

**OPCIÓN A**

1. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , sean  $B^t$  la matriz traspuesta de  $B$  e  $I$  la matriz identidad de orden 3.

a) Estudia, según los valores del parámetro  $\lambda$ , el rango de  $AB^t + \lambda I$ .

b) Calcula la matriz  $X$  que verifica:  $AB^t X - X = 2B$

a)

$$AB^t + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ 1) + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$AB^t + \lambda I = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|AB^t + \lambda I| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1) \cdot [\lambda(\lambda+1) - \lambda] = (\lambda+1) \cdot (\lambda^2 + \lambda - \lambda)$$

$$|AB^t + \lambda I| = \lambda^2(\lambda+1) \Rightarrow |AB^t + \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \\ \lambda+1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall \lambda \in \mathfrak{R} - \{-1, 0\} \Rightarrow |AB^t + \lambda I| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(AB^t + \lambda I) = 3$$

Si  $\lambda = -1$

$$AB^t - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(AB^t + \lambda I) = 2$$

Si  $\lambda = 0$

$$AB^t + 0 \cdot I = AB^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(AB^t + \lambda I) = 1$$

b)

$$(AB^t - I)X = 2B \Rightarrow (AB^t - I)X = 2B \Rightarrow (AB^t - I)^{-1}(AB^t - I)X = (AB^t - I)^{-1}2B \Rightarrow X = (AB^t - I)^{-1}2B$$

$$AB^t - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |AB^t - I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$(AB^t - I)^{-1} = \frac{1}{|AB^t - I|} \cdot \text{adj}[(AB^t - I)^t] \Rightarrow (AB^t - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}[(AB^t - I)^t] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB^t - I)^{-1} = \frac{1}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Dados el plano  $\pi: x + y - z - 1 = 0$  y la recta  $r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de  $r$  y  $\pi$ . Calcula la distancia de  $r$  a  $\pi$ .

b) Calcula la ecuación general o implícita del plano que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$ .

a) Si el sistema de ecuaciones formado por el plano dado  $\pi$  y los dos planos que determinan la recta  $r$  es compatible determinado se cortan en un punto, si es compatible indeterminado la recta está contenida en el plano y, finalmente, si es incompatible la recta y el plano son paralelos. Solo en este último caso la distancia será distinta de cero, y en este caso, hallaremos la distancia desde un punto cualquiera de la recta  $R$  (tomaremos el indicado en la ecuación) al plano  $\pi$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + y + z = 6 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

No es compatible determinado  $\Rightarrow$  No se cortan en un punto

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow$$

Sistema Incompatible  $\Rightarrow$  El plano  $\pi$  y la recta son paralelas

$$\begin{cases} 3x + y + z = 6 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow 3x + 2 - 2x + z = 6 \Rightarrow z = 4 - x \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R(0, 2, 4) \\ \vec{v}_r = (1, -2, -1) \end{cases}$$

$$d(r, \pi) = d(R, \pi) = \frac{|0 + 2 - 4 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ u}$$

b) El plano  $\alpha$ , queda determinado por el vector director del plano  $\pi$ , ya que siendo perpendicular a él, genera al plano pedido, el vector de la recta  $r$  y por el vector  $\overrightarrow{RG}$ , siendo  $G$  el punto generador del plano buscado, estos tres vectores son coplanarios y el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación del plano que nos piden

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, 1, -1) \\ \vec{v}_r = (1, -2, -1) \\ \overrightarrow{RG} = (x, y, z) - (0, 2, 4) = (x, y - 2, z - 4) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x & y - 2 & z - 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-x - (y - 2) - 2(z - 4) - (z - 4) - 2x + (y - 2) = 0 \Rightarrow -3x - 3(z - 4) = 0 \Rightarrow \alpha \equiv x + z - 4 = 0$$

3.- a) Enuncia el teorema de Bolzano. Probar que a función  $f(x) = x^3 + 2x - 2$  corta el eje OX en algún punto del intervalo  $[0, 1]$ . ¿Tiene esta ecuación más de una solución real?

b) Calcula los valores de  $a$  y  $b$  para que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - e^{2x}}{\text{sen}(x^2)} = 1$

a) **Teorema de Bolzano**

Si  $f(x)$  es continua en el intervalo  $[a, b]$ , y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo

$[\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f(b)]$ , entonces existe, al menos, un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$

La función  $f(x) = x^3 + 2x - 2$  es continua en el intervalo  $[0, 1]$ , y sus valores en los extremos del intervalo son:

$$\begin{cases} f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 - 2 = -2 < 0 \\ f(1) = 1^3 + 1 \cdot 2 - 2 = 3 - 2 = 1 > 0 \end{cases} \text{ de distinto signo } [\text{sign } f(0) \neq \text{sign } f(1)], \text{ entonces existe, al menos, un}$$

punto  $c \in (0, 1)$  tal que  $f(c) = 0$  que es el punto de corte con OX

Veamos si es una solución única, supongamos que existe otro punto  $d \in (0, 1)$  en donde  $f(d) = 0$ , según el

**Teorema de Rolle:** "Sea  $f(x)$  una función continua en  $[c, d]$ , derivable en  $(c, d)$  y que verifica que

$f(c) = f(d) = 0$ ; entonces existe, al menos, un punto  $p \in (c, d)$  tal que  $f'(p) = 0$

Derivemos la función

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(p) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{2}{3}}$$

que no tiene solución, por lo tanto no hay otro punto, en el intervalo  $[c, d]$  que pertenece al intervalo  $[0, 1]$ , que corte al eje OX

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - e^{2x}}{\text{sen}(x^2)} &= \frac{a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + 1 - e^{2 \cdot 0}}{\text{sen}(0^2)} = \frac{0 + 0 + 1 - e^0}{\text{sen}(0)} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + b - 2e^{2x}}{2x \cos(x^2)} = \frac{2a \cdot 0 + b - 2e^{2 \cdot 0}}{2 \cdot 0 \cdot \cos(0^2)} = \frac{0 + b - 2e^0}{0 \cdot \cos(0)} = \frac{b - 2 \cdot 1}{0 \cdot 1} = \frac{b - 2}{0} (\text{será } b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + 2 - 2e^{2x}}{2x \cos(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + 1 - e^{2x}}{x \cos(x^2)} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - 2e^{2x}}{\cos(x^2) - x^2 \text{sen}(x^2)} = \\ &= \frac{a - 2e^{2 \cdot 0}}{\cos(0^2) - 0^2 \text{sen}(0^2)} = \frac{a - 2e^0}{\cos(0) - 0 \cdot \text{sen}(0)} = \frac{a - 2}{1 - 0 \cdot 0} = \frac{a - 2}{1} = \frac{a - 2}{1} \Rightarrow \frac{a - 2}{1} = 1 \Rightarrow a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \end{aligned}$$

Solución  $\Rightarrow (a, b) = (3, 2)$

4. a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad de la función  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ .  
 b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$  y la bisectriz del primer cuadrante. (Nota: para el dibujo de la gráfica de  $f(x)$ , es suficiente utilizar el apartado anterior y calcular los puntos de corte con los ejes).

a)

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 \Rightarrow$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 64 - 48 = 16 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8+4}{6} = 2 \\ x = \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 > 0 \Rightarrow (x-2)\left(x - \frac{2}{3}\right) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x - \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

$\infty$	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$2$
$x > \frac{2}{3}$	(-)	(+)	(+)
$x > 2$	(-)	(-)	(+)
<b>Solución</b>	<b>(+)</b>	<b>(-)</b>	<b>(+)</b>

**Creciente**  $\forall x \in \mathbb{R} / \left(x < \frac{2}{3}\right) \cup (x < 2)$

**Decreciente**  $\forall x \in \mathbb{R} / \frac{2}{3} < x < 2$

$$f''(x) = 6x - 8 \Rightarrow \text{Concavidad} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow 6x - 8 > 0 \Rightarrow 6x > 8 \Rightarrow x > \frac{8}{6} \Rightarrow x > \frac{4}{3}$$

**Concavidad**  $\forall x \in \mathbb{R} / x < \frac{4}{3}$

**Convexidad**  $\forall x \in \mathbb{R} / x < \frac{4}{3}$

b) La bisectriz del primer cuadrante es la función  $g(x) = x$

$$\text{Corte con los ejes} \Rightarrow \begin{cases} OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Rightarrow (x^2 - 4x + 4)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \\ x = 0 \end{cases} \\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

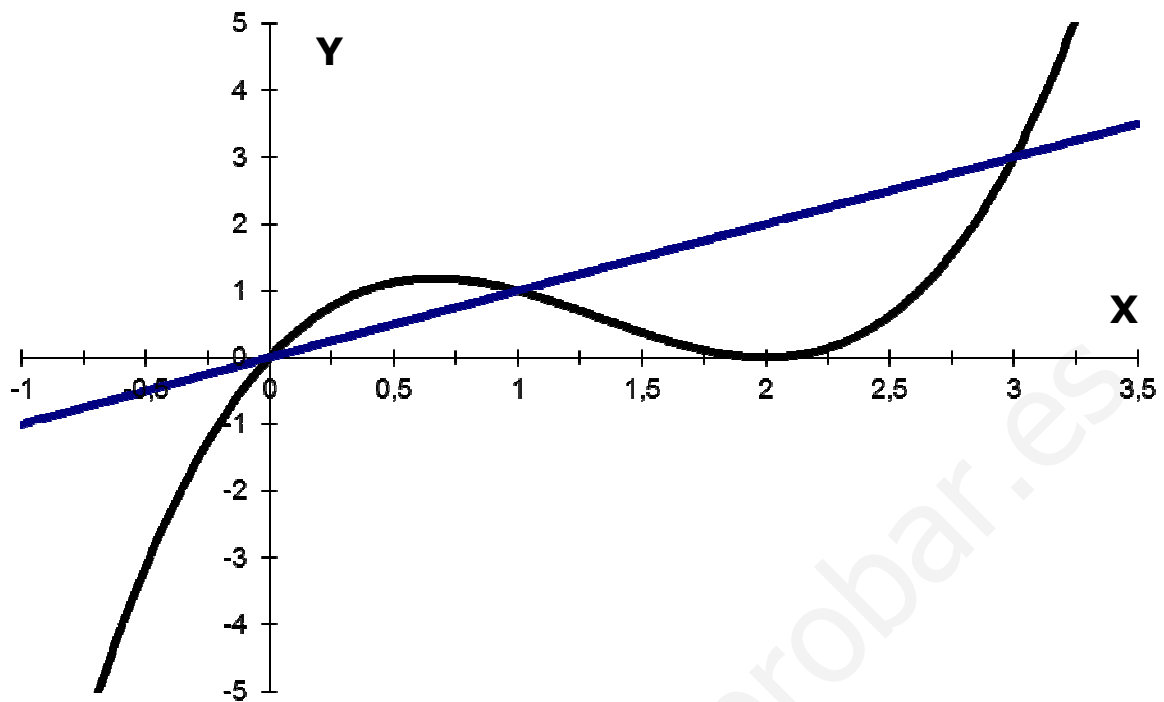
$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\text{Corte entre funciones} \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = x \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow (x^2 - 4x + 3)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4+2}{2} = 3 \\ x = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

## Continuación del Problema 4 de la Opción A

## b) Continuación



$$A = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx - \int_0^1 x dx + \int_1^3 x dx - \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx =$$

$$A = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx - \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot [x^4]_0^1 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^1 - \frac{1}{4} \cdot [x^4]_1^3 + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_1^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_1^3$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot (1^4 - 0^4) - \frac{4}{3} \cdot (1^3 - 0^3) + \frac{3}{2} \cdot (1^2 - 0^2) - \frac{1}{4} \cdot (3^4 - 1^4) + \frac{4}{3} \cdot (3^3 - 1^3) - \frac{3}{2} \cdot (3^2 - 1^2)$$

$$A = \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{80}{4} + \frac{26 \cdot 4}{3} - \frac{3 \cdot 8}{2} = \frac{3 - 16 + 18 - 240 + 416 - 144}{12} = \frac{437 - 400}{12} = \frac{37}{12} u^2$$

**OPCIÓN B**

1.- a) Discute, según los valores del parámetro  $m$ , el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + my + z = 2 \\ mx - y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

b) Resuelve, si es posible, el sistema anterior para el caso  $m = -1$

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & -1-m & 0 \\ 0 & -1-2m & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} m-1 & -(m+1) \\ 0 & -(2m+1) \end{vmatrix} = -(m-1)(2m+1) \Rightarrow$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -(m-1)(2m+1) = 0 \Rightarrow (m-1)(2m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m-1 = 0 \Rightarrow m = 1 \\ 2m+1 = 0 \Rightarrow 2m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\forall m \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número incógnitas} \Rightarrow \text{Sis. Compatible Determinado}$$

$$\text{Si } m = -\frac{1}{2}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 6 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 1 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 6 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

$$\text{Si } m = 1$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b)

$$\text{Si } m = -1 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow y = -3 \Rightarrow -2 \cdot (-3) + 2z = 2 \Rightarrow 2z = -4 \Rightarrow z = -\frac{4}{2} = -2 \Rightarrow$$

$$x - (-3) + (-2) = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (1, -3, -2)$$

2. a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta  $r$  que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano  $\pi$  determinado por los puntos  $A(1,0,2)$ ,  $B(2,1,3)$  y  $C(3,0,0)$ .  
 b) Calcula los posibles valores de  $a$  para que el punto  $P(a, a, a)$  equidiste de la recta  $r$  y del plano  $\pi$  del apartado anterior.

a) El vector director de la recta  $r$  buscada es el del plano  $\pi$ , que se halla como el producto vectorial de los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$ . Una vez determinado ese vector el punto origen de coordenadas termina de definirnos la recta pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, 1, 3) - (1, 0, 2) = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 0, 0) - (1, 0, 2) = (2, 0, -2) \equiv (1, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_\pi = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} + \vec{j}$$

$$\vec{v}_r = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = (-1, 2, -1) \equiv (1, -2, 1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 + 1 \cdot \lambda \\ y = 0 - 2 \cdot \lambda \\ z = 0 + 1 \cdot \lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) El plano  $\pi$  queda determinado por su vector director, hallado en el apartado a), y el vector  $\overrightarrow{AG}$ , donde  $G$  es el punto genérico del plano, como ambos vectores son perpendiculares su producto escalar es nulo y la ecuación del plano. Después hallaremos la distancia de  $P$  al plano.

Para hallar la distancia del punto a la recta  $r$  hallaremos un plano  $\alpha$  que lo contenga y sea perpendicular a la recta, cuyo vector director es el de la recta y la distancia entre el punto  $P$  y el punto  $Q$  intersección del plano hallado con la recta. Dichas distancias son iguales

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, -2, 1) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (1, 0, 2) = (x-1, y, z-2) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow (1, -2, 1) \cdot (x-1, y, z-2) = 0$$

$$x-1-2y+z-2=0 \Rightarrow \pi \equiv x-2y+z-3=0 \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|a-2a+a-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} u$$

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, -2, 1) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (a, a, a) = (x-a, y-a, z-a) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

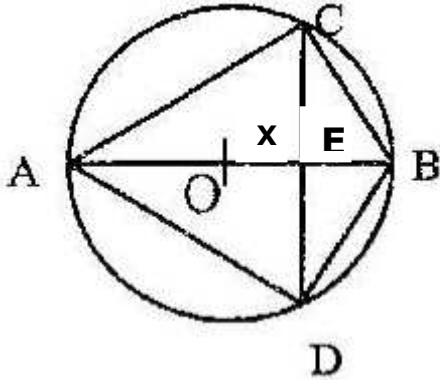
$$(1, -2, 1) \cdot (x-a, y-a, z-a) = 0 \Rightarrow x-a-2y+2a+z-a=0 \Rightarrow \alpha \equiv x-2y+z=0 \Rightarrow$$

$$\text{Punto } Q \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda - 2(-2\lambda) + \lambda = 0 \Rightarrow 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \cdot 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(a-0)^2 + (a-0)^2 + (a-0)^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\text{Como } d(P, \pi) = d(P, Q) \Rightarrow a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

3. En una circunferencia de centro  $O$  y radio  $10$  cm. se traza un diámetro  $AB$  y una cuerda  $CD$  perpendicular a ese diámetro. ¿A qué distancia del centro  $O$  de la circunferencia debe estar la cuerda  $CD$ , para que la diferencia entre las áreas de los triángulos  $ADC$  y  $BCD$  sea máxima?



Siendo  $x$  la distancia entre el centro  $O$  y la cuerda  $CD$

Sabiendo que  $ACB$  es un triángulo rectángulo, y por el teorema de la altura tenemos:

$$\frac{AE}{CE} = \frac{CE}{EB} \Rightarrow CE^2 = AE \cdot EB \Rightarrow CE^2 = (10+x) \cdot (10-x) \Rightarrow CE^2 = 10-x^2 \Rightarrow CE = \sqrt{10-x^2}$$

$$\begin{cases} Area_{ACD} = 2 \cdot Area_{ACE} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AE \cdot CE = (10+x) \sqrt{10-x^2} \\ Area_{BCD} = 2 \cdot Area_{BCE} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BE \cdot CE = (10-x) \sqrt{10-x^2} \end{cases} \Rightarrow D = (10+x) \sqrt{10-x^2} - (10-x) \sqrt{10-x^2}$$

$$D = [10+x - (10-x)] \sqrt{10-x^2} = 2x \sqrt{10-x^2} \Rightarrow D' = \frac{dD}{dx} = 2 \cdot \left[ \sqrt{10-x^2} + \frac{1}{2\sqrt{10-x^2}} \cdot (-2x) \right]$$

$$D' = 2 \cdot \left( \sqrt{10-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{10-x^2}} \right) = 2 \cdot \left( \frac{10-x^2-x^2}{\sqrt{10-x^2}} \right) = 2 \cdot \frac{10-2x^2}{\sqrt{10-x^2}} = 4 \cdot \frac{5-x^2}{\sqrt{10-x^2}} \Rightarrow$$

$$Si D' = 0 \Rightarrow 4 \cdot \frac{5-x^2}{\sqrt{10-x^2}} = 0 \Rightarrow 5-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \Rightarrow \text{No solu} \end{cases}$$

$$D'' = \frac{d^2D}{dx^2} = 4 \cdot \frac{-2x\sqrt{10-x^2} - \frac{1}{2\sqrt{10-x^2}} \cdot (-2x) \cdot (5-x^2)}{10-x^2} = 4 \cdot \frac{-2x\sqrt{10-x^2} + \frac{5x-x^3}{\sqrt{10-x^2}}}{10-x^2}$$

$$D'' = 4 \cdot \frac{-2x(10-x^2) + 5x - x^3}{(10-x^2)\sqrt{10-x^2}} = 4 \cdot \frac{-20x + 2x^3 + 5x - x^3}{(10-x^2)\sqrt{10-x^2}} = 4 \cdot \frac{x^3 - 15x}{(10-x^2)\sqrt{10-x^2}} \Rightarrow$$

$$D''(\sqrt{5}) = 4 \cdot \frac{\sqrt{5}^3 - 15\sqrt{5}}{(10-\sqrt{5}^2)\sqrt{10-\sqrt{5}^2}} = 4 \cdot \frac{5\sqrt{5} - 15\sqrt{5}}{(10-5)\sqrt{10-5}} = \frac{-40\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = -8 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

$$x = \sqrt{5} \text{ cm.}$$



4.- a) Enuncia el teorema de Rolle. Determinar el valor de  $a$  para que sea aplicable el teorema de Rolle a la función  $f(x) = x^3 + ax - 1$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Para este valor de  $a$ , calcula un punto  $c \in (0, 1)$  en el que la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  sea paralela al eje  $OX$

b) Calcula  $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} dx$

a) **Teorema de Rolle**

Sea  $f(x)$  una función continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  y que verifica que  $f(a) = f(b)$ ; entonces existe, al menos, un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$

La función estudiada es continua en  $[0, 1]$ , derivable en  $(0, 1)$  y debe de verificar que  $f(0) = f(1)$

$$\begin{cases} f(0) = 0^3 + a \cdot 0 - 1 = -1 \\ f(1) = 1^3 + a \cdot 1 - 1 = a \end{cases} \Rightarrow \text{Como } f(0) = f(1) \Rightarrow a = -1$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow 3c^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{\sqrt{3}}{3} \in (0, 1) \\ c = -\frac{\sqrt{3}}{3} \notin (0, 1) \end{cases}$$

$$\frac{x^2 + 3}{x^2 - x} = \frac{x^2 - x}{1} + \frac{x + 3}{x + 3}$$

$$\frac{x^2 + 3}{x^2 - x} = 1 + \frac{x + 3}{x^2 - x} \Rightarrow \frac{x + 3}{x^2 - x} = \frac{x + 3}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)} \Rightarrow A(x-1) + Bx = x + 3$$

$$\begin{cases} \text{Si } x = 0 \Rightarrow A(0-1) + B \cdot 0 = 0 + 3 \Rightarrow -A = 3 \Rightarrow A = -3 \\ \text{Si } x = 1 \Rightarrow A(1-1) + B \cdot 1 = 1 + 3 \Rightarrow B = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} = 1 + \frac{x + 3}{x^2 - x} = \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} = 1 + \frac{-3}{x} + \frac{4}{x-1}$$

$$I = \int \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} dx = \int \left( 1 + \frac{-3}{x} + \frac{4}{x-1} \right) dx = \int dx - 3 \int \frac{dx}{x} + 4 \int \frac{dx}{x-1} = x - 3 \ln x + 4 \int \frac{dt}{t} = x - \ln x^3 + 4 \ln t$$

$$x - 1 = t \Rightarrow dx = dt$$

$$I = \int \frac{dt}{t} = x - \ln x^3 + \ln (x-1)^4 = x + \ln \frac{(x-1)^4}{x^3} + K$$