

1°.- Encontrar un punto de la gráfica de la función  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  en el que la tangente a ella sea paralela a la secante a la curva que pasa por  $x = 1$  y por  $x = 4$

**Solución:**

La secante debe pasar por los puntos  $(1, f(1)) = (1, 0)$  y  $(4, f(4)) = (4, 3)$ ; en el intervalo  $[1, 4]$  la función es continua y además derivable en  $(1, 4)$ , luego cumple las condiciones para que se pueda aplicar el Teorema de Lagrange.

Sea  $c$  el punto buscado, entonces:

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{3 - 0}{4 - 1} = 1$$

De donde  $f'(c) = 2c - 4 = 1 \Rightarrow c = \frac{5}{2}$ , ; es decir el punto  $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

Podemos encontrar también dicho punto teniendo en cuenta que la secante tiene la misma pendiente que la tangente:

La recta secante que pasa por  $(1, 0)$  y  $(4, 3)$  es :

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-0}{3-0} \Rightarrow x-1 = y \Rightarrow \text{pendiente } m = 1 = f'(c)$$

2°.- Encuentra los puntos de máximo y mínimo, así como las distintas zonas de concavidad y el punto de inflexión ,de la función  $f(x) = \arccos x$ .

**Solución:**

La expresión  $f(x) = \arccos x$  representa una infinidad de funciones ya que todos los ángulos  $f(x) + 2k\pi$  tienen el mismo coseno

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} ; \text{ derivada que no se anula nunca, y siempre es negativa, por lo que}$$

se trata de una función decreciente limitada entre  $x \in [-1, 1]$ , pues el coseno de un ángulo no puede tomar otros valores; por ello en  $x = -1$  hay un máximo que será  $(-1, \arccos(-1)) = (-1, \pi)$  y un mínimo  $(1, \arccos(1)) = (1, 0)$ . Con propiedad, dado que la función coseno es función periódica de periodo  $2\pi$ , los puntos singulares de máximo serán  $(-1, -\pi + 2k\pi)$  y los de mínimo  $(1, 2k\pi)$ , en los que  $k = 0, 1, 2, \dots$ , para cada una de las infinitas funciones

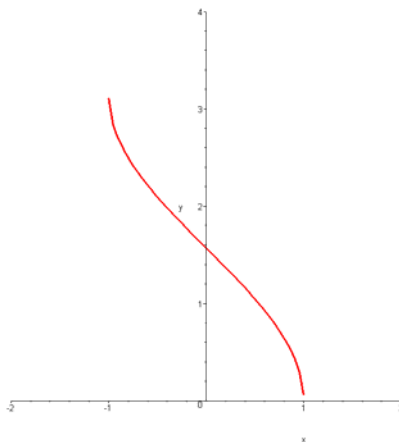
Para estudiar su concavidad, volvemos a derivar:

$$f''(x) = \frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

Que se anula para  $x = 0$ ;

$$\text{para } \begin{cases} x \in (-1,0) \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ tiene concavidad positiva } \cup \\ x \in (1,0) \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ tiene concavidad negativa } \cap \end{cases}$$

luego en  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ó, mejor dicho, en  $\left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$  hay punto de inflexión como podemos ver en la gráfica



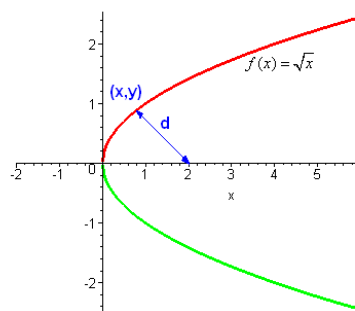
3°.- Encontrar la mínima distancia del punto  $(2,0)$  a la gráfica de la función  $f(x) = \sqrt{x}$

**Solución:**

La expresión  $f(x) = \sqrt{x}$ , en realidad responde a dos funciones simétricas  $f_1(x) = +\sqrt{x}$  y  $f_2(x) = -\sqrt{x}$ ; luego las distancias desde el punto a cada una de las ramas son iguales; por lo que hacemos el cálculo sobre una de las ramas.

Sea  $(x, y)$  un punto genérico de la gráfica:

$$\begin{aligned} d_{(x,y),(2,0)} &= \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + x} = \\ &= d = \sqrt{x^2 - 3x + 4} \end{aligned}$$



De donde :

$$d' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}} \quad \text{que se nula para } x = \frac{3}{2} ; \text{ dado que estamos calculando la}$$

distancia a la rama superior, la raíz del denominador siempre es positiva, luego el signo de la derivada dependerá del numerador:

.....

$$\text{si } \begin{cases} x \in \left(0, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow d' < 0 \Rightarrow d \text{ es decreciente} \\ x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \Rightarrow d' > 0 \Rightarrow d \text{ es creciente} \end{cases}, \text{ luego en } x = \frac{3}{2} \text{ hay un mínimo; y la}$$

distancia mínima buscada será  $d = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$  uni. de long.