Bloque 1 (Algebra Lineal) (*Puntuación máxima 3 puntos*)

Opción 1.- a) Estudia, segundo los valores de ***m*** el rango da matriz $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & m & m+2\\ m & 8 & 12\end{pmatrix}$

b) Resolver la ecuación matricial ***A*²*X* = *B***, siendo, $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$

a) Para que exista la inversa de una matriz su determinante no debe de ser nulo

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & m & m+2\\ m & 8 & 12\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & m-4 & m-4\\ 0 & 8-2m & 12-3m\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}m-4 & m-4\\ 2(4-m) & 3(4-m)\end{vmatrix}=$$

$$|M|=3(4-m)(m-4)-2(4-m)(m-4)=-3(m-4)^2+2(m-4)^2=-(m-4)^2\Rightarrow$$

$$Si\ |M|=0\Rightarrow-(m-4)^2=0\Rightarrow m-4=0\Rightarrow m=4$$

$$\forall m\in\Re-\{4\}\Rightarrow|M|\neq0\Rightarrow rang\ (M)=3$$

$$Si\ m=4$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 4 & 8 & 12\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (M)=3$$

$b)$

$$A^{-2}A^2X=A^{-2}B\Rightarrow IX==A^{-2}B\Rightarrow X=\left(A^2\right)^{-1}B$$

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\left|A^2\right|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}=2+2=4\neq0\Rightarrow Existe\ \left(A^2\right)^{-1}\Rightarrow$$

$$\left(A^2\right)^{-1}=\frac{1}{\left|A^2\right|}\left[adj\ \left(A^2\right)^t\right]\Rightarrow\left(A^2\right)^t=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\left(A^2\right)^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$X=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Opción 2.- a) Discute, según los valores del parámetro **m**, el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = m \end{cases}$$

b) Resuelve, si es posible, el sistema anterior en el caso **m = 0**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow No\ \ puede\ ser\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & m \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & m \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{array}\right) \Rightarrow m = 0 \Rightarrow m = -1$$

$\forall m \in \Re - \{0\} \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$

$Cuando\ m = 0 \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ de\ incognitas \Rightarrow$
$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$b)$

$Si\ m = 0 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow y - 3z = 0 \Rightarrow y = 3z \Rightarrow x - 3z + z = 0 \Rightarrow x = 2z$$

$Solución\ (x\ ,\ y\ ,\ z) = (2\lambda\ ,\ 3\lambda\ ,\ \lambda)$

Bloque 2 (Geometría) (*Puntuación máxima 3 puntos*)

Opción 1.-

Dado los planos π_1 : ***x + y + z - 1 = 0***; π_2 : ***y - z + 2 = 0***; y la recta $r: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$

a) Calcula el ángulo que forman π_1 y π_2. Calcula el ángulo que forman π_1 y *r*.

b) Estudia la posición relativa de la recta ***r*** y la recta intersección de los planos π_1 e π_2.

a) El coseno del ángulo que forman los planos es igual al producto escalar de los vectores directores de ambos entre el producto de sus módulos.
El seno del ángulo que forman el plano π_1 y la recta **r** es igual al producto escalar de los vectores directores de ambos entre el producto de sus módulos.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (0,1,-1) \end{cases} \Rightarrow \cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{\left|\overrightarrow{v_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{v_{\pi_2}}\right|}{\left|\overrightarrow{v_{\pi_1}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{\pi_2}}\right|} = \frac{|(1,1,1)\cdot(0,1,-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|0+1-1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow$$

$$\acute{a}ngulo\,(\pi_1, \pi_2) = arc\cos 0 = 90^o = \frac{\pi}{2}\ rad$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (-2,1,1) \end{cases} \Rightarrow sen\,(\pi_1, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_{\pi_1}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{|(1,1,1)\cdot(-2,1,1)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}} = \frac{|-2+1+1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \frac{0}{3\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\acute{a}ngulo\,(\pi_1, r) = arc\ sen\ 0 = 0^o = 0\ rad$$

En este último caso habrá que ver si la recta pertenece al plano ya que si no formarían ese ángulo los vectores directores de la recta y el plano, para saberlo veremos si cualquier punto **R** de la recta pertenece al plano (tomaremos el indicado en su ecuación

$$R(0,-1,1) \Rightarrow 0 + (-1) + 1 - 1 = 0 \Rightarrow -1 \neq 0 \Rightarrow No\ pertenece\ al\ plano$$

El ángulo es el que forman los vectores directores, ya que la recta y el plano son paralelos

b) Analizaremos si las rectas **r** y **s** tienen un punto común, si el sistema que resulta es compatible determinado son secantes, si es compatible indeterminado las rectas coinciden.
Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio.

$$r: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1} \begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \\ x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 - 2y \Rightarrow z = y + 2 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1-2\mu \\ y = \mu \\ z = 2+\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda = -1-2\mu \\ -1+\lambda = \mu \\ 1+\lambda = 2+\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda - 2\mu = 1 \\ \lambda - \mu = 1 \\ \lambda - \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda - 2\mu = 1 \\ -2\lambda + 2\mu = -2 \end{cases} \Rightarrow 0 \neq -1 \Rightarrow Sistema\ Incompatible \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-2,1,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-2,1,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_s}$$

Son rectas paralelas

Opción 2.- a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2 , 3 , 5) y es perpendicular al plano

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 2 + 3\lambda + \mu \end{cases}$$

b) Calcula la distancia del punto P(2 , 3 , 5) al plano π. Calcula el punto de π que está más próximo al punto P(2 , 3 , 5).

a) El vector director de la recta **r** pedida es el vector director del plano al ser perpendicular a él, y quedara totalmente definida por contener el punto **P**
Hallaremos el vector director del plano calculando el producto vectorial de los dos vectores directores que lo determinan

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = (2\,,\,2\,,\,3) \\ \overrightarrow{v_2} = (0\,,1\,,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{k} - 3\vec{i} - 2\vec{j} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} = (-1\,,-2\,,\,2) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,\,2\,,-2) \Rightarrow r : x - 2 = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{-2}$$

b) Hallaremos la ecuación del plano π, utilizando, conjuntamente, el vector director el del plano hallado en el apartado a) que es perpendicular al vector **PG**, siendo **P** un punto cualquiera del plano (tomaremos el indicado en la ecuación paramétrica) y **G** el punto genérico del mismo, y por ello, su producto escalar es nulo y la ecuación pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,\,2\,,-2) \\ \overrightarrow{PG} = (x\,,\,y\,,\,z) - (-1\,,\,2\,,\,2) = (x+1\,,\,y-2\,,\,z-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{PG} \Rightarrow$$

$$(1\,,\,2\,,-2)\cdot(x+1\,,\,y-2\,,\,z-2) = 0 \Rightarrow x + 1 + 2y - 4 - 2z + 4 = 0 \Rightarrow \pi : x + 2y - 2z + 1 = 0$$ Para

$$d(P\,,\,\pi) = \frac{|2 + 2\cdot 3 - 2\cdot 5 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}\,u$$

conocer el punto del plano π más cercano a **P**, que es el punto Q de intersección de la recta r perpendicular, hallada en el apartado a), y el plano π

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \Rightarrow \text{Punto de intersección} \Rightarrow (2+\lambda) - 2\cdot(3+2\lambda) + 2\cdot(5-2\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

$$2 + \lambda - 6 - 4\lambda + 10 - 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow -7\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 2 + 1 \\ y = 3 + 2\cdot 1 \Rightarrow Q(3\,,5\,,3) \\ z = 5 - 2\cdot 1 \end{cases}$$

Bloque 3 (Análisis) (*Puntuación máxima 4 puntos*)

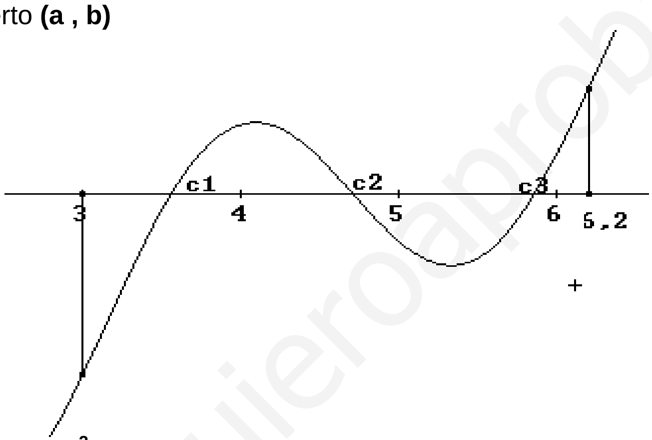
Opción 1.- a) Enuncia e interpreta geométricamente el teorema de Bolzano. Dada la función **$f(x) = e^x + 3x \ln(1 + x^2)$**, justifica si podemos asegurar que a su gráfica corta al eje OX en algún punto del intervalo **[-1 , 0]**.

b) Calcula los valores de ***a*** y ***b*** para que la función $f(x)=\begin{cases} ax+b & si \quad x\le 0 \\ sen\,(2x)+1 & si \quad x>0 \end{cases}$ sea continua y derivable en ***x* = 0**.

c) Calcula el área del recinto limitado por el eje **OX** y la parábola $y=\dfrac{x^2}{4}-x$

a) **<u>Teorema de Bolzano</u>**
Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que
f(c) = 0

Es decir: si una función es continua en un intervalo cerrado y acotado **[a, b],** y los valores en los extremos del intervalo tienen signos distintos, entonces podemos asegurar la existencia de al menos una raíz de la función en el intervalo abierto **(a , b)**



La función **$f(x) = e^x + 3x \ln(1 + x^2)$** es continua en el intervalo **[-1 , 0],** y toma valores en los extremos del intervalo:

$$\begin{cases} f(-1)=e^{-1}+3\cdot(-1)\cdot\ln\left[1+(-1)^2\right]=\dfrac{1}{e}-3\cdot\ln 2<0 \\ f(0)=e^0+3\cdot 0\cdot\ln\left(1+0^2\right)=1+0=1>0 \end{cases}$$

de distinto signo **[sign f(-1) $\neq$ sign f(0)]**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(-1\ ,0)$ tal que **f(c) = 0**

$b)$

$$\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=a\cdot 0+b=b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=sen\,(2\cdot 0)+1=0+1=1 \end{cases} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow b=1$$

$$f'(x)=\begin{cases} a & si \quad x<0 \\ 2\cos(2x) & si \quad x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f`'(x)=a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=2\cos(2\cdot 0)=2\cdot 1=2 \end{cases} \Rightarrow a=2$$

Continuación de la Opción 1 del Bloque 3

$c)$

$$Puntos\ de\ corte\ de\ la\ \ función\ con\ OX\ \Rightarrow y=0 \Rightarrow \frac{x^2-4x}{4}=0 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow (x-4)\,x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

$$x=2 \in (0\,,\,4) \Rightarrow y=\frac{2^2}{4}-2=1-2=-1<0$$

$$A=\left|\int_0^4 \left(\frac{x^2}{4}-x\right)dx\right| = \int_0^4 \left(x-\frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^4 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^4 = \frac{1}{2}\cdot\left(4^2-0^2\right)-\frac{1}{12}\cdot\left(4^3-0^3\right)=\frac{16}{2}-\frac{64}{12}$$

$$A=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}\,u^2$$

Opción 2.-

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de ***f(x) = (1 + x²) e⁻ˣ*** en el punto de abscisa ***x* = 0**.

b) Calcula el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

c) Enuncia e interpreta geométricamente el teorema del valor medio del cálculo integral

$a)$

$$f'(x)=2x\,e^{-x}-\left(1+x^2\right)e^{-x}=\left(-x^2+2x-1\right)e^{-x}=-\left(x^2-2x+1\right)e^{-x}$$

$$\begin{cases} f'(0)=\left(1+0^2\right)e^{-0}=1 \\ m=f'(0)=-\left(0^2-2\cdot 0+1\right)e^{-0}=-1 \end{cases} \Rightarrow y-1=(-1)\,(x-0) \Rightarrow y-1=-x \Rightarrow y=-x+1 \Rightarrow x+y-1=0$$

$b)$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y(1)=\dfrac{1^2}{1^2-1}=\dfrac{1}{0} \Rightarrow No\ tiene\ solución \\ x=-1 \Rightarrow y(-1)=\dfrac{(-1)^2}{(-1)^2-1}=\dfrac{1}{0} \Rightarrow No\ tiene\ solución \end{cases}$$

$$Dom\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)=\forall x \in \Re-\{-1\,,\,1\}$$

Asíntotas verticales

$$x=-1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{(-1)^2}{\left(-1^-\right)^2-1}=\dfrac{1}{0^+}=\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{(-1)^2}{\left(-1^+\right)^2-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \end{cases} \qquad x=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{(-1)^2}{\left(1^-\right)^2-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{(-1)^2}{\left(1^+\right)^2-1}=\dfrac{1}{0^+}=\infty \end{cases}$$

Continuación de la Opción 2 del Bloque 3

b) Continuación

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{1-0}=1$$

Existe asíntota horizontal, $y=1$, *cuando* $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2x}=1$$

Existe asíntota horizontal, $y=1$, *cuando* $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3-x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{3x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{6x}=\frac{1}{3\cdot\infty}=0\Rightarrow \textit{No existe asíntota oblicua cuando } x\to-\infty$$

$$y'=\frac{2x\left(x^2-1\right)-2x\cdot x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}=-2\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}\Rightarrow \textit{Creciente}\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$$

$$-2\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}>0\Rightarrow\begin{cases}-2<0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x>0\\ \left(x^2-1\right)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

-2 < 0	**(-)**	**(-)**
x > 0	**(-)**	**(+)**
$(x^2 - 1) > 0$	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**

Creciente $\forall x\in\Re/x<0$

Decreciente $\forall x\in\Re/x>0$

Mínimo relativo en $x=0\Rightarrow y(0)=\frac{0^2}{0^2-1}=\frac{0}{-1}=0$ De decreciente pasa a creciente

c)

Teorema del valor medio del calculo integral

Si f(x) es una función en [a , b] entonces existe un punto $c \in (a\ ,\ b)$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

La interpretación geométrica de este teorema es que el área encerrada por la gráfica de **f(x)** y las rectas **x = a** y **x = b** es igual al área del rectángulo *abde* cuya base es **b – a**, es decir, la amplitud del intervalo, y cuya altura es **f(c)**