OPCIÓN A

1.- a) Si A es una matriz tal que **A^3 + I = 0**, siendo **I** la matriz identidad y **0** la matriz nula de orden **3**, ¿Cuál es el rango de A? Calcula el determinante de **A^{30}**. Calcula **A** en el caso de que sea una matriz diagonal verificando la igualdad anterior.

b) Dada a matriz $B=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, calcula una matriz X tal que **BXB – B = B^{-1}**

a)

$$A^3=-I\Rightarrow\left|A^3\right|=-1\Rightarrow|A|^3=-1\Rightarrow|A|=\sqrt[3]{-1}=-1\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3$$

$$\left|A^{30}\right|=|A|^{30}=(-1)^{30}=1$$

$$Sea\ A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & 0 & 0\\ 0 & b^2 & 0\\ 0 & 0 & c^2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}a^2 & 0 & 0\\ 0 & b^2 & 0\\ 0 & 0 & c^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3 & 0 & 0\\ 0 & b^3 & 0\\ 0 & 0 & c^3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^3=-I\Rightarrow\begin{pmatrix}a^3 & 0 & 0\\ 0 & b^3 & 0\\ 0 & 0 & c^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a^3=-1\Rightarrow a=\sqrt[3]{-1}=-1\\ b^3=-1\Rightarrow b=\sqrt[3]{-1}=-1\\ c^3=-1\Rightarrow c=\sqrt[3]{-1}=-1\end{cases}$$

$b)$

$$B^{-1}(BXB-B)=B^{-1}B^{-1}\Rightarrow B^{-1}BXB-B^{-1}B=\left(B^{-1}\right)^2\Rightarrow IXB-I=\left(B^{-1}\right)^2\Rightarrow XB=\left(B^{-1}\right)^2+I\Rightarrow$$

$$XBB^{-1}=\left(B^{-1}\right)^2B^{-1}+IB^{-1}\Rightarrow XI=\left(B^{-1}\right)^3+B^{-1}\Rightarrow X=\left(B^{-1}\right)^3+B^{-1}$$

$$B=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow|B|=-1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\neq 0\Rightarrow Existe\ B^{-1}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot\left(adj\ B^t\right)\Rightarrow$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ B^t=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}\cdot\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left(B^{-1}\right)^2=B^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -4 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left(B^{-1}\right)^3=\left(B^{-1}\right)^2B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -4 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 12 & -16\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$X=\left(B^{-1}\right)^3+B^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 12 & -16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 7\\ 14 & -18\end{pmatrix}$$

2.- a) Dado el plano $\pi:\begin{cases} x = 2-\lambda+\mu \\ y=\lambda \\ z=\lambda+\mu \end{cases}$, calcula la ecuación de la recta **r** que pasa por el punto **P(1 , -2 , 1)** y es perpendicular a **π**. Calcula el punto de intersección de **r** y **π**.

b) ¿Están alineados los puntos **A(2 , 0 , 3)**, **B(0 , 0 , 1)** y **C(2 , 1 , 5)**?. Si non están alineados, calcula la distancia entre el plano que determinan estos tres puntos y el plano π del apartado a)

a) El vector director de la recta **r** es el vector director del plano, que se hallara como producto vectorial de los vectores que lo definen, el punto P acabara con la determinación de la recta **r**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1}=(-1,1,1) \\ \overrightarrow{v_2}=(1,0,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{v_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}+\vec{j}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}\Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}=(1,2,-1)\Rightarrow$$

Tendre

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_\pi}=(1,2,-1) \\ P(1,-2,1) \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2+2\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$$

mos que hallar la ecuación general del plano π y verificar los infinitos puntos genéricos de la recta en ella para buscar el parámetro que nos dará el punto **P** de corte entre la recta **r** y el plano π

Para hallar la ecuación general tendremos en cuenta el vector director hallado que es perpendicular al vector **QG**, siendo **Q** el punto indicado en la ecuación paramétrica y **G** el punto genérico del plano, y por lo tanto su producto escalar es nulo y la ecuación buscada

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=(1,2,-1) \\ \overrightarrow{QG}=(x,y,z)-(2,0,0)=(x-2,y,z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{QG}\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{QG}=0\Rightarrow(1,2,-1)\cdot(x-2,y,z)=0\Rightarrow$$

$$x-2+2y-z=0\Rightarrow \pi: x+2y-z-2=0$$

$$Sustituyendo\ r\Rightarrow(1+\lambda)+2(-2+2\lambda)-(1-\lambda)-2=0\Rightarrow 1+\lambda-4+4\lambda-1+\lambda-2=0\Rightarrow 6\lambda-6=0\Rightarrow$$

$$6\lambda=6\Rightarrow\lambda=1\Rightarrow\begin{cases} x=1+1=2 \\ y=-2+2\cdot 1\Rightarrow P(2,0,0) \\ z=1-1 \end{cases}$$

b) De estar alineados los puntos los vectores **AB** y **AC** son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0,0,1)-(2,0,3)=(-2,0,-2)\equiv(1,0,1) \\ \overrightarrow{AC}=(2,1,5)-(2,0,3)=(0,1,2) \end{cases}\Rightarrow\frac{1}{0}\neq\frac{0}{1}\Rightarrow No\ están\ alineados$$

Para poder hallar una distancia entre planos estos tienen que ser paralelos, y sus vectores directores iguales o proporcionales, y de cumplirse es el valor de la diferencia entre sus valores numéricos y el modulo del vector director

El plano α queda determinado por los vectores **AB**, **AC** y **AG**, siendo G el punto genérico del plano, Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **AG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(1,0,1) \\ \overrightarrow{AC}=(0,1,2) \\ \overrightarrow{AG}=(x,y,z)-(2,0,3)=(x-2,y,z-3) \end{cases}\Rightarrow\alpha\equiv\begin{vmatrix} x-2 & y & z-3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow(z-3)-(x-2)-2y=0$$

$$z-3-x+2-2y\Rightarrow\alpha\equiv x+2y-z+1=0$$

Continuación del Problema 2 de la Opción A

$$\begin{cases} \pi \equiv x+2y-z-2=0 \\ \alpha \equiv x+2y-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow Evidentemente,\ son\ paralelos \Rightarrow d(\pi\ ,\ \alpha)=\frac{|1-(-2)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|3|}{\sqrt{6}}$$

$$d(\pi\ ,\ \alpha)=\frac{3\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

3.- a) Enuncia el teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que la gráfica de la función $f(x)=3\ sen\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(x^2\right)$ corta el eje OX en algún punto del intervalo **[0 , π]**? Razona la respuesta.

b) Descompón el número 40 en dos sumandos tales que el producto del cubo de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. ¿Canto vale ese producto?

a) **<u>Teorema de Bolzano</u>**

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b]**, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que **f(c) = 0**

La función $f(x)=3\ sen\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(x^2\right)$ es continua en el intervalo **[0 , π]** y toma los valores en los extremos del intervalo

$$\begin{cases} f(0)=3\ sen\left(\frac{0}{2}\right)-\cos\left(0^2\right)=3\ sen\ (0)-\cos\ (0)=3\cdot 0-1=-1<0 \\ f(x)=3\ sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\pi^2\right)=3\cdot 1-\cos\left(\pi^2\right)=3-0{,}9852004=\text{-}2{,}0147996>0 \end{cases}$$

que tienen distinto signo por lo tanto **[sign f(0) $\neq$ sign f(π)]**,entonces existe, al menos, un punto $c\in(0\ ,\ \pi)$ tal que **f(c) = 0** que nos determina el punto de corte con el eje **OX**

b)Sea los números **A** y **B**

$$\begin{cases} 40=A+B\Rightarrow B=40-A \\ P=A^3B^2 \end{cases} \Rightarrow P=A^3(40-A)^2=A^3\left(1600-80A+A^2\right)=1600A^3-80A^4+A^5$$

$$\Rightarrow P'=\frac{dP}{dA}=4800A^2-320A^3+5A^4=5A^2\left(A^2-64A+960\right)\Rightarrow P'=0\Rightarrow$$

$$5A^2\left(A^2-64A+960\right)=0\Rightarrow\begin{cases} A^2=0\Rightarrow A=0 \\ A^2-64A+960=0\Rightarrow\Delta=(-64)^2-4\cdot 1\cdot 960=256\geq 0\Rightarrow A=\frac{64\pm\sqrt{256}}{2\cdot 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=0 \\ A=\frac{64\pm 16}{2}\Rightarrow\begin{cases} A=\frac{64+16}{2}=40 \\ A=\frac{64-16}{2}=24 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow P''=\frac{d^2P}{dA^2}=9600A-960A^2+20A^3\Rightarrow$$

Continuación del Problema 3 de la Opción A

$$\begin{cases} P''(0) = 9600 \cdot 0 - 960 \cdot 0^2 + 20 \cdot 0^3 = 0 \Rightarrow \\ P''(40) = 9600 \cdot 40 - 960 \cdot 40^2 + 20 \cdot 40^3 = 384000 - 1536000 + 1280000 = 128000 > 0 \Rightarrow \textit{Mínimo} \\ P''(24) = 9600 \cdot 24 - 960 \cdot 24^2 + 20 \cdot 24^3 = 230400 - 552960 + 276480 = -46080 \Rightarrow \textit{Máximo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 24 \\ B = 40 - 24 = 16 \end{cases} \Rightarrow P = 24^3 \cdot 16^2 = 3538944$$

4.- a) Calcula los valores de **a**, **b**, **c** sabiendo que **y = ax^2 + bx + 1** e **y = x^3 + c**, tienen la misma recta tangente en el punto **(1 , 2)**.

b) Enuncia la regla de Barrow. Calcula $\int_1^e \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) dx$. (Nota ln = logaritmo neperiano).

$a)$

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + c \\ g(x) = x^3 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 2ax + b \\ g'(x) = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \Rightarrow a + b + c = 2 \\ g(1) = 2 \Rightarrow 1^3 + c = 2 \Rightarrow 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1 \\ f'(1) = g'(1) \Rightarrow 2a \cdot 1 + b = 3 \cdot 1^2 \Rightarrow 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + b + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1 \\ -2a - b = -3 \end{cases} \Rightarrow -a = -2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2 + b = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow \begin{matrix} f(x) = 2x^2 - x + 1 \\ g(x) = x^3 + 1 \end{matrix}$$

b) **<u>Regla de Barrow</u>**

Sea f(x) una función continua en [a , b], y sea F(x) uns primitiva de f(x) en [a , b]; entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + K = x(\ln x - 1) + K$$

$$\textit{Por partes} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = u \Rightarrow \dfrac{dx}{x} \\ dx = dv \Rightarrow v = \int dx = x \end{cases}$$

$$\int_1^e \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) dx = \int_1^e \frac{dx}{x} - \int_1^e \ln x\, dx = [\ln x]_1^e - [x(\ln x - 1)]_1^e = (\ln e - \ln 1) - [e(\ln e - 1) - 1(\ln 1 - 1)]$$

$$\int_1^e \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) dx = (1 - 0) - [e(1 - 1) - 1(0 - 1)] = 1 - [0 - (-1)] = 1 - 1 = 0$$

OPCIÓN B

1.- a) Discute, según los valores del parámetro **m**, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+my+3z=1 \\ x+2y+mz=m \\ x+4y+3z=1 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, en el caso **m = 4**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & m-4 & 0 \\ 0 & -2 & m-3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} m-4 & 0 \\ -2 & m-3 \end{vmatrix}=(m-4)(m-3)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow(m-4)(m-3)=0$$

$$\begin{cases} m-4=0\Rightarrow m=4 \\ m-3=0\Rightarrow m=3 \end{cases}$$

$$\forall m\in\Re-\{3\ ,\ 4\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ m=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3\Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ m=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$Si\ m=4\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow -2y+z=3\Rightarrow z=3+2y\Rightarrow x+4y+3(3+2y)=1\Rightarrow x+4y+9+6y=1\Rightarrow$$

$$x=-8-10y\Rightarrow Solución\Rightarrow(x\ ,\ y\ ,\ z)=(-8-10\lambda\ ,\ \lambda\ ,\ 3+2\lambda)$$

2.- a) Estudia la posición relativa de la recta $r:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$ y la recta **s** que pasa por los puntos **P(0 , 2 , 1)** y **Q(1 , 1 , 1)**. Calcula a distancia de **r** a **s**.
b) Calcula la ecuación general del plano π que es paralelo a la recta **r** y contiene a la recta **s**

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, si el sistema que resulta es compatible determinado son secantes, si es compatible indeterminado las rectas coinciden
Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\left\{\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \\ \overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{PQ}=(1\,,1\,,1)-(0\,,2\,,1)=(1\,,-1\,,0)\Rightarrow s:\begin{cases} x=\mu \\ y=2-\mu \\ z=1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} 1+\lambda=\mu \\ 1+2\lambda=2-\mu\Rightarrow 1+1=\mu\Rightarrow \mu=2\Rightarrow \\ \lambda=1 \end{cases}$$

$$1+2\cdot 1=2-2\Rightarrow 3\neq 0\Rightarrow Sistema\ Incompatible\Rightarrow Ni\ son\ coincidentes\ ni\ se\ cortan\ en\ un\ punto$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1\,,2\,,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(1\,,-1\,,0) \end{cases}\Rightarrow \frac{1}{1}\neq\frac{2}{-1}\Rightarrow No\ son\ rectas\ paralelas\Rightarrow Son\ rectas\ que\ se\ cruzan\ en\ el\ espacio$$

Para hallar la distancia de **r** a **s** hallaremos un plano π que contenga a **s** y sea paralelo a **r** (con ello contestaremos la pregunta b)), que se determina por los dos vectores directores de las rectas r y s y por el vector **SG**, siendo **S** un punto cualquiera de la recta s (tomaremos el indicado en su ecuación) y **G** el punto genérico del plano, estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **SG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano.
Obtenido el plano π hallaremos la distancia entre un punto **R** cualquiera de la recta **r** (tomaremos el indicado en su ecuación) y el plano, que es la distancia entre r y s pedida.

$$Siendo\ S(0\,,2\,,1)\Rightarrow\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1\,,2\,,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(1\,,-1\,,0) \\ \overrightarrow{SG}=(x\,,y\,,z)-(0\,,2\,,1)=(x\,,y-2\,,z-1) \end{cases}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$(y-2)-(z-1)-2\,(z-1)+x=0\Rightarrow x+(y-2)-3\,(z-1)\Rightarrow \pi\equiv x+y-3z+1=0$$

$$Siendo\ R(1\,,1\,,0)\Rightarrow d(r\,,\pi)=d(r\,,s)=\frac{|1+1-3\cdot 0+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{|3|}{\sqrt{11}}=\frac{3\sqrt{11}}{11}\ u$$

3.- a) Calcula los extremos relativos de la función **f(x) = x^4 – 8x^2 + 1**. Calcula también el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo **[-3 , 3]**
b) Calcula los valores de **a** y **b** para que la función **f(x) = ax^2 + bx ln x** tenga un punto de inflexión en el punto **(1 , 2)** . Para estos valores de **a** y **b**, calcula el dominio y los intervalos de concavidad y convexidad de **f(x)**. (Nota ln = logaritmo neperiano).

$a)$

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x\left(x^2 - 4\right) = 4x\,(x-2)(x+2) \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x > 0 \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \end{cases}$$

	$-\infty$ a -2	-2 a 0	0 a 2	2 a ∞
4 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > -2	**(-)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > 0	**(-)**	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 2	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Decreciente $\forall x \in \Re / (x < -2) \cup (0 < x < 2)$
Creciente $\forall x \in \Re / (-2 < x < 0) \cup (x > 2)$

Mínimo relativo en $x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^2 + 1 = 16 - 32 + 1 = -15$ de decrecimiento pasa a crecimiento
Máximo relativo en $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 + 1 = 1$ de crecimiento pasa a decrecimiento
Mínimo relativo en $x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + 1 = 16 - 32 + 1 = -15$ de decrecimiento pasa a crecimiento

$$\begin{cases} f(-3) = (-3)^4 - 8 \cdot (-3)^2 + 1 = 81 - 72 + 1 = 10 \\ f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 + 1 = 81 - 72 + 1 = 10 \end{cases}$$

Máximo absoluto en $\begin{cases} x = -3 \Rightarrow f(-3) = 10 \\ x = 3 \Rightarrow f(3) = 10 \end{cases}$

Mínimo absoluto en $\begin{cases} x = -2 \Rightarrow f(-2) = -15 \\ x = 2 \Rightarrow f(2) = -15 \end{cases}$

$b)$

$$f'(x) = 2ax + b\left(\ln x + \frac{1}{x}x\right) = 2ax + b\,(\ln x + 1) \Rightarrow f''(x) = 2a + b \cdot \frac{1}{x} = 2a + \frac{b}{x}$$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 \cdot \ln 1 = 2 \Rightarrow a + b \cdot 0 = 2 \Rightarrow a = 2 \\ f''(1) = 0 \Rightarrow 2a + \frac{b}{1} = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2 + b = 0 \Rightarrow b = -4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x \cdot \ln x$$

$$x > 0 \Rightarrow Dom(f) = \forall x \in \Re > 0$$

Continuación del Problema 3 de la Opción B

$$f''(x)=2\cdot 2-\frac{4}{x}=\frac{4x-4}{x}=\frac{4\,(x-1)}{x}\Rightarrow Concavidad \Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow \frac{4\,(x-1)}{x}>0\Rightarrow \begin{cases}4>0\Rightarrow \forall x\in\Re\\ x-1>0\Rightarrow x>1\\ x>0\end{cases}$$

0 1 ∞

4 > 0	**(+)**	**(+)**
x > 0	**(+)**	**(+)**
x > 1	**(-)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**

Concavidad $\forall x\in\Re\,/\,x>1$ **Convexidad** $\forall x\in\Re\,/\,0<x<1$

4.- a) Define primitiva e integral indefinida de una función.
b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola **f(x) = - 3x^2 + 3** y la recta y = -9. (Nota: para el dibujo de las gráficas, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y la concavidad o convexidad).

a)
Definición de función primitiva

Dadas dos funciones **f(x)** y **F(x)**, definidas en un intervalo **I = [a , b]**, diremos que **F(x)** es una **función primitiva** de **f(x)** si la derivada de **F(x)** es la función **f(x)** en el intervalo **I**

$$F(x)\,es\;primitiva\;de\;f(x)\,en\;I\Leftrightarrow F'(x)=f(x),\;\forall x\in I$$

Definición de integral indefinida

Sea **F(x)** una primitiva de la función **f(x)** en el intervalo **I = [a , b]**; llamamos **integral indefinida** de **f(x)** al conjunto de todas sus primitivas **F(x) + C**, siendo **C** un valor constante y lo representamos por:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

$b)$

$$Puntos\;de\;corte\;de\;la\;parabola\;con\Rightarrow\begin{cases}OX\Rightarrow y=0\Rightarrow -3\,(x^2-1)=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow\\ OY\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=-3\,(0^2-1)=3\end{cases}$$

$$f'(x)=-6x\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow -6x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow f''(x)=-6<0\Rightarrow Máximo$$

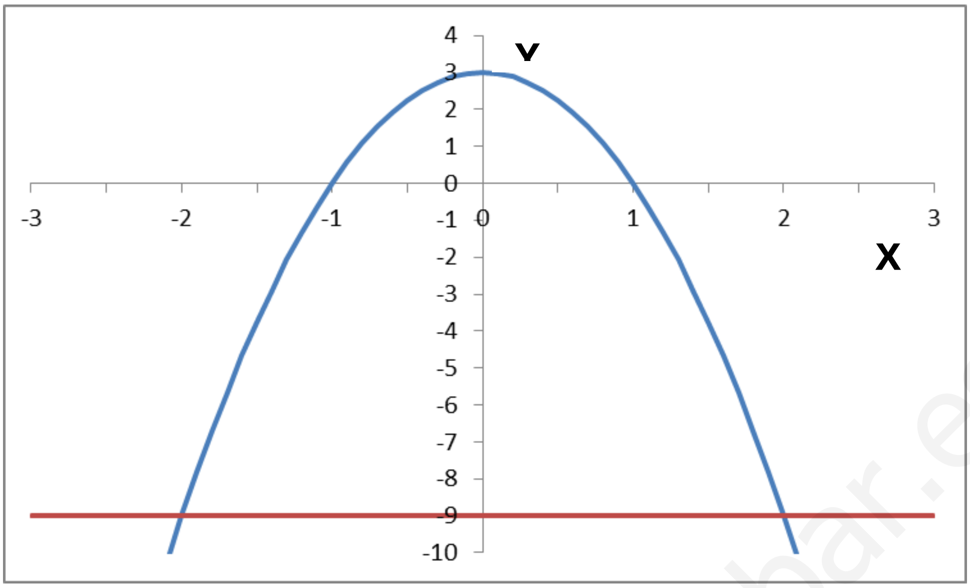
$$Máximo\;relativo\;y\;vertice\;en\;x=0\Rightarrow f(0)=3$$

$$Puntos\;de\;corte\;entre\;funciones\Rightarrow -3x^2+3=-9\Rightarrow -3x^2+12=0\Rightarrow -3\,(x^2-4)=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=-2\\ x=2\end{cases}\Rightarrow f(-x)=-3\,(-x)^2+3=-3x^2+3=f(x)\Rightarrow Simetricas\;respecto\;a\;OY$$

Continuación del Problema 4 de la Opción B

b) Continuación



$$A = 2\left|\int_0^2 (-9)\,dx\right| - 2\left|\int_0^2 \left(-3x^2+3\right)dx\right| = -2\int_0^2 (-9)\,dx + 2\int_0^2 \left(-3x^2+3\right)dx = 2\int_0^2 \left(-3x^2+3+9\right)dx$$

$$A = 2\int_0^2 \left(-3x^2+12\right)dx = 2\cdot\frac{1}{3}(-3)\cdot\left[x^3\right]_0^2 + 2\cdot 12\cdot\left[x\right]_0^2 = -2\cdot\left(2^3-0^3\right) + 24\cdot(2-0) = -16+48 = 32\ u^2$$