OPCIÓN A

1.- a) Definir menor complementaria y adjunto de un elemento de una matriz cuadrada.

b) Sean I la matriz identidad de orden 3 y $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$. Determina los valores de λ para los que $A+\lambda I$ no tiene inversa.

c) Calcular la matriz que verifica **AX – A =2X**, siendo A la matriz dada en el apartado b).

b) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$A+\lambda I=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\lambda&0&2\\1&1+\lambda&0\\2&0&1+\lambda\end{pmatrix}$$

$$|A+\lambda I|=\begin{vmatrix}1+\lambda&0&2\\1&1+\lambda&0\\2&0&1+\lambda\end{vmatrix}=(1+\lambda)^3-4\cdot(1+\lambda)=(1+\lambda)\cdot\left[(1+\lambda)^2-4\right]=(1+\lambda)\cdot\left(1+2\lambda+\lambda^2-4\right)$$

$$|A+\lambda I|=(1+\lambda)\cdot\left(\lambda^2+2\lambda-3\right)\Rightarrow Si\ |A+\lambda I|=0\Rightarrow$$

$$(1+\lambda)\cdot\left(\lambda^2+2\lambda-3\right)=0\Rightarrow\begin{cases}1+\lambda=0\Rightarrow\lambda=-1\\ \lambda^2+2\lambda-3=0\Rightarrow\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-3)=16\geq0\Rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-3\end{cases}\end{cases}$$

$$\forall\lambda\in\Re-\{-3\,,-1\,,1\}\Rightarrow|A+\lambda I|\neq0\Rightarrow Existe\ (A+\lambda I)^{-1}$$

$c)$

$$AX-2X=A\Rightarrow(A-2I)\cdot X=A\Rightarrow(A-2I)^{-1}\cdot(A-2I)\cdot X=(A-2I)^{-1}\cdot A\Rightarrow I\cdot X=(A-2I)^{-1}\cdot A\Rightarrow$$
$$X=(A-2I)^{-1}\cdot A$$

$$A-2I=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow|A+(-2)I|=[1+(-2)]\cdot\left[(-2)^2+2\cdot(-2)-3\right]$$

$$|A+(-2)I|=(-1)\cdot(-3)=3\neq0\Rightarrow(A-2I)^{-1}=\frac{1}{|A+2I|}\cdot adj\left[(A-2I)^t\right]\Rightarrow$$

$$(A-2I)^t=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\left[(A-2I)^t\right]=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&-3&2\\2&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow(A-2I)^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\1&-3&2\\2&0&1\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\1&-3&2\\2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}5&0&4\\2&-3&4\\4&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&0&\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}&-1&\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}&0&\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

Continuación del Problema 1 de la Opción A

a) Dada una matriz cuadrada **A** de orden **n**, se llama submatriz complementaria del elemento a_{ij} a la matriz de orden **n – 1** que resulta al suprimir en **A** la fila **i** y la columna **j**. Esta matriz se expresa como α_{ij} .

Si **A** es una matriz cuadrada de orden **n**, se llama **menor complementario del elemento a_{ij}** al determinante de la submatriz complementaria del elemento, es decir $\left|\alpha_{ij}\right|$.

Dada una matriz cuadrada **A** de orden **n**, se llama **adjunto del elemento a_{ij}** al número A_{ij} definido por la expresión **:** $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \left|\alpha_{ij}\right|$

Si sustituimos cada elemento de **A** por su adjunto, se obtiene otra matriz que recibe el nombre de **matriz adjunta A**, y que se expresa **Adj (A)**

2.- Dado que el plano $\pi : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda - \mu \\ y = 1 - 2\lambda + \mu \\ z = 4 + 3\mu \end{cases}$, y la recta : $r : \begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de π y **r**. Si se cortan, calcula el punto de corte.
b) Calcular el ángulo que forman π y **r**. Calcular el plano que contiene a r y es perpendicular a π .

a) Una recta y un plano pueden ser paralelos o la recta pertenecer al plano, en ambos casos sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar nulo, si además tienen un punto común la recta pertenece al plano, sino son paralelos**.**
Si el producto escalar de los vectores directores es no nulo la recta y el plano se cortan en un punto.
Para hallar el vector director del plano calcularemos el producto vectorial de los dos vectores que lo generan.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = (2 , -2 , 0) \equiv (1 , -1 , 0) \\ \overrightarrow{v_2} = (-1 , 1 , 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + \vec{k} - \vec{k} - 3\vec{j} = -3\vec{i} - 3\vec{j} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_\pi} = (-3 , -3 , 0) \equiv (1 , 1 , 0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1 , 1 , 0) \\ x = 4 - z \Rightarrow r : \begin{cases} x = 4 - \eta \\ y = 3 \\ z = \eta \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (-1 , 0 , 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_r} = (1 , 1 , 0) \cdot (-1 , 0 , 1) = -1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$Se\ cor\tan\ en\ un\ punto$$

$$Ecuación\ general\ del\ plano \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3(x-2) + (z-4) - (z-4) - 3(y-1) = 0$$

$$-3(x-2) - 3(y-1) = 0 \Rightarrow x - 2 + y - 1 = 0 \Rightarrow \pi : x + y - 3 = 0 \Rightarrow 4 - \eta + 3 - 3 = 0 \Rightarrow \eta = 4 \Rightarrow$$

$$Punto\ de\ \operatorname{int} er\sec ción\ P \begin{cases} x = 4 - 4 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow P(0 , 3 , 4)$$

Continuación del Problema 2 de la Opción A

$b)$

$$Siendo\ \alpha\ el\ ángulo\ que\ forman\ el\ plano\ \pi\ y\ la\ recta\ r$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=(1,1,0)\\ \overrightarrow{v_r}=(-1,0,1)\end{cases}\Rightarrow sen\ \alpha=\frac{\left|\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_\pi}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_r}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_\pi}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_r}\right|}=\frac{|(1,1,0)\cdot(-1,0,1)|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\alpha=arc\ sen\left(\frac{1}{2}\right)=30^{o}=\frac{\pi}{6}\ rad$$

El plano α contendrá el vector director del plano π y el de la recta **r**, además del vector **RG**, donde **R** es un punto cualquiera del plano (tomaremos el indicado en su ecuación) y **G** el punto genérico, los tres son coplanarios y el determinante de la matriz que forma es nulo y la ecuación pedida

$$Siendo\ R\ (4,3,0)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=(1,1,0)\\ \overrightarrow{v_r}=(-1,0,1)\\ \overrightarrow{RG}=(x,y,z)-(4,3,0)=(x-4,y-3,z)\end{cases}\Rightarrow\alpha:\begin{vmatrix}x-4 & y-3 & z\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$(x-4)+z-(y-3)=0\Rightarrow\alpha: x-y+z-1=0$$

3.- a) Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-2x}-2x}{sen^2 x}$

b) Dividimos un alambre de metal 70 metros de largo en tres partes de manera que una de ellas tenga una longitud doble que otra, y que, al construir con cada parte un cuadrado, la suma de áreas de los tres cuadrados es mínima. Calcular la longitud de cada parte

$a)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-2x}-2x}{sen^2 x}=\frac{\cos 0-e^{-2\cdot 0}-2\cdot 0}{sen^2 0}=\frac{1-e^0-0}{0^2}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-sen\ x+2e^{-2x}-2}{2\ sen\ x\cdot\cos x}=\frac{-sen\ 0+2e^{-2\cdot 0}-2}{2\ sen\ 0\cdot\cos 0}=\frac{-0+2e^0-2}{2\cdot\ 0\cdot 1}=\frac{2-2}{0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-4e^{-2x}}{2\cdot\left(\cos^2 x-sen^2 x\right)}=\frac{-\cos 0-4e^{-2\cdot 0}}{2\cdot\left(\cos^2 0-sen^2 0\right)}=\frac{-1-4e^0}{2\cdot\left(1^2-0^2\right)}=-\frac{5}{2}$$

Continuación del Problema 3 de la Opción A

b)

Sea 4**L** la longitud del perímetro de uno, **8L** el de que es doble y de (70 – 4L - 8L) el último

$$A = L^2 + (2L)^2 + \left(\frac{70-12L}{4}\right)^2 = L^2 + 4L^2 + \left(\frac{35-6L}{2}\right)^2 = 5L^2 + \frac{35^2 - 420L + 36L^2}{4}$$

$$A = \frac{35^2 - 420L + 36L^2 + 20L^2}{4} = \frac{35^2 - 420L + 56L^2}{4} \Rightarrow A' = \frac{dA}{dL} = \frac{-420 + 112L}{4} = -105 + 28L \Rightarrow$$

$$A' = 0 \Rightarrow -105 + 28L = 0 \Rightarrow L = \frac{105}{28} \Rightarrow A'' = \frac{d^2A}{dL^2} = 28 > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4L = 4 \cdot \frac{105}{28} = \frac{105}{7} = 15\ cm \\ 8L = 8 \cdot \frac{105}{28} = \frac{210}{7} = 30\ cm \\ 70 - 12L = 70 - 12 \cdot \frac{105}{28} = 70 - \frac{1260}{28} = 70 - 45 = 25\ cm \end{cases}$$

4. a) La segunda derivada de una función **f(x)** es **f''(x) = 4e^{2x} – 2x**. Además, la tangente a la gráfica **f(x)** en el punto **(0 ,1)** es paralela a la línea **x - y + 3 = 0**. Calcular **f(x)**.

b) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ sen\,(2x + \pi)\,dx$

$$f'(x) = \int \left(4e^{2x} - 2x\right)dx = 4\int e^{2x}dx - 2\int xdx = 4\int e^t\,\frac{dt}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2 = 2e^t - x^2 = 2e^{2x} - x^2 + K$$

$$2x = t \Rightarrow 2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$y = x + 3 \Rightarrow f'(0) = 1 \Rightarrow 2\left(e^{2\cdot 0} - 0^2\right) + K = 1 \Rightarrow 2\,e^0 + K = 1 \Rightarrow K = 1 - 2 = -1 \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} - x^2 - 1$$

$$f(x) = \int \left(2e^{2x} - x^2 - 1\right)dx = \int e^{2x}dx - \int x^2\ dx - \int dx = 2\int e^t\,\frac{dt}{2} - \frac{1}{3}\cdot x^3 - x = e^t - \frac{x^3}{x} - x = e^{2x} - \frac{x^3}{x} - x + Q$$

$$2x = t \Rightarrow 2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow e^{2\cdot 0} - \frac{0^3}{3} - 0 + Q = 1 \Rightarrow 1 + Q = 1 \Rightarrow Q = 0 \Rightarrow f(x) = e^{2x} - \frac{x^3}{x} - x$$

Continuación del Problema 4 de la opción A

$b)$

$$I=\int x\, sen\,(2x+\pi)\,dx=-\frac{x\cos(2x+\pi)}{2}-\int -\frac{\cos(2x+\pi)}{2}\,dx=-\frac{x\cos(2x+\pi)}{2}+\frac{1}{2}\int \cos(2x+\pi)\,dx$$

$$\begin{cases} u=x\Rightarrow du=dx \\ sen\,(2x+\pi)\,dx=dv\Rightarrow v=\int sen\,(2x+\pi)\,dx=\int sen\,t\,\frac{dt}{2}=-\frac{1}{2}\cdot\cos t=-\frac{\cos(2x+\pi)}{2} \end{cases}$$

$$2x+\pi=t\Rightarrow 2\,dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$$

$$I=-\frac{x\cos(2x+\pi)}{2}+\frac{1}{2}\int \cos(2x+\pi)\,dx=-\frac{x\cos(2x+\pi)}{2}+\frac{1}{2}\int \cos t\,\frac{dt}{2}$$

$$2x+\pi=t\Rightarrow 2\,dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$$

$$I=-\frac{x\cos(2x+\pi)}{2}+\frac{sen\,(2x+\pi)}{4}+K$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, sen\,(2x+\pi)\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\left[x\cos(2x+\pi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\cdot\left[sen\,(2x+\pi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cos\left(2\frac{\pi}{2}+\pi\right)-0\cdot\cos(2\cdot 0+\pi)\right]+\frac{1}{4}\cdot\left[sen\left(2\frac{\pi}{2}+\pi\right)-sen\,(2\cdot 0+\pi)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cos(2\pi)-0\cdot\cos(\pi)\right]+\frac{1}{4}\cdot\left[sen\,(2\pi)-sen\,(\pi)\right]=-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot 1-0\cdot(-1)\right]+\frac{1}{4}\cdot(0-0)=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, sen\,(2x+\pi)\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}$$

OPCIÓN B

1.- a) Discutir, según los valores de **m**, el sistema: $\begin{cases} x + my + (m-1)z = m \\ (m-1)y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, para **m = 3**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 1-m & 1-m \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ 1-m & 1-m \end{vmatrix} = (m-1)(1-m) - (1-m) = (1-m)(m-1-1)$$

$$|A| = (1-m)(m-2) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow (1-m)(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-m=0 \Rightarrow m=1 \\ m-2=0 \Rightarrow m=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall m \in \Re - \{1\,,\,2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ \ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 00 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ \ Incompatible$$

$Si\ m = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ \ Incompatible$$

b)

$Si\ m = 3 \Rightarrow Sistema\ \ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow -z = -3 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow 2y + 3 = 0 \Rightarrow 2y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$$

$$x + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 2 \cdot 3 = 3 \Rightarrow x - \frac{9}{2} + 6 = 3 \Rightarrow x = \frac{9}{2} - 3 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = \left(\frac{3}{2}\,,\,-\frac{3}{2}\,,\,3\right)$$

2. Dada las rectas $r:\begin{cases} x+y-2z-5=0 \\ y-5z-1=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=5 \end{cases}$

a) Estudia su posición relativa. Si se cortan, calcula el punto de corte.
b) Calcula la ecuación implícita o general y las ecuaciones paramétricas del plano que contiene a **r** y a **s**
c) Calcular la distancia del punto **Q(1 , 1 , 4)** a la recta **s**.

a) Para ello analizaremos si las rectas, de las que calcularemos sus ecuaciones paramétricas, tienen un punto común, si el sistema que resulta de igualar sus coordenadas es compatible determinado son secantes y se cortan en un punto, si es compatible indeterminado las rectas coinciden. Para hallar la compatibilidad es condición necesaria que el determinante de la matriz de los coeficientes ampliada sea nula.
Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio.

$$\begin{cases} y=1+5z \Rightarrow x+1+5z-2z-5=0 \Rightarrow x=4-3z \Rightarrow r:\begin{cases} x=4-3\mu \\ y=1+5\mu \\ z=\mu \end{cases} \\ s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=5 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-3\mu=1+\lambda \\ 1+5\mu=2-2\lambda \\ \mu=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\mu+\lambda=3 \\ 5\mu+2\lambda=1 \\ \mu=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3\cdot 5+\lambda=3 \Rightarrow \lambda=-12 \\ 5\cdot 5+2\lambda=1 \Rightarrow 2\lambda=-24 \Rightarrow \lambda=-12 \end{cases} \Rightarrow \textit{Sistema Compatible Determinado. Se cortan en el punto P} \Rightarrow$$

$$P\begin{cases} x=1+(-12) \\ y=2-2\cdot(-12) \Rightarrow P(-11\,,\,26\,,\,5) \\ z=5 \end{cases}$$

b) Se conocen los vectores directores de las dos rectas que son coplanarios con el vector PG, siendo P el punto de corte de ambas y G el punto genérico del plano π a determinar, el determinante de la matriz que forman los tres es nula (al ser coplanarios) y la ecuación del plano pedida.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(-3\,,5\,,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(1\,,-2\,,0) \\ \overrightarrow{PG}=(x\,,\,y\,,\,z)-(-11\,,26\,,5)=(x+11\,,\,y-26\,,\,z-5) \end{cases} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x+11 & y-26 & z-5 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$(y-26)+6\,(z-5)-5\,(z-5)+2\,(x+11)=0 \Rightarrow 2\,(x+11)+(y-26)+(z-5)=0 \Rightarrow$$

$$\pi: 2x+y+z-9=0$$

Continuación del Problema 2 de la opción B

c) Hallaremos un plano que contenga al punto **Q** y que sea perpendicular a la recta **s**, cuyo vector director que será el del plano α buscado, que es perpendicular al vector **QG**, siendo el producto escalar, de ambos vectores, nulo y la ecuación del plano buscada.
Se hallará el punto **S** intersección de la recta **r** con el plano α , siendo el módulo del vector **QS** la distancia pedida.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (1\,,-2\,,0) \\ \overrightarrow{QG} = (x\,,y\,,z) - (1\,,1\,,4) = (x-1\,,y-1\,,z-4) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_s} \perp \overrightarrow{QG} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} \cdot \overrightarrow{QG} = 0 \Rightarrow (1\,,-2\,,0)\cdot(x-1\,,y-1\,,z-4) = 0 \Rightarrow x-1-2y+2=0 \Rightarrow \alpha : x-2y+1=0 \Rightarrow$$

$$1+\lambda-2\,(2+2\lambda)+1=0 \Rightarrow -2-3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{2}{3} \Rightarrow S\begin{cases} x=1+\left(-\dfrac{2}{3}\right) \\ y=2-2\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right) \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow S\left(\frac{1}{3}\,,\frac{10}{3}\,,5\right)$$

$$\overrightarrow{QS} = \left(\frac{1}{3}\,,\frac{10}{3}\,,5\right) - (1\,,1\,,4) = \left(-\frac{2}{3}\,,\frac{7}{3}\,,1\right) \Rightarrow d(Q\,,s) = d(Q\,,S) = \left|\overrightarrow{QS}\right| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 1^2} \Rightarrow$$

$$d(Q\,,s) = \sqrt{\frac{4+49}{9}+1} = \frac{\sqrt{62}}{3}\,u$$

3.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} mx & si \quad x<1 \\ ax^2+bx+1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

a) Calcular los valores de **a**, **b** y **m** para que **f(x)** sea derivable en **x = 1** y tiene una extremo relativo en **x = 3**.
b) Enuncia el teorema del valor medio teorema del cálculo diferencial. Para los valores **a = 1**, **b = -6** y **m = -4** calcula, si existe, un punto de **c ∈(0 , 5)** tal que la tangente a la gráfica **f(x)** en **x = c** sea paralela a la recta que une los puntos **(0 , 0)** y **(5 , -4)**.

a) Para ser derivable una función tiene que ser, también, continua

$$\begin{cases} \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x)=m\cdot 1=m \\ f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=a\cdot 1^2+b\cdot 1+1=a+b+1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow m=a+b+1 \\ f'(x)=\begin{cases} m & si \quad x<1 \\ 2ax+b & si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f'(x)=m \\ \lim_{x\to 1^+} f'(x)=2a\cdot 1+b \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)\Rightarrow m=2a+b\Rightarrow \\ f'(3)=0\Rightarrow 2a\cdot 3+b=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b-m=-1 \\ 2a+b-m=0 \\ 6a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 6 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow m=-4\Rightarrow -b-4=2\Rightarrow$$

$$b=-6\Rightarrow a-6+4=-1\Rightarrow a=1\Rightarrow Solución\Rightarrow (a\ ,b\ ,m)=(1\ ,-6\ ,-4)$$

b) **<u>Teorema del valor medio o de Lagrange</u>**
Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

$$f'(x)=\begin{cases} -4 & si \quad x<1 \\ 2x-6 & si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow m=\frac{-4-0}{5-0}=-\frac{4}{5}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -4\neq -\frac{4}{5}\Rightarrow No\ hay\ solución\ en\ (0\ ,1) \\ 2c-6=-\frac{4}{5}\Rightarrow 10c-30=-4\Rightarrow 10c=26 \end{cases} \Rightarrow$$

$$c=\frac{26}{10}=\frac{13}{5}\in(1\ ,5)$$

4. a) Calcular $\int_0^1 \frac{2}{3+3e^x}\,dx$

b) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral. Si $F(x)=\int_0^x \frac{2}{3+3e^t}\,dt$, calcula $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}$

$a)$

$$I=\int_0^1 \frac{2}{3\left(1+e^x\right)}\,dx=\frac{2}{3}\int_2^{1+e}\frac{1}{t}\,\frac{dt}{t-1}=\frac{2}{3}\int_2^{1+e}\frac{dt}{t\,(t-1)}$$

$$1+e^x=t\Rightarrow e^x dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t-1}\Rightarrow\begin{cases} x=1\Rightarrow t=1+e^1=1+e \\ x=0\Rightarrow t=1+e^0=1+1=2\end{cases}$$

$$\frac{1}{t\,(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}=\frac{A(t-1)+Bt}{t\,(t-1)}\Rightarrow A(t-1)+Bt=1\Rightarrow\begin{cases} t=1\Rightarrow A(1-1)+B\cdot 1=1\Rightarrow B=1 \\ t=0\Rightarrow A(0-1)+B\cdot 0=1\Rightarrow -A=1\Rightarrow A=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{t\,(t-1)}=\frac{-1}{t}+\frac{1}{t-1}\Rightarrow$$

$$I=\frac{2}{3}\int_2^{1+e}\frac{dt}{t\,(t-1)}=-\frac{2}{3}\int_2^{1+e}\frac{dt}{t}+\frac{2}{3}\int_2^{1+e}\frac{dt}{t-1}=-\frac{2}{3}\left[\ln t\right]_2^{1+e}+\int_1^e\frac{du}{u}=-\frac{2}{3}\left[\ln(1+e)+\ln 2\right]+\frac{2}{3}\left[\ln u\right]_1^e$$

$$t-1=u\Rightarrow dt=du\Rightarrow\begin{cases} t=1+e\Rightarrow u=e \\ t=2\Rightarrow t=2-1=1\end{cases}$$

$$I=\frac{2}{3}\ln\frac{2}{1+e}+\frac{2}{3}(\ln e-\ln 1)=\frac{2}{3}\ln\frac{2}{1+e}+\frac{2}{3}(\ln e-0)=\frac{2}{3}\left[\ln 2-\ln(1+e)+\ln e\right]=\frac{2}{3}\ln\frac{2e}{1+e}=\ln\sqrt[3]{\left(\frac{2e}{1+e}\right)^2}$$

b) Si f(x) es integrable en [a , b], la función $F(t)=\int_0^t f(x)\,dx$ con $t\in[a\,,b]$, recibe el nombre de función integral

Si f(x) es continua en [a , b], entonces la función integral es derivable y cumple que:

$$F'(t)=f(t),\ \forall t\in[a\,,b]$$

$$\textit{Sabiendo que } F(0)=\int_0^0\frac{2}{3+3e^t}\,dt=0\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=\frac{F(0)}{0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\textit{Utilizando L'Hopital}}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3+3e^x}=\frac{2}{3+3e^0}=\frac{2}{3+3\cdot 1}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$