 3 \sin^2(2x - 3)$

d) $f(x) = \sqrt[5]{\sin(3x)}$ e) $f(x) = \cos^2(x^3)$ f) $f(x) = \cos^4(3x^4)$

g) $f(x) = \sin(x^2) \cos(x)$ h) $f(x) = \sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}$ i) $f(x) = \tan x \cos x$

j) $f(x) = \sqrt{2 \tan x \sin(2x)}$ k) $f(x) = \sqrt[6]{\tan \sqrt{x}}$ l) $f(x) = \cotan(x)$

Sol:

a) $f'(x) = \frac{6x - 5}{2\sqrt{3x^2 - 5x}} \cos(\sqrt{3x^2 - 5x})$ b) $f'(x) = 2 \sin x \cos x$

c) $f'(x) = 12 \sin(2x - 3) \cos(2x - 3)$ d) $f'(x) = \frac{3 \cos(3x)}{5\sqrt[5]{(\sin(3x))^4}}$

e) $f'(x) = -6x^2 \sin x^3 \cos x^3$ f) $f'(x) = -48x^3 \sin(3x^4) \cos^3(3x^4)$

g) $f'(x) = 2x \cos(x^2) \cos x - \sin(x^2) \sin x$ h) $f'(x) = \frac{-\sin(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}}$

i) $f'(x) = \cos x$ j) $f'(x) = 4 \cos(2x)$

k) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} \frac{1}{6\sqrt[6]{(\tan \sqrt{x})^5}}$ l) $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$

Reglas de derivación.

$$f(x) = \arcsin u \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$f(x) = \arccos u \rightarrow f'(x) = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$f(x) = \arctan u \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$$

Ejemplos:

$$f(x) = \arcsin(x^3) \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} \quad f(x) = \arctan(e^{3x}) \rightarrow f'(x) = \frac{3e^{3x}}{1+e^{6x}}$$

$$f(x) = \arccos(e^x + x) \rightarrow f'(x) = -\frac{e^x + 1}{\sqrt{1-(e^x + x)^2}}$$

Ejercicios:

15° Usando las reglas de derivación anteriores derive las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \arcsin(x^3)$ b) $f(x) = \arcsin(x+1)$ c) $f(x) = \arcsin(e^{5x})$
d) $f(x) = \arccos(2x^5 + x)$ e) $f(x) = \arccos(e^{3x} + 5x)$ f) $f(x) = \arccos(\ln x)$
g) $f(x) = \arctan(x^2)$ h) $f(x) = \arctan(x^4 + 3x)$ i) $f(x) = \arctan(\ln x)$

Sol:

a) $f'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$ b) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$ c) $f'(x) = \frac{5e^{5x}}{\sqrt{1-e^{10x}}}$
d) $f'(x) = -\frac{10x^4 + 1}{\sqrt{1-(2x^5 + x)^2}}$ e) $f'(x) = -\frac{3e^{3x} + 5}{\sqrt{1-(e^{3x} + 5x)^2}}$ f) $f'(x) = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}$
g) $f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$ h) $f'(x) = \frac{4x^3 + 3}{1+(x^4 + 3x)^2}$ i) $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{1+(\ln x)^2}$

16° Derive las siguientes funciones y simplifíquelas si fuese posible:

- a) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{e^x}\right)$ b) $f(x) = e^{\cos x} \arcsin x$ c) $f(x) = \frac{\arcsin(3x-2)}{x}$
d) $f(x) = \arcsin(\arccos x)$ e) $f(x) = \arccos\sqrt{1-\sin^2 x}$ f) $f(x) = \sin^2(\arccos x)$

Sol:

a) $f'(x) = \frac{-x}{e^x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2}}$ b) $f'(x) = -\sin(x) \cdot e^{\cos x} \arcsin x + \frac{e^{\cos x}}{\sqrt{1-x^2}}$
c) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-(3x-2)^2}} - \arcsin(3x-2)$ d) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\arccos^2 x}}$
e) $f'(x) = 1$ f) $f'(x) = -2x$