OPCIÓN A

1.- a) Estudia, basado en los valores de m, el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$

b) ¿Coincide A con su inversa para cualquier valor de m?

c) Determina una matriz simétrica de orden 2 de tal manera que $X\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ y el determinante de la matriz
3X es **-9**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1-m^2 & 3-3m \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1-m^2 & 3-3m \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1-m^2=(1-m)(1+m)\Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow(1-m)(1+m)=0\Rightarrow\begin{cases}1-m=0\Rightarrow m=1\\1+m=0\Rightarrow m=-1\end{cases}\Rightarrow\forall m\in\Re-\{-1,1\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3\Rightarrow$$

$Si\ m=-1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=2$$

$Si\ m=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=2$$

$b)$

$$Como\ |A|\neq 0\Rightarrow\forall m\in\Re-\{-1,1\}\Rightarrow No\ hay\ inversa\ de\ A\ en\begin{cases}m=1\\m=-1\end{cases},\ siendo\ la\ respuesta\ NO$$

c) La matriz X , que es simétrica, tiene que ser una matriz cuadrada de orden 2 para que se pueda multiplicar

$$\begin{cases}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a+b\\b+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+b=3\\b+c=5\end{cases}\\|3X|=-9\Rightarrow\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3b & 3c \end{vmatrix}=-9\Rightarrow 9ac-9b^2=-9\Rightarrow 9\left(ac-b^2\right)=-9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3-b\\c=5-b\end{cases}\Rightarrow$$

$$(3-b)(5-b)-b^2=-1\Rightarrow 15-3b-5b+b^2-b^2=-1\Rightarrow -8b=-16\Rightarrow b=2\Rightarrow\begin{cases}a=3-2=1\\c=5-2=3\end{cases}\Rightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. a) Calcular el punto simétrico del punto **P(-2 , 0 , 2)**, respecto al plano $\pi : 3x + 2y + z - 3 = 0$

b) Sea **r** una recta perpendicular al plano $\pi : 3x + 2y + z - 3 = 0$ y que pasa por el punto **P(-2 , 0 , 2)**,

Considere la recta: $s : \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x - z - 10 = 0 \end{cases}$.

Estudia la posición relativa de **r** y **s**. Calcular la ecuación del plano paralelo a **s** que contiene **r**.

a) Hallaremos una recta **r** perpendicular al plano, y por ello su vector director es el del plano π y que pase por el punto **P**.
Una vez hallada **r** calcularemos el punto **Q** de intersección, de ella, con el plano π, este punto es el punto medio entre P y su simétrico P'

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (3\,,\,2\,,\,1) \Rightarrow r : \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 3\cdot(-2 + 3\lambda) + 2\cdot 2\lambda + (2 + \lambda) - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$-6 + 9\lambda + 4\lambda + 2 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow 14\lambda - 7 = 0 \Rightarrow 14\lambda = 7 \Rightarrow \lambda = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \Rightarrow Q \begin{cases} x = -2 + 3\cdot\frac{1}{2} \\ y = 2\cdot\frac{1}{2} \\ z = 2 + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$Q\left(-\frac{1}{2}\,,\,1\,,\,\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = \frac{-2 + x_{P'}}{2} \Rightarrow -2 + x_{P'} = -1 \Rightarrow x_{P'} = 1 \\ 1 = \frac{0 + y_{P'}}{2} \Rightarrow y_{P'} = 2 \\ \frac{5}{2} = \frac{2 + z_{P'}}{2} \Rightarrow 5 = 2 + z_{P'} \Rightarrow z_{P'} = 3 \end{cases} \Rightarrow Q(1\,,\,2\,,\,3)$$

b) Para ello analizaremos si las rectas, de las que calcularemos sus ecuaciones paramétricas, tienen un punto común, si el sistema que resulta de igualar sus coordenadas es compatible determinado son secantes y se cortan en un punto, si es compatible indeterminado las rectas coinciden. Para hallar la compatibilidad es condición necesaria que el determinante de la matriz de los coeficientes ampliada sea nula.
Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (3\,,\,2\,,\,1) \Rightarrow r : \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \\ x = 10 + z \Rightarrow 2\cdot(10 + z) - y - 3z = 0 \Rightarrow 20 + 2z - y - 3z = 0 \Rightarrow y = 20 - z \Rightarrow s : \begin{cases} x = 10 + \mu \\ y = 20 - \mu \\ z = \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2 + 3\lambda = 10 + \mu \\ 2\lambda = 20 - \mu \\ 2 + \lambda = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda - \mu = 12 \\ 2\lambda + \mu = 20 \\ \lambda - \mu = -2 \end{cases} \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 \\ 2 & 1 & 20 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 20 - 24 - 12 + 60 - 4 = -6 \neq 0$$

$$rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Incompatible \Rightarrow No\ hay\ punto\ o\ puntos\ de\ \text{int}er\sec ción$$

Continuación del Problema 2 de la opción A

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (3\,,2\,,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1\,,-1\,,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{1} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow No\ son\ paralelas$$

La recta **r** y **s** se cruzan en el espacio

Para hallar el plano α paralelo a la recta s y que contiene a la recta r, consideramos los vectores directores de ambas rectas y el vector RG, en donde R es un punto cualquiera de la recta r (tomamos la indicada en su ecuación que es el punto P) y G el punto genérico del plano. Los tres vectores son coplanarios, y debido a ello el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación buscada del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (3\,,2\,,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1\,,-1\,,1) \\ \overrightarrow{RG} = \overrightarrow{PG} = (x\,,y\,,z) - (-2\,,0\,,2) = (x+2\,,y\,,z-2) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y & z-2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2\,(x+2) + y - 3\,(z-2) - 2\,(z-2) + (x+2) - 3y = 0 \Rightarrow 3\,(x+2) - 2y - 5\,(z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha \equiv 3x - 2y - 5z + 16 = 0$$

3.- a) Define función continua en un punto. ¿Qué tipo de discontinuidad tiene $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$ en los puntos **x = 0** y **x = 2**?

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$ en su punto de inflexión.

a)

Una función es **continua en el punto x = x_0** si verifica las siguientes condiciones:

. Existe f(x_0), es decir, la función está definida en x = x_0

. Existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

. Los dos valores anteriores coinciden, esto es, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$f(0) = \frac{0^2-4}{0^2-2\cdot 0} = \frac{-4}{0} \Rightarrow No\ existe\ función \Rightarrow Discontinuidad\ en\ x = 0$$

$$f(2) = \frac{2^2-4}{2^2-2\cdot 2} = \frac{4-4}{4-4} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indeterminación \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2\cdot x} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\cdot x} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x} = \frac{2+2}{2} = 2 \Rightarrow$$

$$Discontinuidad\ evitable\ en\ x = 2\ en\ donde\ f(2) = 2$$

b)

$$f'(x) = 6x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 12x - 12 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 12 = 0 \Rightarrow 12x = 12 \Rightarrow x = 1$$

$$\begin{cases} f(1) = 2\cdot 1^3 - 6\cdot 1^2 + 1 = 2 - 6 + 1 = -3 \\ f'(1) = 6\cdot 1^2 - 12\cdot 1 = 6 - 12 = -6 \end{cases} \Rightarrow y - (-3) = -6\cdot(x-1) \Rightarrow y + 3 = -6x + 6 \Rightarrow y = -6x + 3$$

$$6x + y - 3 = 0$$

4.- a) Calcula el $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x-1)}{x^2-\sqrt{x}}$ (Nota: ***ln*** = logaritmo neperiano)

b) Calcula $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x-1)}{x^2-\sqrt{x}}=\frac{\ln(2\cdot 1-1)}{1^2-\sqrt{1}}=\frac{\ln 1}{1-1}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2x-1}\cdot 2}{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{2x-1}}{\frac{4x\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4\sqrt{x}}{\left(4x\sqrt{x}-1\right)(2x-1)}=\frac{4\sqrt{1}}{\left(4\cdot 1\cdot\sqrt{1}-1\right)(2\cdot 1-1)}=\frac{4}{(4-1)(2-1)}=\frac{4}{3\cdot 1}=\frac{4}{3}$$

b)

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx=\int_1^e \frac{dt}{t^2+3t+2}$$

$$e^x=t\Rightarrow e^x dx=dt\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow t=e^1=e\\ x=0\Rightarrow t=e^0=1\end{cases}$$

$$t^2+3t+2=0\Rightarrow\Delta=3^2-4\cdot 1\cdot 2=1\geq 0\Rightarrow t=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{-3+1}{2}=-1\\ t=\frac{-3-\sqrt{1}}{2}=-2\end{cases}$$

$$\frac{1}{t^2+3t+2}=\frac{1}{(t+2)(t+1)}=\frac{A}{t+2}+\frac{B}{t+1}=\frac{A(t+1)+B(t+2)}{(t+2)(t+1)}\Rightarrow A(t+1)+B(t+2)=1\Rightarrow$$

$$\begin{cases}Si\ t=-1\Rightarrow A(-1+1)+B(-1+2)=1\Rightarrow B=1\\ Si\ t=-2\Rightarrow A(-2+1)+B(-2+2)=1\Rightarrow -A=1\Rightarrow A=-1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{t^2+3t+2}=\frac{-1}{t+2}+\frac{1}{t+1}$$

$$\int\frac{dt}{t^2+3t+2}=\int\left(\frac{-1}{t+2}+\frac{1}{t+1}\right)dt=-\int\frac{dt}{t+2}+\int\frac{dt}{t+1}=-\int\frac{du}{u}+\int\frac{dv}{v}=-\ln u+\ln v=\ln\frac{v}{u}=\ln\frac{t+1}{t+2}+K$$

$$\begin{cases}t+2=u\Rightarrow dt=du\\ t+1=v\Rightarrow dt=dv\end{cases}$$

$$\int_1^e\frac{dt}{t^2+3t+2}=\left[\ln\frac{t+1}{t+2}\right]_1^e=\ln\frac{e+1}{e+2}-\ln\frac{1+1}{1+2}=\ln\frac{e+1}{e+2}-\ln\frac{2}{3}=\ln\frac{\frac{e+1}{e+2}}{\frac{2}{3}}=\ln\frac{3(e+1)}{2(e+2)}$$

OPCIÓN B

1.- a) Discutir, según los valores del parámetro **m**, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = m + 9 \\ mx + 3y - z = 0 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

b) Resolver, si es posible, el sistema anterior para el caso **m = -9.**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ m & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -7 \\ m+9 & 0 & 14 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot \begin{vmatrix} 0 & -7 \\ m+9 & 14 \end{vmatrix} = 7\,(m+9) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 7\,(m+9) = 0 \Rightarrow$$

$$m + 9 = 0 \Rightarrow m = -9$$

$$\forall m \in \Re - \{-9\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ m = -9$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -9 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$$Si\ m = -9 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow z = 0 \Rightarrow 3x - y - 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow 3x - y = 0 \Rightarrow y = 3x \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (\lambda\ ,\ 3\lambda\ ,\ 0)$$

2.- a) Establecer el producto vectorial de dos vectores. Dados los vectores $\vec{u} = (2\ ,\ 2\ ,\ 0)\ y\ \vec{v} = (1\ ,1\ ,-1)$ calcula los vectores unitarios y perpendicular a los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$;.

b) Calcule el valor de **a** para que la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$ no corte al plano $\pi : 5x + ay + 4z = 5$ Para este valor de **a** calcula la distancia de la línea al plano.

a) Dado los vectores $\vec{u} = (u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3)\ y\ \vec{v} = (v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3)$, llamamos producto vectorial de $\vec{u}\ por\ \vec{v}$, y lo expresamos por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ o $\vec{u} \times \vec{v}$, al vector:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} , - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

El vector resultante del producto vectorial de dos vectores es perpendicular a ellos

El módulo del producto vectorial dedos vectores es igual al área del paralelogramo definido por dos representantes de estos vectores que tengan el mismo origen

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\ \vec{i} + 2\ \vec{k} - 2\ \vec{k} + 2\ \vec{j} = -2\ \vec{i} + 2\ \vec{j} \Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = (-2\ ,\ 2\ ,\ 0) \equiv (1\ ,\ -1\ ,\ 0) \Rightarrow$$

$$\left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2} \Rightarrow Vector\ unitario \Rightarrow \left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0 \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 0 \right)$$

b) La recta tiene que ser paralela al plano y, por ello, el producto escalar de sus vectores directores, que son perpendiculares, es nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\ ,\ 6\ ,\ -4) \equiv (1\ ,\ 3\ ,\ -2) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (5\ ,\ a\ ,\ 4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = 0 \Rightarrow (1\ ,\ 3\ ,\ -2) \cdot (5\ ,\ a\ ,\ 4) = 0 \Rightarrow 5 + 3a - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$3a - 3 = 0 \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1$$

Hallaremos la distancia de un punto **R** cualquiera de la recta (tomaremos el indicado en su ecuación) al plano

$$Siendo \Rightarrow \begin{cases} R(0\ ,\ 2\ ,\ 2) \\ \pi : 5x + y + 4z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$d(r\ ,\ \pi) = d(R\ ,\ \pi) = \frac{|5 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{|10 - 5|}{\sqrt{42}} = \frac{5}{\sqrt{42}} = \frac{5\sqrt{42}}{42}\ u$$

3.- a) Teniendo en cuenta la función $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-1}$ calcula los valores de **a**, **b** y **c** sabiendo que $x=\dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical y que **y = 5x - 6** es la línea tangente en su gráfico en el punto correspondiente a **x = 1**. Para los valores de **a**, **b** y **c,** calcula, si **f(x)** posee más asíntotas?
b) Enuncia el teorema del valor medio del cálculo diferencial.¿ Se puede aplicar, en el intervalo [0 , 1] este teorema a la función $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$?. Si es así, calcular el punto a que se refiere el teorema.

$a)$

$$cx-1=0\Rightarrow cx=1\Rightarrow x=\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\Rightarrow c=2$$

$$f'(x)=\frac{a\,(2x-1)-2\,(ax+b)}{(2x-1)^2}=\frac{2ax-a-2\,ax-2b}{(2x-1)^2}=\frac{-a-2b}{(2x-1)^2}$$

$$\begin{cases}\begin{cases}f(1)=5\cdot 1-6=-1\\ f(1)=\dfrac{a\cdot 1+b}{2\cdot 1-1}\end{cases}\Rightarrow a+b=-1\\ f'(1)=5\Rightarrow \dfrac{-a-2b}{(2\cdot 1-1)^2}=5\Rightarrow -a-2b=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=-1\\ -a-2b=5\end{cases}\Rightarrow -b=4\Rightarrow b=-4\Rightarrow a-4=-1\Rightarrow$$

$$a=3\Rightarrow f(x)=\frac{3x-4}{2x-1}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-4}{2x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{x}{x}-\frac{4}{x}}{2\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{3-\frac{4}{\infty}}{2-\frac{1}{\infty}}=\frac{3-0}{2-0}=\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$\textit{Existe asíntota horizontal},\ y=\frac{3}{2}\ \textit{cuando}\ x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-4}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\,(-x)-4}{2\,(-x)-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x-4}{-2x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3\frac{x}{x}-\frac{4}{x}}{-2\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3-\frac{4}{x}}{-2-\frac{1}{x}}=\frac{-3-\frac{4}{\infty}}{-2-\frac{1}{\infty}}=\frac{-3-0}{-2-0}=\frac{3}{2}$$

$$\textit{Existe asíntota horizontal},\ y=\frac{3}{2}\ \textit{cuando}\ x\to-\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x-4}{2x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-4}{2x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{2\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{\infty}-\frac{4}{\infty}}{2-\frac{1}{\infty}}=\frac{0-0}{2-0}=0\Rightarrow$$

No existe asíntota oblicua, cuando $x\to\infty$ y cuando $x\to-\infty$

Continuación del Problema 3 de la opción A

b) **Teorema del valor medio o de Lagrange**

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ ,b)$ tal que: $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Geométricamente, como **f'(c)** es la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**

$$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \in [0\ ,1] \Rightarrow Es\ continua\ en\ [0\ ,1]\ y\ derivable\ en\ (0\ ,1)$$

$$\begin{cases} f(0) = \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2} \\ f(1) = \dfrac{1}{2-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow Como\ \ f'(x) = \frac{1}{(2-x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Rightarrow \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1-0} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(2-x)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (2-x)^2 = 2 \Rightarrow 4 - 4x + x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow (x-4)\,x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0\ ,1] \\ x = 4 \notin [0\ ,1] \end{cases}$$

4.- Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola **f(x) = - x²** y la recta normal a la gráfica de **f(x)** en el punto correspondiente a **x = 1**. (Nota: Para el dibujo de las gráficas indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y la concavidad o convexidad)

Ecuación de la recta normal

$$f'(x) = -2x \Rightarrow \begin{cases} f(1) = -1^2 = -1 \\ m = -\dfrac{1}{f'(1)} = -\dfrac{1}{-2\cdot 1} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y - (-1) = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow 2y + 2 = x - 1 \Rightarrow 2y = x - 3 \Rightarrow$$

$$y = \frac{x-3}{2}$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ -2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0^2 = 0 \\ y(0) = -2\cdot 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

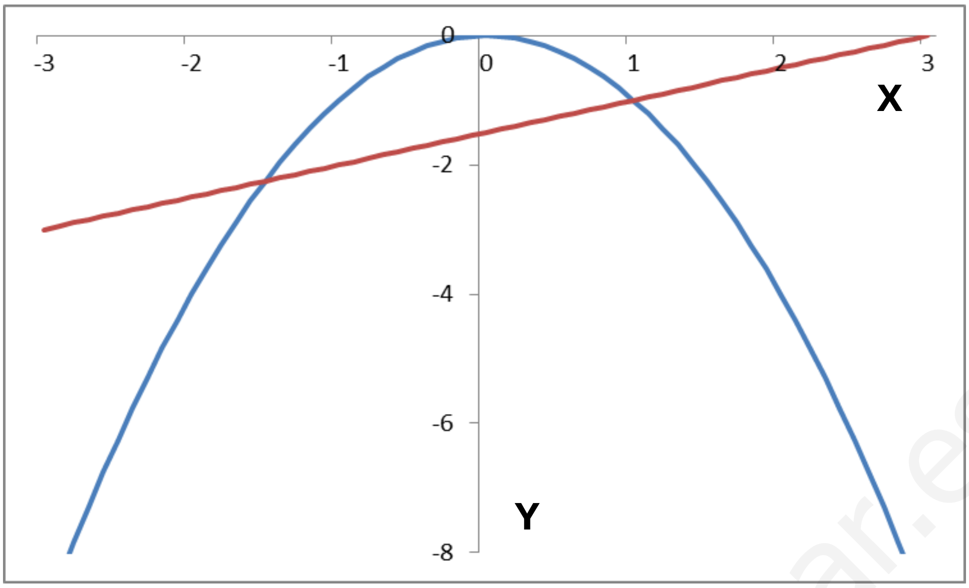
$$Vertice\ de\ la\ parábola \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow \begin{cases} Máximo \\ Convexa \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases} \Rightarrow$$

$$Vértice \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow Máximo\ relativo$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow -x^2 = \frac{x-3}{2} \Rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4\cdot 2\cdot(-3) = 25 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2\cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+5}{4} = 1 \\ x = \dfrac{-1-5}{4} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Continuación del problema 4 de la opción A



$$A=\left|\int_{-\frac{3}{2}}^{1}\left(\frac{x-3}{2}\right)dx\right|-\left|\int_{-\frac{3}{2}}^{1}\left(-x^2\right)dx\right|=-\frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{2}}^{1}(x-3)\,dx-\int_{-\frac{3}{2}}^{1}x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{2}}^{1}(3-x)\,dx-\int_{-\frac{3}{2}}^{1}x^2\,dx$$

$$A=\frac{3}{2}\cdot[x]_{-\frac{3}{2}}^{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-\frac{3}{2}}^{1}-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-\frac{3}{2}}^{1}=\frac{3}{2}\cdot\left[1-\left(-\frac{3}{2}\right)\right]-\frac{1}{4}\cdot\left[1^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]-\frac{1}{3}\cdot\left[1^3-\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right].$$

$$A=\frac{3}{2}\cdot\left(1+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{9}{4}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{27}{8}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)-\frac{1}{3}\cdot\frac{35}{8}=\frac{15}{4}+\frac{5}{16}-\frac{35}{24}$$

$$A=\frac{15}{4}+\frac{5}{16}-\frac{35}{24}=\frac{180+15-70}{48}=\frac{125}{48}u^2$$