

Bloque 1 (Álgebra Lineal) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$

a) Estudia, según los valores de m , el rango de A

b) Para $m = -1$, calcula la matriz X que verifica $X \cdot A + A = 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 3.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} 0 & m \\ -1 & m+1 \end{vmatrix} = m \cdot m = m^2 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow m^2 = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow$$

$$\forall m \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

Si $m = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

b)

$$XA = 2I - A \Rightarrow XAA^{-1} = (2I - A)A^{-1} \Rightarrow XI = 2IA^{-1} - AA^{-1} \Rightarrow X = 2A^{-1} - I$$

$$\text{Si } m = -1 \Rightarrow |A| = (-1)^2 = 1 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Opción 2.-

a) Discute, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + my + mz = 1 \\ x + my + mz = m \\ mx + my = 4m \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, en el caso $m = 1$.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & m & m \\ 0 & m & m \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Dos filas iguales}) \Rightarrow \text{No puede ser Compatible Determinado} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & m & 1 \\ 1 & m & m & m \\ 0 & m & m & 4m \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \\ 0 & m & m & 4m \end{array} \right) \Rightarrow m-1=0 \Rightarrow m=1$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

Si $m = 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

b) Si $m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow y + z = 4 \Rightarrow y = 4 - z \Rightarrow x + 4 - z + z = 1 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow$$

Solución $\Rightarrow (x, y, z) = (-3, 4 - \lambda, \lambda)$

Bloque 2 (Geometría) (Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.- a) Calcula m para que los puntos $A(2, 1, -2)$, $B(1, 1, 1)$ y $C(0, 1, m)$ estén alineados.

b) Calcula el punto simétrico del punto $P(-2, 0, 0)$ respecto de la recta que pasa por los puntos $A(2, 1, -2)$ y $B(1, 1, 1)$.

a) Si los puntos A , B y C están alineados los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) - (2, 1, -2) = (-1, 0, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, m) - (2, 1, -2) = (-2, 0, m+2) \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{-2} = \frac{0}{0} = \frac{3}{m+2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{m+2} \Rightarrow m+2 = 6 \Rightarrow m = 4$$

Continuación de la Opción 1 del Bloque 2

b) Desde el punto **P** hallamos un vector **PR**, siendo **R** el punto genérico de la recta **r** determinada por **A** y **B**, que es perpendicular al vector director **AB**, hallado en el apartado anterior, de esa recta y, por ello, su producto escalar es nulo. El punto **R** es el punto medio entre **P** y su simétrico **P'**

$$\vec{v}_r = \overline{AB} = (-1, 0, 3) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 0, 3) \\ \overrightarrow{PR} = (1 - \lambda, 1, 1 + 3\lambda) - (2, 0, 0) = (-1 - \lambda, 1, 1 + 3\lambda) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_r \perp \overrightarrow{PR} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \Rightarrow (-1, 0, 3) \cdot (-1 - \lambda, 1, 1 + 3\lambda) = 0 \Rightarrow 1 + \lambda + 3 + 9\lambda = 0 \Rightarrow 4 + 10\lambda = 0$$

$$10\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} \Rightarrow R \begin{cases} x = 1 - \left(-\frac{2}{5}\right) \\ y = 1 \\ z = 1 + 3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow R \left(\frac{7}{5}, 1, -\frac{1}{5}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{7}{5} = \frac{2 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 10 + 5x_{P'} = 14 \Rightarrow 5x_{P'} = 4 \Rightarrow x_{P'} = \frac{4}{5} \\ 1 = \frac{0 + y_{P'}}{2} \Rightarrow y_{P'} = 2 \\ -\frac{1}{5} = \frac{0 + z_{P'}}{2} \Rightarrow 5z_{P'} = -2 \Rightarrow z_{P'} = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow P' \left(\frac{4}{5}, 2, -\frac{2}{5}\right)$$

Opción 2.- Dadas las rectas $r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-3}$; $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

a) Estudia su posición relativa.

b) Calcula la ecuación de plano que contiene a la recta **r** y es paralelo a la recta **s**.

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, si el sistema que resulta es compatible determinado son secantes, si es compatible indeterminado las rectas coinciden

Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} r: \begin{cases} x = \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = 2 - 3\mu \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 1 + \lambda \\ 1 - \mu = 3 + 2\lambda \\ 2 - 3\mu = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu - \lambda = 1 \\ \mu + 2\lambda = -2 \\ 3\mu + \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 1 - 6 + 2 + 1 = 6 \neq 0$$

Es un sistema incompatible \Rightarrow No son secantes, ni coincidentes

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, -3) \\ \vec{v}_s = (1, 2, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{2} \Rightarrow \text{No son paralelas} \Rightarrow \text{Son rectas que se cruzan en el espacio}$$

Continuación de la Opción 2 del Bloque 2

b) El plano π queda determinado por los vectores directores de las dos rectas y por el vector \mathbf{RG} , siendo \mathbf{R} un punto cualquiera de la recta \mathbf{r} (tomamos el indicado en su ecuación) y \mathbf{G} el punto genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector \mathbf{RG} es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$R(0, 1, 2)$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, -3) \equiv (-1, 1, 3) \\ \vec{v}_s = (1, 2, 1) \\ \vec{RG} = (x, y, z) - (0, 1, 2) = (x, y-1, z-2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x + 3(y-1) - 2(z-2) - (z-2) - 6x + (y-1) = 0 \Rightarrow -5x + 4(y-1) - 3(z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 5x - 4y + 3z - 2 = 0$$

Bloque 3 (Análisis) (Puntuación máxima 4 puntos)

Opción 1.- a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x - x}{2x^2 + x^4}$

b) Calcula los vértices y el área de un rectángulo de área máxima que se puede construir de modo que su base este sobre el eje OX y los vértices del lado opuesto estén sobre la parábola $y = -x^2 + 12$.

c) Enunciad el teorema fundamental del cálculo integral. Calcula la ecuación de la recta tangente a la

gráfica de $F(x) = \int_0^x [2 + \cos(t^2)] dt$, en el punto de abscisa $x = 0$.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x - x}{2x^2 + x^4} = \frac{e^0 \operatorname{sen} 0 - 0}{2 \cdot 0^2 + 0^4} = \frac{1 \cdot 0 - 0}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - 1}{4x + 4x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) - 1}{4x + 4x^3} = \frac{e^0 (\operatorname{sen} 0 + \cos 0) - 1}{4 \cdot 0 + 4 \cdot 0^3} = \frac{1 \cdot (0 + 1) - 1}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + e^x (\cos x - \operatorname{sen} x)}{4 + 12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (\operatorname{sen} x + \cos x + \cos x - \operatorname{sen} x)}{4 + 12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x \cos x}{4 + 12x^2} =$$

$$= \frac{2e^0 \cos 0}{4 + 12 \cdot 0^2} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{4 + 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Continuación de la Opción 1 del Bloque 3

b) Siendo la base x que ira desde el punto $\left(-\frac{x}{2}, 0\right)$ hasta el punto $\left(\frac{x}{2}, 0\right)$ y la altura la correspondiente

$$\text{en esos puntos } \begin{cases} h = y\left(-\frac{x}{2}\right) = -\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + 12 = -\frac{x^2}{4} + 12 = \frac{48 - x^2}{4} \\ h = y\left(\frac{x}{2}\right) = -\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 12 = -\frac{x^2}{4} + 12 = \frac{48 - x^2}{4} \end{cases}$$

$$A = xh = x \frac{48 - x^2}{4} = \frac{48x - x^3}{4} \Rightarrow A' = \frac{dA}{dx} = \frac{1}{4} \cdot (48 - 3x^2) = \frac{3}{4} \cdot (16 - x^2) \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot (16 - x^2) = 0 \Rightarrow$$

$$16 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow A'' = \frac{d^2A}{dx^2} = \frac{3}{4} \cdot (-2x) = -\frac{3}{2}x$$

$$\begin{cases} A''(-4) = -\frac{3}{2} \cdot (-4) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ A''(4) = -\frac{3}{2} \cdot 4 = -6 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \end{cases} \Rightarrow \text{Vértices} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\frac{4}{2}, 0\right) = (-2, 0) \\ (2, 0) \\ \left(-2, \frac{48 - 4^2}{4}\right) = (-2, 8) \\ (2, 8) \end{cases}$$

c) Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, la función $F(t) = \int_a^t f(x) dx$, con $t \in [a, b]$, recibe el nombre de función integral de $f(x)$ en $[a, b]$, de ello se determina el

Teorema fundamental del cálculo integral

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces la función integral es derivable y cumple que:

$$F'(t) = f(x), \forall t \in [a, b]$$

$$\begin{cases} F(x) = \int_0^x [2 + \cos(t^2)] dt \Rightarrow F(0) = \int_0^0 [2 + \cos(t^2)] dt = 0 & \Rightarrow y - 0 = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x \\ F'(x) = 2 + \cos(t^2) \Rightarrow F'(0) = 2 + \cos(0^2) = 2 + \cos 0 = 2 + 1 = 3 \end{cases}$$

Opción 2.- a) Enunciad el teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que la gráfica de $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4$ corta al eje OX en algún punto del intervalo $(1, 2)$?

b) Dada la función $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\sqrt{2} \\ -x^2 + 2 & \text{si } x > -\sqrt{2} \end{cases}$ ¿Es $g(x)$ continua en $x = -\sqrt{2}$? ¿Y derivable en

$x = -\sqrt{2}$?

c) Calcula el área de la región del plano limitada por las gráficas de $g(x)$ y $h(x) = |x|$.

a)

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo [**sign** $f(a) \neq \text{sign } f(b)$], entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que **$f(c) = 0$**

La función es **continua** en el intervalo $[1, 2]$, y sus valores en los extremos del intervalo son:

$$\begin{cases} f(1) = 1^5 + 2 \cdot 1^4 - 4 = 1 + 2 - 4 = -1 < 0 \\ f(2) = 2^5 + 2 \cdot 2^4 - 4 = 32 + 32 - 4 = 60 > 0 \end{cases} \text{ siendo de distinto signo}$$

[sign $f(1) \neq \text{sign } f(2)$], entonces existe, al menos, un punto $c \in (1, 2)$ tal que **$f(c) = 0$**

b)

$$\begin{cases} g(-\sqrt{2}) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} g(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} g(x) = -(-\sqrt{2})^2 + 2 = -2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow g(-\sqrt{2}) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} g(x) = 0 \Rightarrow$$

Es función continua en $x = -\sqrt{2}$

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\sqrt{2} \\ -2x & \text{si } x > -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} g'(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} g'(x) = 2(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} g'(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} g'(x) = -2\sqrt{2}$$

La función no es derivable en $x = -\sqrt{2}$

Continuación de la Opción 2 del Bloque 3

c)

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\sqrt{2} \\ -x^2 + 2 & \text{si } x > -\sqrt{2} \end{cases} \\ x > 0 \Rightarrow h(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \text{Punt de corte entre funciones} \left\{ \begin{array}{l} -x^2 + 2 = -x \Rightarrow (-\sqrt{2}, 0) \\ -x^2 + 2 = x \Rightarrow (0, \infty) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+3}{2} = 2 \notin (-\sqrt{2}, 0) \\ x = \frac{1-3}{2} = -1 \in (-\sqrt{2}, 0) \end{cases} \\ x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+3}{2} = 1 \in (0, \infty) \\ x = \frac{-1-3}{2} = -2 \in (0, \infty) \end{cases} \end{array} \right.$$

$$0 \in (-1, 1) \Rightarrow \begin{cases} g(0) = -0^2 + 2 = 2 > 0 \\ h(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) > h(x)$$

$$A = \int_{-1}^0 (-x^2 + 2) dx - \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^1 (-x^2 + 2) dx - \int_0^1 x dx = \int_{-1}^0 (-x^2 + 2 + x) dx + \int_0^1 (-x^2 + 2 - x) dx$$

$$A = -\frac{1}{3} \cdot [x^3]_{-1}^0 + 2 \cdot [x]_{-1}^0 + \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-1}^0 - \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1 + 2 \cdot [x]_0^1 - \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^1$$

$$A = -\frac{1}{3} \cdot [0^3 - (-1)^3] + 2 \cdot [0 - (-1)] + \frac{1}{2} \cdot [0^2 - (-1)^2] - \frac{1}{3} \cdot (1^3 - 0^3) + 2 \cdot (1 - 0) - \frac{1}{2} \cdot (1^2 - 0^2)$$

$$A = -\frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 \cdot -\frac{1}{2} = 4 - \frac{2}{3} - 1 = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3} u^2$$