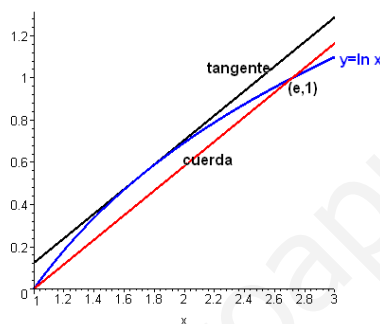


1º.-Dada la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo $[1, e]$, siendo $e = 2,718281\dots$

- Razonar que existe un punto P de la gráfica $y = \ln x$ en el que la recta tangente a ella es paralela a la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0)$ y $B = (e, 1)$
- Obtener el punto P del apartado anterior
- Calcular la pendiente de la recta tangente a $y = \ln x$ en el punto P

Solución.

- Dado que $f(x) = \ln x$ es continua en el intervalo $[1, e]$, hay un punto en la gráfica cuya tangente es paralela a la cuerda que une los puntos A y B, como fácilmente se ve en el siguiente gráfico



b)

La pendiente de la cuerda es $\frac{1-0}{e-1}$ que ha de ser igual a la pendiente de la tangente a la gráfica de la función, es decir $f'(x) = \frac{1}{x}$, o sea:

$$\frac{1}{e-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = e-1$$

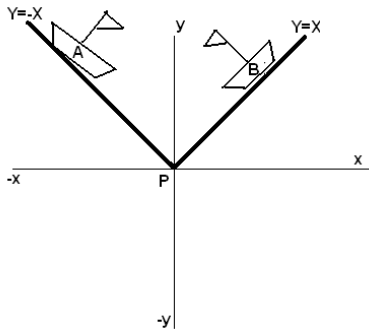
luego el punto buscado es $(e-1, \ln(e-1)) \approx (1,72; 0,54)$

c) La pendiente de la recta tangente será

$$f'(e-1) = \frac{1}{e-1} \cong 0,58$$

2º.-El trazado de dos canales navegables en un mapa discurre según las rectas $y = -x$ e $y = x$. Dos lanchas motoras ,A y B, salen al mismo tiempo de puntos situados sobre cada uno de los canales a distancias de 20 y 15 km, respectivamente, del punto P de confluencia de ambos. La lancha A se dirige a P a 30 km/h y la lancha B se dirige a ese mismo punto P con velocidad de 60 km/h . Si consideramos despreciable la anchura de los canales y la longitud de las lanchas, se pide calcular:

- La distancia entre las lanchas en función del tiempo desde que inician el recorrido
- La distancia mínima a la que pueden estar las lanchas entre sí.



Solución:

a)

La lancha A se desplaza hacia el punto P a 30 km/h , luego en un tiempo t habrá recorrido $30t$, por lo que estará a $20 - 30t \text{ km}$ del punto P, mientras que la lancha B estará a $15 - 60t \text{ km}$ del punto P.

Como los dos canales son perpendiculares, la distancia , d , entre las dos lanchas es la hipotenusa de un triángulo rectángulo:

$$d = \sqrt{(20 - 30t)^2 + (15 - 60t)^2} = \sqrt{4500t^2 - 3000t + 625}$$

b)

$$d' = \frac{9000t - 3000}{2\sqrt{4500t^2 - 3000t + 625}} \text{ que se anula para } t = \frac{1}{3},$$

dicha función es decreciente para $t < \frac{1}{3}$ y creciente para $t > \frac{1}{3}$, como es fácil ver

observando el signo de la derivada en dichos intervalos; luego $\frac{1}{3}$ horas del momento de la partida se obtiene la mínima distancia entre ambas lanchas; y esta distancia será:

$$d\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{4500 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 625} = 5\sqrt{5} \cong 11,18 \text{ Km}$$

3.- Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ encontrar:

- Las zonas de crecimiento y decrecimiento
- Las distintas zonas de concavidad(concavidad positiva)y convexidad(concavidad negativa)
- Los máximos y mínimos relativos
- Los puntos de inflexión
- Las asíntotas

Solución:

a) La función no existe para $\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} \text{ que se anula para } \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

- para $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente
- para $x \in (-\sqrt{3}, -1) \rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente
- para $x \in (-1, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente
- para $x \in (0, 1) \rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente
- para $x \in (-1, \sqrt{3}) \rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente
- para $x \in (\sqrt{3}, \infty) \rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente

b)

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} \text{ que se anula para } x = 0, \text{ luego}$$

- para $x \in (-\infty, -1) \rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ tiene concavidad negativa
- para $x \in (-1, 0) \rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ tiene concavidad positiva
- para $x \in (0, 1) \rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ tiene concavidad positiva
- para $x \in (1, \infty) \rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ tiene concavidad positiva

c)

A la vista de los resultados del punto a) podemos afirmar que en $x = -\sqrt{3}$ hay un máximo y en $x = \sqrt{3}$ hay un mínimo

d)

A la vista de los resultados del punto b) podemos afirmar que en $x = 0$ hay un punto de inflexión

e)

-Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \text{ luego no hay asíntotas horizontales}$$

.....
- **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty$$

Luego $x = -1$ y $x = 1$ son dos asíntotas verticales

- **Asíntotas oblicuas:**

Serán de la forma $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 1 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$$

Luego $y = x$ es la asíntota oblicua