

Bloque 1 (Álgebra Lineal) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.- a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, calcula los rangos de AA^t y de A^tA , siendo A^t la matriz traspuesta de A . Para el valor $a = 1$, resuelve la ecuación matricial $AA^tX = B$, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Sea M una matriz cuadrada de orden 3 con $\det(M) = -1$ y que además verifica $M^3 + M + I = 0$, siendo I la matriz unidad de orden 3. Calcula los determinantes de las matrices: $M + I$ y $3M + 3I$

a)

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & a \\ a & a^2+1 \end{pmatrix} \Rightarrow |AA^t| = \begin{vmatrix} a^2+1 & a \\ a & a^2+1 \end{vmatrix} = (a^2+1)^2 - a^2 \Rightarrow$$

$$|AA^t| = a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 = a^4 + a^2 + 1 \Rightarrow \text{Si } |AA^t| = 0 \Rightarrow a^4 + a^2 + 1 = 0 \Rightarrow \text{Haciendo } a^2 = t \Rightarrow$$

$$t^2 + t + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0 \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow |AA^t| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(AA^t) = 2$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & a & a \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^tA| = \begin{vmatrix} a^2+1 & a & a \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a^2 \begin{vmatrix} a^2+1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A^tA| = a \cdot (-a) + a^2(a^2 + 1 - a^2) = -a^2 + a^2 = 0 \Rightarrow \text{Hay que buscar un adjunto distinto de cero}$$

$$\text{adj } A_{33} = \begin{vmatrix} a^2+1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 1 - a^2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{rang}(A^tA) = 2$$

$$(AA^t)^{-1} \cdot AA^tX = (AA^t)^{-1}B \Rightarrow IX = (AA^t)^{-1}B \Rightarrow X = (AA^t)^{-1}B$$

$$\text{Si } a = 1 \Rightarrow AA^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |AA^t| = 1^2 + 1^2 + 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } (AA^t)^{-1} = \frac{1}{|AA^t|} \cdot [\text{adj}(AA^t)^t]$$

$$(AA^t)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(AA^t)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (AA^t)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$M + I = -M^3 \Rightarrow |M^3| = -(-1)^3 \Rightarrow |M + I| = 1$$

$$3(M + I) = -3M^3 \Rightarrow |-3M^3| = -3^3 \cdot (-1)^3 \Rightarrow |M + I| = 27$$

Opción 2.- a) Resuelve, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

b) Calcula el valor de m , para que al añadir al sistema anterior la ecuación: $x + 2y - z = m$ resulte un sistema compatible indeterminado.

a)

$$\begin{cases} x + y = 5 + z \\ 2x + y = 2 + 2z \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Numero de incognitas} \Rightarrow$$

$$\text{Sistema Compatible Indeterminado} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5+z \\ 2 & 1 & 2+2z \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5+z \\ 0 & -1 & 2+2z-10-2z \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$-y = -8 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow x + 8 = 5 + z \Rightarrow x = -3 + z \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (-3 + \lambda, 8, \lambda)$$

a)

$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ x + 2y - z = m \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & m \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & m-5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & m+3 \end{array} \right) \Rightarrow m+3=0 \Rightarrow m=-3$$

$$\text{Cuando } m = -3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Numero de incognitas} \Rightarrow$$

$$\text{Sistema Compatible Indeterminado} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow x + 8 - z = 5 \Rightarrow x = -3 + z \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (-3 + \lambda, 8, \lambda)$$

Bloque 2 (Geometría) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.- Sea r la recta que pasa por los puntos $P(0, 8, 3)$ y $Q(2, 8, 5)$ y s la recta

$$\begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de r y s . Si se cortan, calcula el punto de corte.

b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano que contiene a r y s

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, si el sistema que resulta es compatible determinado son secantes, si es compatible indeterminado las rectas coinciden

Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (2, 8, 5) - (0, 8, 3) = (2, 0, 2) \equiv (1, 0, 1) \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 8 \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \\ \begin{cases} x = -7 + y \\ 2z = y \Rightarrow z = \frac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right) \equiv (2, 2, 1) \Rightarrow s: \begin{cases} x = -7 + 2\mu \\ y = 2\mu \\ z = \mu \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -7 + 2\mu \\ 8 = 2\mu \Rightarrow \mu = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \\ 3 + \lambda = \mu \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = -7 + 2 \cdot 4 = 1 \\ 3 + \lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow \text{Son coincidentes o se cortan en un punto}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 0, 1) \\ \vec{v}_s = (2, 2, 1) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{0}{2} \Rightarrow \text{No son coincidentes} \Rightarrow \text{Son rectas que se cortan en } R \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 8 \\ z = 3 + 1 = 4 \end{array} \right.$$

b) El vector del plano pedido es perpendicular, simultáneamente, a los vectores directores de las rectas dadas por lo tanto es el resultante del producto vectorial de ambos, y la recta t quedara definida, además, por el punto P

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 0, 1) \\ \vec{v}_s = (2, 2, 1) \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_t = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{j} + 2\vec{k} - 2\vec{i} - \vec{j} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_t = (-2, -1, 2) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_t = (-2, -1, 2) \\ P(0, 8, 3) \end{array} \right. \Rightarrow t: \frac{x}{-2} = \frac{y - 8}{-1} = \frac{z - 3}{2}$$

Opción 2.- Sean π el plano que pasa por los puntos $A(1, -1, 1)$, $B(2, 3, 2)$, $C(3, 1, 0)$ y r la recta dada

$$\text{por } r: \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$$

- a) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π . Calcula el punto de intersección de r y π .
 b) Calcula los puntos de la recta r que distan **6** unidades del plano π .

a) El seno del ángulo formado por el plano π y la recta r es igual al cociente entre el producto escalar de los vectores y el producto de sus módulos

El vector director del plano π es perpendicular a los vectores AB y AC que generan el plano y se calcula como el producto vectorial de ambos.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, 3, 2) - (1, -1, 1) = (1, 4, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 1, 0) - (1, -1, 1) = (2, 2, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} - 8\vec{k} - 2\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{v}_\pi = -6\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_\pi = (-6, 3, -6) \equiv (2, -1, 2) \\ \vec{v}_r = (2, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{sen}(r, \pi) = \frac{|\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|} = \frac{|(2, -1, 2) \cdot (2, -1, 2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|4 + 1 + 4|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = \frac{|9|}{9} = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow$$

$$\text{ángulo}(r, \pi) = \text{arc sen } 1 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Hallaremos la ecuación general del plano π , sabiendo que su vector director, ya hallado, es perpendicular al vector AG , siendo G el punto genérico del plano, y que su producto escalar es nulo y la ecuación pedida del plano.

Calcularemos las ecuaciones paramétricas de la recta r .

Una vez obtenidas ambas ecuaciones hallaremos el punto P de corte entre recta y plano sustituyendo las coordenadas de la recta en el plano, que nos dará el valor necesario para obtener el punto de intersección

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (2, -1, 2) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (1, -1, 1) = (x-1, y+1, z-1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow$$

$$(2, -1, 2) \cdot (x-1, y+1, z-1) = 0 \Rightarrow 2x - 2 - y - 1 + 2z - 2 = 0 \Rightarrow \pi: 2x - y + 2z - 5 = 0$$

$$r: \begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = -6 - \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 2(7 + 2\lambda) - (-6 - \lambda) + 2(-3 + 2\lambda) - 5 = 0 \Rightarrow 14 + 4\lambda + 6 + \lambda - 6 + 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$9\lambda + 9 = 0 \Rightarrow 9\lambda = -9 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P \begin{cases} x = 7 + 2 \cdot (-1) = 5 \\ y = -6 - (-1) = -5 \\ z = -3 + 2 \cdot (-1) = -5 \end{cases} \Rightarrow P(5, -5, -5)$$

Continuación de la Opción 2 del Bloque 2b) Sean **Q** y **S** los puntos buscados

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi : 2x - y + 2z - 5 = 0 \\ r : \begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = -6 - \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow d(\pi, r) = \frac{2(7 + 2\lambda) - (-6 - \lambda) + 2(-3 + 2\lambda) - 5}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \pm 6 \Rightarrow \begin{cases} \frac{9\lambda + 9}{\sqrt{9}} = 6 \\ \frac{9\lambda + 9}{\sqrt{9}} = -6 \end{cases} \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 9\lambda + 9 = 18 \Rightarrow 9\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 7 + 2 \cdot 1 \\ y = -6 - 1 \\ z = -3 + 2 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow Q(9, -7, -1) \\ 9\lambda + 9 = -18 \Rightarrow 9\lambda = -27 \Rightarrow \lambda = -\frac{27}{9} = -3 \Rightarrow S \begin{cases} x = 7 + 2 \cdot (-3) \\ y = -6 - (-3) \\ z = -3 + 2 \cdot (-3) \end{cases} \Rightarrow S(1, -3, -3) \end{array} \right.$$

Bloque 3 (Análisis) (Puntuación máxima 4 puntos)**Opción 1.-** a) Define función continua en un punto. ¿Qué tipo de discontinuidad presenta lafunción $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ en $x = 0$?b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $g(x) = 2x^3 - 3x^2$.c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $g(x) = 2x^3 - 3x^2$ y la recta $y = 2x$.a) Una función es **continua en el punto $x = x_0$** si, y solo si, verifica que: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Desglosando el concepto de límite podremos dar una definición de función continua equivalente:

Una función **f** es **continua en el punto $x = x_0$** si verifica las siguientes condiciones:

- Existe $f(x_0)$, es decir la función está definida en $x = x_0$
- Existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- Los dos valores anteriores coinciden $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = \frac{\ln(1+0^2)}{0} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1+0^2} = \frac{2 \cdot 0}{1+0^2} = \frac{0}{1} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Disc. evitable}$$

Tendremos que redefinir la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Continuación de la Opción 1 del Bloque 3

b)

$$g'(x) = 6x^2 - 6x \Rightarrow \text{Creciente} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x > 0 \Rightarrow 6x(x-1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases}$$

	$-\infty$	0	1	∞
$6 > 0$	(+)	(+)	(+)	(+)
$x > 0$	(-)	(+)	(+)	(+)
$x > 1$	(-)	(-)	(+)	(+)
Solución	(+)	(-)	(+)	(+)

Crecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / (x < 0) \cup (x > 1)$

Decrecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / 0 < x < 1$

Máximo relativo en $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$ de crecimiento pasa a decrecimiento

Mínimo relativo en $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -1$ de decrecimiento pasa a crecimiento

$$g''(x) = 12x - 6 \Rightarrow \text{Posible punto de inflexión} \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 6 = 0 \Rightarrow 12x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$g'''(x) = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión en } x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

c)

$$\text{Puntos de corte de las funciones con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 2x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow 2x = 2x^3 - 3x^2 \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow (2x^2 - 3x - 2)x = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3+5}{4} = 2 \\ x = \frac{3-5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$(2x) \cap (2x^3 - 3x^2) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / \left(-\frac{1}{2} < x < 0\right) \cup \left(0 < x < \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2} < x < 2\right)$$

$$x = -\frac{1}{4} \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} \\ g\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{2}{64} - \frac{3}{16} = -\frac{1}{32} - \frac{3}{16} = -\frac{7}{32} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{7}{32}$$

En zona negativa

$$x = 1 \in \left(0, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \cdot 1 = 2 > 0 \\ g(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -1 < 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{7}{4} \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{2} > 0 \\ g\left(\frac{7}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{343}{32} - \frac{147}{16} = \frac{343 - 294}{32} = \frac{49}{32} \Rightarrow \frac{7}{2} > \frac{49}{32} \end{cases}$$

Continuación de la Opción 1 del Bloque 3c) *Continuación*

$$A = \left| \int_{-\frac{1}{2}}^0 2x \, dx \right| - \left| \int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x^3 - 3x^2) \, dx \right| + \int_0^{\frac{3}{2}} 2x \, dx + \left| \int_0^{\frac{3}{2}} (2x^3 - 3x^2) \, dx \right| + \int_{\frac{3}{2}}^2 2x \, dx - \int_{\frac{3}{2}}^2 (2x^3 - 3x^2) \, dx$$

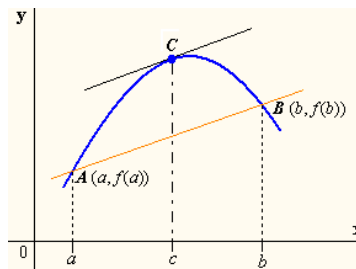
$$A = - \int_{-\frac{1}{2}}^0 2x \, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x^3 - 3x^2) \, dx + \int_0^{\frac{3}{2}} 2x \, dx - \int_0^{\frac{3}{2}} (2x^3 - 3x^2) \, dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 2x \, dx - \int_{\frac{3}{2}}^2 (2x^3 - 3x^2) \, dx$$

$$A = -2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 x \, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x^3 - 3x^2) \, dx + 2 \int_0^{\frac{3}{2}} x \, dx - \int_0^{\frac{3}{2}} (2x^3 - 3x^2) \, dx =$$

$$A = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-\frac{1}{2}}^0 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot [x^4]_{-\frac{1}{2}}^0 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_{-\frac{1}{2}}^0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot [x^4]_0^{\frac{3}{2}} + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$A = - \left[0^2 - \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \cdot \left[0^4 - \left(-\frac{1}{2} \right)^4 \right] - \left[0^3 - \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right] + \left(2^2 - 0^2 \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(2^4 - 0^4 \right) + \left(2^3 - 0^3 \right)$$

$$A = - \left(-\frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{16} \right) - \frac{1}{8} + 4 - \frac{16}{2} + 8 = \frac{1}{4} - \frac{1}{32} - \frac{1}{8} + 4 = \frac{8-1-4+128}{32} = \frac{131}{32} u^2$$

Opción 2.- a) Enuncia e interpreta geoméricamente el teorema del valor medio del cálculo diferencial.b) Calcula un punto de la gráfica de la función $g(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ en el que la recta tangente sea paralela al eje OX; escribe la ecuación de esa recta tangente. Calcula las asíntotas, si las tiene, de $g(x)$.c) Calcula: $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$; (Nota: ln = logaritmo neperiano)a) Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ Geoméricamente, como $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto c y $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es lapendiente de la cuerda que une los puntos $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en $[a, b]$ y tiene tangente en todos los puntos de (a, b) , es decir, es derivable en (a, b) , entonces existe, al menos, un punto de (a, b) en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$ **Continuación de la Opción 2 del Bloque 3**

b)

$$g'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2(1+e^x)e^x e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x) - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1+e^x - 2e^x)}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} \Rightarrow$$

$$m = g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} = 0 \Rightarrow e^x(1-e^x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ 1-e^x = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow \ln e^x = \ln 1 \Rightarrow x \ln e = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(0) = \frac{e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow y - \frac{1}{4} = 0 \quad (x-0) \Rightarrow y - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \\ m = g'(0) = 0 \end{array} \right.$$

$1+e^x = 0 \Rightarrow e^x = -1 \Rightarrow x \ln e = \ln(-1) \Rightarrow x = \ln(-1) \Rightarrow$ Sin solución \Rightarrow No existen asíntotas verticales
Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2e^x(1+e^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2(1+e^x)} = \frac{1}{2 \cdot \infty} = 0$$

Existe asíntota horizontal, $y = 0$, cuando $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{e^x}}{\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x \left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{e^x(e^x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = 0$$

Existe asíntota horizontal, $y = 0$, cuando $x \rightarrow -\infty$

Asíntotas oblicuas

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x(1+e^x)^2} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2 + 2xe^x(1+e^x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{(1+e^x+2xe^x)(1+e^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1+e^x+2xe^x+e^x+e^{2x}+2xe^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1+2e^x+2xe^x+e^{2x}+2xe^{2x}} = \\ &= \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2e^x+2xe^x+2e^x+2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{4e^x+2xe^x+4e^{2x}+4xe^{2x}} = \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{4e^x(1+2x+4e^x+4xe^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4(1+2x+4e^x+4xe^x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x(1+e^{-x})^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-xe^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{-xe^x(e^x+1)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{-x(e^x+1)^2} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{-x(e^x+1)^2} = -0 = 0 \Rightarrow \text{Calculado cuando } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

No existe, TAMPOCO, asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$

Continuación de la Opción 2 del Bloque 3

c)

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int_2^6 \frac{dt}{t^2} = \int_2^6 t^{-2} dt = \frac{1}{(-1)} [t^{-1}]_2^6 = -\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1-3}{6}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$1+e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow \begin{cases} x = \ln 5 \Rightarrow t = 1+e^{\ln 5} = 1+5 = 6 \\ x = 0 \Rightarrow t = 1+e^0 = 2 \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es