OPCIÓN A

1.- a) Dada la matriz, $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

a) Si **I** es la matriz identidad de orden **3**, calcula los valores de λ para los que $A+\lambda I$ no tiene inversa.
Calcula, si existe, la matriz inversa de **A – 2I**
b) Calcula la matriz **X** tal que **XA + A^t = 2X**, siendo **A^t** la matriz traspuesta de **A**.

a) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$A+\lambda I=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1+\lambda & 0\\ 0 & 1 & -1+\lambda\end{pmatrix}$$

$$|A+\lambda I|=\begin{vmatrix}-1+\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1+\lambda & 0\\ 0 & 1 & -1+\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)\Rightarrow Si\ |A+\lambda I|=0\Rightarrow(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-1\\ \lambda=1\end{cases}$$

$$\forall\lambda\in\Re-\{-1,1\}\Rightarrow|A+\lambda I|\neq 0\Rightarrow Existe\ (A+\lambda I)^{-1}$$

$$Si\ \lambda=-2\Rightarrow|A-2I|=(-2-1)^2(-2+1)=(-3)^2\cdot(-1)=-9\neq 0\Rightarrow Existe\ (A-2I)^{-1}\Rightarrow$$

$$(A-2I)^{-1}=\frac{1}{|A-2I|}\left[adj\ (A-2I)^t\right]\Rightarrow A-2I=\begin{pmatrix}-1-2 & 1 & 0\\ 0 & 1-2 & 0\\ 0 & 1 & -1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$(A-2I)^t=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ (A-2I)^t=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow(A-2I)^{-1}=\frac{1}{(-9)}\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$b)$

$$XA-2X=-A^t\Rightarrow X(A-2I)=-A^t\Rightarrow X(A-2I)(A-2I)^{-1}=-A^t(A-2I)^{-1}\Rightarrow XI=-A^t(A-2I)^{-1}\Rightarrow$$

$$X=-A^t(A-2I)^{-1}\Rightarrow X=-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{(-9)}\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -3 & 0\\ 3 & 15 & 3\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

2.- Sea **r** la recta que pasa por el punto **P(1 , -1 , -2)** y es perpendicular al plano $\alpha : x+2y+3z+6=0$.
Sea **s** la recta que pasa por los puntos **A(1 , 0 , 0)** y **B(-1 , -3 , -4)**.
a) Estudia la posición relativa de las rectas **r** y **s**. Si se cortan, calcula el punto de corte.
b) Calcula la distancia del punto A(1 , 0 , 0) al plano que pasa por el punto P(1 , -1 , -2) y es paralelo a α

a) El vector director de la recta **r** es el mismo que el del plano ya que, ambos, son perpendiculares a él, el punto **P** termina la definición de la recta
El vector director de la recta **s** es el vector **AB**, siendo uno cualquiera de los puntos dados (tomaremos A) el punto que define a la recta.
Una vez halladas las rectas analizaremos si tienen un punto común, si el sistema que resulta es compatible determinado son secantes, si es compatible indeterminado las rectas coinciden
Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_\alpha}=(1,2,3) \\ P(1,-1,-2) \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=-2+3\lambda \end{cases} \\ \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{AB}=(-1,-3,-4)-(1,0,0)=(-2,-3,-4)\equiv(2,3,4) \\ A(1,0,0) \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} x=1+2\mu \\ y=3\mu \\ z=4\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\lambda=1+2\mu \\ -1+2\lambda=3\mu \\ -2+3\lambda=4\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda-2\mu=0 \\ 2\lambda-3\mu=1 \\ 3\lambda-4\mu=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -6-6+4+8=0 \Rightarrow Compatible \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$rang(A)=rang(A/B)=2=\text{Número de incognitas} \Rightarrow \text{Compatible Determinado} \Rightarrow$$
$$\text{Son rectas que se cortan en un punto (secantes)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mu=1 \Rightarrow \lambda-2\cdot 1=0 \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow \text{Punto de corte} \Rightarrow Q\begin{cases} x=1+2 \\ y=-1+2\cdot 2 \\ z=-2+3\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow Q(3,3,4)$$

b) Si el plano π es paralelo al plano α, tendrá como ecuación $x+2y+3z+D=0$ y contendrá al punto P
$$1+2\cdot(-1)+3\cdot(-2)+D=0 \Rightarrow 1-2-6+D=0 \Rightarrow D=7 \Rightarrow \pi \equiv x+2y+3z+7=0 \Rightarrow$$

$$d(A,\pi)=\frac{|1+2\cdot 0+3\cdot 0+7|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{|8|}{\sqrt{14}}=\frac{8\sqrt{14}}{14}=\frac{4\sqrt{14}}{7}\ u$$

3.- Dibuja la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$, estudiando: dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad.

$$x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow f(-1)=\frac{(-1)^2+3\cdot(-1)}{(-1)+1}=\frac{1-3}{0}=-\frac{2}{0}\Rightarrow \textit{Sin solución}\Rightarrow Dom\,(f)=\forall x\in\Re-\{-1\}$$

$$\textit{Puntos de corte con}\Rightarrow\begin{cases} OX\Rightarrow y=0\Rightarrow \dfrac{x^2+3x}{x+1}=0\Rightarrow x^2+3x=0\Rightarrow (x+3)\,x=0\Rightarrow\begin{cases} x=0\Rightarrow(0\,,\,0)\\ x=-3\Rightarrow(-3\,,\,0)\end{cases}\\ OY\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=\dfrac{0^2+3\cdot 0}{0+1}=\dfrac{0}{1}=0\Rightarrow(0\,,\,0)\end{cases}$$

$$\textit{Asíntotas verticales}\Rightarrow x=-1\Rightarrow\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x)=\frac{(-1)^2+3\cdot(-1)}{(-1^-)+1}=\frac{-2}{0^-}=\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x)=\frac{(-1)^2+3\cdot(-1)}{(-1^+)+1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\textit{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{1}=\lim_{x\to\infty}(2x+3)=2\cdot\infty+3=\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x}{x+1}=\frac{\infty}{-\infty}=\xrightarrow{\textit{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{1}=\lim_{x\to\infty}(2x+3)=2\cdot(-\infty)+3=-\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+3x}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\textit{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{2x+1}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\xrightarrow{\textit{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+3x}{x+1}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\textit{Aplicando L'Hopital}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1}=2$$

Existe asíntota oblicua, $y=x+2$ *cuando* $x\to\infty$

Continuación del Problema 2 de la Opción A

Asíntotas oblicuas (Continuación)

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2+3x}{x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{2x+1}=\frac{-\infty}{-\infty}=$$

$$=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{2}=1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+3x}{x+1}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x+1}=\frac{-\infty}{-\infty}=$$

$$=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}==\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1}=2$$

Existe asíntota oblicua, $y=x+2$ *cuando* $x\to-\infty$

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+3x+2x+3-x^2-3x}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$$

$$x^2+2x+3=0\Rightarrow\Delta=2^2-4\cdot1\cdot3=4-12=-8<0\Rightarrow \textit{Sin solución}$$

$$\textit{Creciente}\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}>0\Rightarrow\begin{cases}x^2+2x+3>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\(x+1)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\forall x\in\Re\Rightarrow$$

$$\textit{Creciente}\Rightarrow\forall x\in\Re\Rightarrow \textit{No hay máximos ni mínimos relativos}$$

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x+3)}{(x+1)^4}=\frac{(2x+2)(x+1)-2\ (x^2+2x+3)}{(x+1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x-6}{(x+1)^3}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

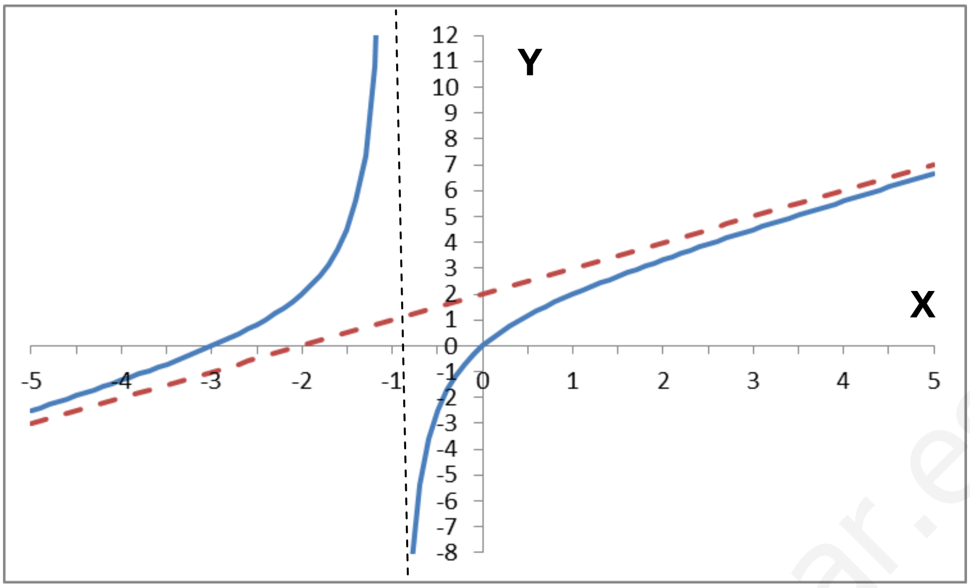
$$\textit{Concavidad}\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow\frac{-4}{(x+1)^3}>0\Rightarrow\begin{cases}-4<0\Rightarrow\forall x\in\Re\\x+1>0\Rightarrow x>-1\end{cases}$$

	$-\infty$ — **-1**	**-1** — ∞
4 < 0	**(-)**	**(-)**
x > -1	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**

Concavidad $\forall x\in\Re\,/\,x<-1$ **Convexidad** $\forall x\in\Re\,/\,x>-1$

No hay punto de inflexión porque en x = -1 no existe grafico ya que es el punto asintótico vertical

Continuación del Problema 2 de la Opción A



4.- a) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral.

Sabiendo que $\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x)$, con **f** una función continua en todos los puntos de la recta real, calcula **f(2)**

b) Calcula $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$

a) Si **f(x)** es integrable en **[a , b]** la función $F(t) = \int_a^b f(x)\,dx$ con $t \in [a\,,b]$ recibe el nombre de **función integrable** de **f(x)** en **[a , b]**, de esta definición se desprende el **<u>Teorema fundamental del cálculo integral</u>** que determina que:
Si **f(x)** es continua en **[a , b]** entonces la función integral es derivable y cumple que:

$$F'(t) = f(t)\,,\ \forall t \in [a\,,b]$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x) \Rightarrow f(x) = F'(x) = 2x\,(1+x) + x^2 \Rightarrow f(2) = 2\cdot 2\cdot(1+2) + 2^2 = 4\cdot 3 + 4 = 16$$

b)

$$\begin{array}{l|l} x^2+1 & x^2+x \\ \hline -x^2-x & 1 \\ \quad -x+1 & \end{array}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2+x} = 1 + \frac{-x+1}{x^2+x} \Rightarrow \frac{-x+1}{x^2+x} = \frac{-x+1}{(x+1)\,x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} = \frac{Ax + B(x+1)}{(x+1)\,x} \Rightarrow Ax + B(x+1) = -x+1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow A\,(-1) + B(-1+1) = -(-1)+1 \Rightarrow -A = 2 \Rightarrow A = -2 \\ \qquad x = 0 \Rightarrow A\cdot 0 + B(0+1) = -0+1 \Rightarrow B = 1 \end{cases}$$

Continuación del Problema 4 de la Opción A

b)Continuación

$$\frac{x^2+1}{x^2+x}=1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx=\int_1^2 dx-\int_1^2 \frac{2}{x+1}\,dx+\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx=[x]_1^2-2\int_2^3 \frac{dt}{t}+[\ln x]_1^2=(2-1)-2\cdot[\ln t]_2^3+(\ln 2-\ln 1)$$

$$x+1=t\Rightarrow dx=dt\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow t=2\\ x=2\Rightarrow t=3\end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx=1-2\cdot(\ln 3-\ln 2)+(\ln 2-0)=1-2\cdot\ln 3+3\cdot\ln 2=1+\ln\frac{2^3}{3^2}=1+\ln\frac{8}{9}$$

OPCIÓN B

1.- a) Discute, según los valores del parámetro **a**, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax+2y+2z=a \\ x+y+z=0 \\ 2x-y+2z=a \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, en el caso **a = 0**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2-a & 2-a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2-a & 2-a \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=-3(2-a)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow -3(2-a)=0\Rightarrow$$

$$2-a=0\Rightarrow a=2$$

$$\forall a\in\Re-\{2\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$b)$

$Si\ a=0\ nos\ encontramos\ con\ una\ ecuación\ \hom ogénea\ y\ como\ es\ Compatible\ Deter\min ado\ su$
$solución\ es\ la\ trivial\Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(0\ ,\ 0\ ,\ 0);\ veamoslo:$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow 3y=0\Rightarrow y=0\Rightarrow 0+2z=0\Rightarrow 2z=0\Rightarrow z=0\Rightarrow x+0+0=0\Rightarrow x=0$$

2.- Dada a recta $r:\begin{cases} y=1 \\ x-z+4=0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación del plano α que pasa por el punto **Q(0 , 2 , 2)** y contiene la recta ***r*** . Calcula el área del triángulo que tiene por vértices los puntos de intersección de α con los ejes de coordenadas.

b) Calcula la ecuación general del plano que contiene la recta ***r*** y es perpendicular al plano α

a) Del haz de planos generado por la recta **r** tomaremos aquel que pasa por **Q**

$$r:\begin{cases} y-1=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}\Rightarrow Haz\ de\ planos\Rightarrow x-z+4+\lambda(y-1)=0\Rightarrow$$

$$Pasando\ por\ Q\Rightarrow 0-2+4+\lambda(2-1)=0\Rightarrow 2+\lambda=0\Rightarrow \lambda=-2\Rightarrow x-z+4-2(y-1)=0\Rightarrow$$

$$\alpha\equiv x-2y-z+6=0$$

Continuación del Problema 2 de la Opción B

a) Continuación

Los puntos de intersección X, Y, Z con OX, OY y OZ son los puntos pedidos. El área del triángulo XYZ es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores XY y XZ

$$OX:\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow Punto\ de\ corte\ X \Rightarrow \lambda-2\cdot 0-0+6=0 \Rightarrow \lambda=-6 \Rightarrow X\begin{cases} x=-6 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow X(-6\,,0\,,0)$$

$$OY:\begin{cases} x=0 \\ y=\mu \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow Punto\ de\ corte\ Y \Rightarrow 0-2\mu-0+6=0 \Rightarrow \mu=3 \Rightarrow Y\begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow Y(0\,,3\,,0)$$

$$OZ:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\rho \end{cases} \Rightarrow Punto\ de\ corte\ Z \Rightarrow 0-2\cdot 0-\rho+6=0 \Rightarrow \rho=6 \Rightarrow Z\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=6 \end{cases} \Rightarrow Z\,(0\,,0\,,6)$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left|XY\wedge XZ\right| \Rightarrow \begin{cases} XY=(0\,,3\,,0)-(-6\,,0\,,0)=(6\,,3\,,0) \\ XZ=(0\,,0\,,6)-(-6\,,0\,,0)=(6\,,0\,,6) \end{cases} \Rightarrow$$

$$XY\wedge XZ=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix}=18i-18k-36j \Rightarrow \left|XY\wedge XZ\right|=\sqrt{18^2+(-18)^2+(-36)^2}=\sqrt{1944}=18\sqrt{6}$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot 18\sqrt{6}=9\sqrt{6}\ u^2$$

b) La ecuación del plano π queda determinada por el vector director del plano α , ya que es perpendicular a este plano, por el vector director de la recta **r** y por el vector **RG**, siendo **R** un punto cualquiera del plano y G el punto generador del plano, estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **RG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$r: y=1 \Rightarrow x=-4+z \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1\,,0\,,1) \\ R(-4\,,1\,,0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1\,,0\,,1) \\ \overrightarrow{v_\pi}=(1\,,1\,,-6) \\ \overrightarrow{RG}=(x\,,y\,,z)-(-4\,,1\,,0)=(x+4\,,y-1\,,z) \end{cases} \Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$(y-1)+z-(x+4)+6\,(y-1)=0 \Rightarrow (x+4)-7\,(y-1)-z=0 \Rightarrow \pi\equiv x-7y-z+11=0$$

3.- a) Define función continua en un punto. ¿Cuándo se dice que una discontinuidad es evitable?.¿Para qué valores de **k**, la función $f(x)=\frac{e^x}{x^2+k}$ es continua en todos los puntos de la recta real?

b) Determina los valores de **a**, **b**, **c** y **d** para que la función $\mathbf{g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$ tenga un máximo relativo en el punto **(0 , 4)** y un mínimo relativo en el punto **(2 , 0)**

a) Una función es **continua en el punto** $\mathbf{x = x_0}$ si, y solo si, verifica que: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Desglosando el concepto de límite podremos dar una definición de función continua equivalente:

Una función **f** es **continua en el punto** $\mathbf{x = x_0}$ si verifica las siguientes condiciones:

- Existe $f(x_0)$, es decir la función está definida en $\mathbf{x = x_0}$
- Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$
- Los dos valores anteriores coinciden $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Una función **f** tiene una **discontinuidad evitable** en un punto $\mathbf{x_0}$ cuando $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$

Existirá continuidad de la función cuando $k > 0$ ya que al ser **k** positivo se cumple:

$$x^2 + k = 0 \Rightarrow x^2 = -k \Rightarrow x = \pm\sqrt{-k} \Rightarrow Sin\ solución$$

y, por lo tanto, se cumplirá la continuidad

b)

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 4 \Rightarrow a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = 4 \Rightarrow d = 4 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow 3a\cdot 0^2 + 2b\cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f(2) = 0 \Rightarrow a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + 4 = 0 \Rightarrow 8a + 4b + 4 = 0 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 3a\cdot 2^2 + 2b\cdot 2 = 0 \Rightarrow 12a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -1 \\ -3a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-a = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2\cdot 1 + b = -1 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow f(0) = -x^3 - 3x^2 + 4$$

4.- Dibuja y calcula el área de la región limitada por la recta **x + y = 7** y la gráfica de la parábola $\mathbf{f(x) = x^2 + 5}$ (Nota: para el dibujo de las gráficas, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y la concavidad o convexidad)

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 7 - x = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow (7\ ,\ 0) \\ 0 = x^2 + 5 \Rightarrow x^2 = -5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-5} \Rightarrow No\ hay\ puntos\ de\ corte \end{cases}$$

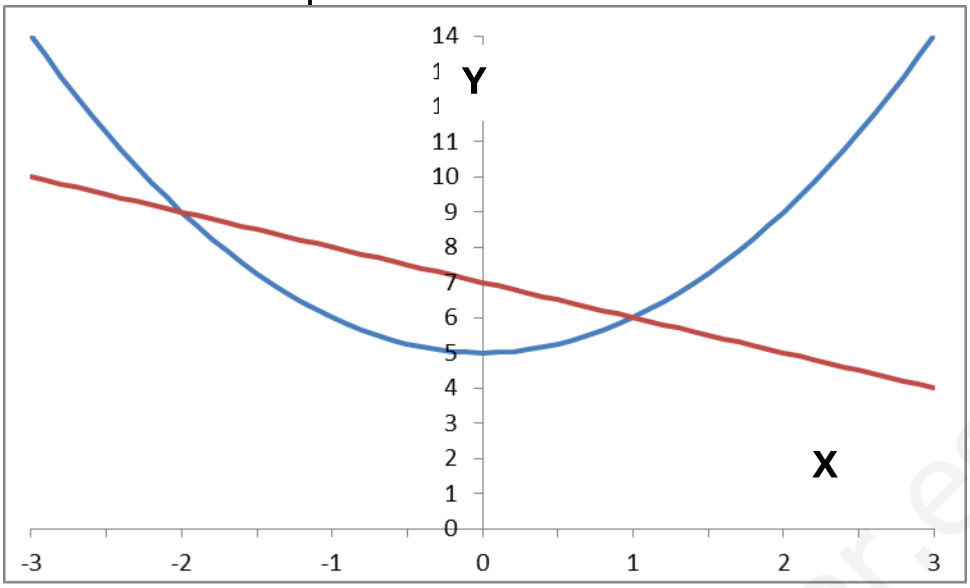
$$Puntos\ de\ corte\ con\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 7 - 0 = 7 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow (0\ ,\ 7) \\ f(0) = 0^2 + 5 = 5 \Rightarrow (0\ ,\ 5) \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Decreciente \Rightarrow \forall x \in \Re / x < 0 \\ Creciente \Rightarrow \forall x \in \Re / x > 0 \end{cases}$$

$$Vértice\ y\ Mínimo\ relativo\ en\ x = 0 \Rightarrow f(0) = 5 \Rightarrow (0\ ,\ 5)$$

$$f''(x) = 2 \Rightarrow Concava \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow Cóncava \Rightarrow \forall x \in \Re$$

Continuación del Problema 4 de la Opción B



$$Punto\ de\ corte\ entre\ \ funciones \Rightarrow x^2+5=7-x \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9\geq 0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1+3}{2}=1 \\ x=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \end{cases}$$

$$A=\int_{-2}^{1}(7-x)\,dx-\int_{-2}^{1}\left(x^2+5\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x-x^2\right)dx=2\cdot[x]_{-2}^{1}-\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-2}^{1}-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-2}^{1}=$$

$$A=2\cdot[1-(-2)]-\frac{1}{2}\cdot\left[1^2-(-2)^2\right]-\frac{1}{3}\cdot\left[1^3-(-2)^3\right]=2\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot(1-4)-\frac{1}{3}\cdot[1-(-8)]=6+\frac{3}{2}-\frac{9}{3}$$

$$A=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}\,u^2$$