Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x - y + z = 1, \\ 3x - y + \alpha z = \alpha, \\ x + (\alpha - 1)z = 1. \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 3$, si es posible.

Ejercicio B1

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinar para qué valores del parámetro α la matriz A no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $\alpha = 2$.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sean r la recta que pasa por los puntos $A = (1, a, -1)$ y $B = (b, 1, 1)$ y π el plano de ecuación $x + y - 2z = 2b$.

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que la recta r sea perpendicular al plano π.

b) Calcular los valores de los parámetros a y b para que la recta r esté contenida en el plano π.

Ejercicio B2

Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P = (-2, 1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\{x = 1 - 2t,\ y = 1 + t,\ z = t\}.$$

Calcular la distancia de P al punto de corte de ambas rectas.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Estudiar los máximos, los mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 5 + 8x^2 - x^4$. Representar la gráfica de f.

Ejercicio B3

Sea la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$.

a) Obtener los valores de los parámetros A, B y C para que la gráfica de f pase por el punto $(0, 1)$ y tenga un mínimo en el punto $(1, 1)$.

b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos? En caso afirmativo, encontrarlos.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Sean las funciones: $f(x) = 1/x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^2/8$.

a) Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de esas tres funciones.

b) Calcular el área de dicho recinto.

Ejercicio B4

Calcular, explicando los métodos utilizados,

$$I = \int (x+2)\sin(2x)\,dx \qquad \text{y} \qquad J = \int \frac{x+7}{x^2 - 4x - 5}\,dx.$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

En una farmacia se ha recibido un lote de medicamentos de los tipos A, I y M. El 80 % corresponde al medicamento A, el 10 % al I y el resto al M. En la revisión realizada por la farmacéutica se ha observado que hay medicamentos caducados en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de I y el 5 % de M. Se elige una caja de medicamentos al azar. Hallar:

a) La probabilidad de coger un medicamento caducado.

b) Si sabemos que el medicamento está caducado, la probabilidad de que sea del tipo A.

Ejercicio B5

En una ciudad se han elegido al azar 3900 personas. Hallar:

a) La probabilidad de que al menos 15 de ellas cumplan años el día del patrón de la ciudad.

b) La probabilidad de que el número de personas que cumplan años el día del patrón esté comprendido entre 5 y 15, ambos incluidos.

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

SOLUCIÓN A1

El determinante del sistema es $-(\alpha-2)(\alpha-1)$, por lo tanto, para $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 1$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

Para $\alpha = 1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3, por lo tanto, el sistema es INCOMPATIBLE.

Para $\alpha = 2$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada también es 2, por lo tanto, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

Para $\alpha = 3$, la solución es $x = -1$, $y = -3$, $z = 1$.

SOLUCIÓN B1

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero, y $|A| = 0$ cuando $\alpha = 1$ y $\alpha = 3$. Además, la matriz tiene inversa para $\alpha = 2$ y es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN A2

a) El vector director de la recta r, $(b-1, 1-a, 2)$, y el vector normal del plano π, $(1,1,-2)$, deben ser paralelos por lo que: $(b-1, 1-a, 2) = \alpha(1,1,-2)$. De aquí obtenemos $a = 2$ y $b = 0$.

b) Para que la recta r esté contenida en el plano π:

- El vector director de r y el vector normal de π deben ser perpendiculares, por lo que el producto escalar de ambos es cero. Por tanto, $(b-1, 1-a, 2) \cdot (1,1,-2) = 0$. De aquí se obtiene la ecuación $b - a - 4 = 0$.
- El punto $A = (1, a, -1)$ debe pertenecer a π. Sustituyendo el punto A en la ecuación de π se obtiene esta otra ecuación: $-2b + a = -3$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos $a = -5$ y $b = -1$.

SOLUCIÓN B2

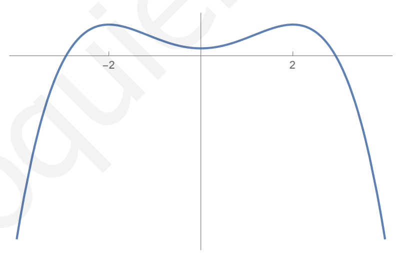
La ecuación del plano π que contiene a $P = (-2, 1, 0)$ y es perpendicular a la recta r es: $-2x + y + z - 5 = 0$. El punto de corte del plano π y la recta r es $P_0 = (-1, 2, 1)$. Para calcular la ecuación de la recta perpendicular a r, tenemos su vector director $\overrightarrow{PP_0} = (1, 1, 1)$ y un punto $P = (-2, 1, 0)$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta pedida serán: $x = -2 + t$, $y = 1 + t$, $z = t$.

La distancia entre P y P_0 es el módulo del vector $\overrightarrow{PP_0}$, por lo que la distancia pedida es $\sqrt{3}$ u.

SOLUCIÓN A3

Dada la función $f(x) = 5 + 8x^2 - x^4$, su derivada es $f'(x) = 16x - 4x^3$, que se anula en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$. La función es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(0, 2)$ y es decreciente en $(-2, 0)$ y $(2, \infty)$.

Tiene máximos en $x = 2$ y $x = -2$ y un mínimo en $x = 0$.

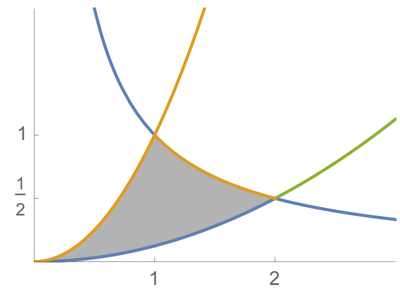


SOLUCIÓN B3

De las condiciones impuestas $A = 1$, $B = -2$ y $C = 1$, es decir, $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$. La derivada de f, $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$, se anula en $x = 1$ y $x = 1/3$. Por tanto, la función tiene un mínimo en $x = 1$ y un máximo en $x = 1/3$.

SOLUCIÓN A4

El recinto es la zona limitada por las gráficas de las tres funciones. Los puntos de corte son $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,1/2)$.



El área del recinto se calcula mediante la siguiente suma de integrales definidas:

$$\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{8}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{8}\right) dx = \ln 2 \ u^2.$$

SOLUCIÓN B4

La integral I se puede resolver por partes, $\int udv = uv - \int vdu$, donde $u = x+2$, y $dv = \sin(2x)dx$. Con esto resulta que $du = dx$ y $v = -\dfrac{\cos(2x)}{2}$. Por lo tanto,

$$I = \int (x+2)\sin(2x)dx = -\frac{(x+2)\cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C.$$

Para el cálculo de la integral J, la función se descompone en fracciones simples como sigue:

$$\frac{x+7}{x^2-4x-5} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1},$$

y, operando, resulta que $A = 2$ y $B = -1$, por lo que la integral es

$$J = \int \frac{x+7}{x^2-4x-5} dx = 2\ln|x-5| - \ln|x+1| + C.$$

SOLUCIÓN A5

Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicionada.

Sean los siguientes sucesos: A: coger un medicamento del grupo A, I: coger un medicamento del grupo I, M: coger un medicamento del grupo M; C: está caducado, C': no está caducado.

a) $P(C) = P(A) \cdot P(C/A) + P(I) \cdot P(C/I) + P(M) \cdot P(C/M) = 0,08 + 0,02 + 0,005 = 0,105$.

b) $P(A/C) = \dfrac{P(A) \cdot P(C/A)}{P(C)} = \dfrac{0,08}{0,105} = 0,762$.

SOLUCIÓN B5

Se trata de una distribución binomial, $B(3900, 1/365)$. Como $np \geq 5$, $nq \geq 5$, se aproxima mediante una distribución normal $N(10,68; 3,26)$.

a) $P(x \geq 15) = P(x' > 14,5) = P\Big(z > \dfrac{14,5 - 10,68}{3,26}\Big) = P(z > 1,17) = 1 - 0,8790 = 0,121$

b) $P(5 \leq x \leq 15) = P(4,5 < x' < 15,5) = P\Big(\dfrac{4,5 - 10,68}{3,26} < z < \dfrac{15,5 - 10,68}{3,26}\Big) = P(-1,90 < z < 1,48) = 0,9306 - (1 - 0,9713) = 0,9019$.