UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2020-2021**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) 1.25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1) (0.5 puntos) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-senx}$ a.2) (0.75 puntos) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{sen\dfrac{1}{x}}\right)$

(**Indicación**: use el cambio de variable $t = 1/x$ donde sea necesario).

b) (1.25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b.1) (0.5 puntos) $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-1}dx$ b.2) (0.75 puntos) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}dx$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r\equiv x-1=y+1=\dfrac{z-2}{2}$ y el plano $\pi\equiv x+y-z=6$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto *A*.

b) (0.75 puntos) Determinar la distancia entre la recta *r* y el plano π.

c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta *r* y no corta al plano π.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

b) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
a) (0.75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables *x* e *y*, que tenga como soluciones {$x = 1$, $y = 2$} y {$x = 0$, $y = 0$}.
b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables *x*, *y* y *z* cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$$

c) (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, que solo tenga como solución a $x = 1$ e $y = 2$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función

$$f(x) = x^3 - |x| + 2$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f* en $x = 0$.
b) (1 punto) Determine los extremos relativos de *f(x)* en la recta real.
c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas $y = 0$, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

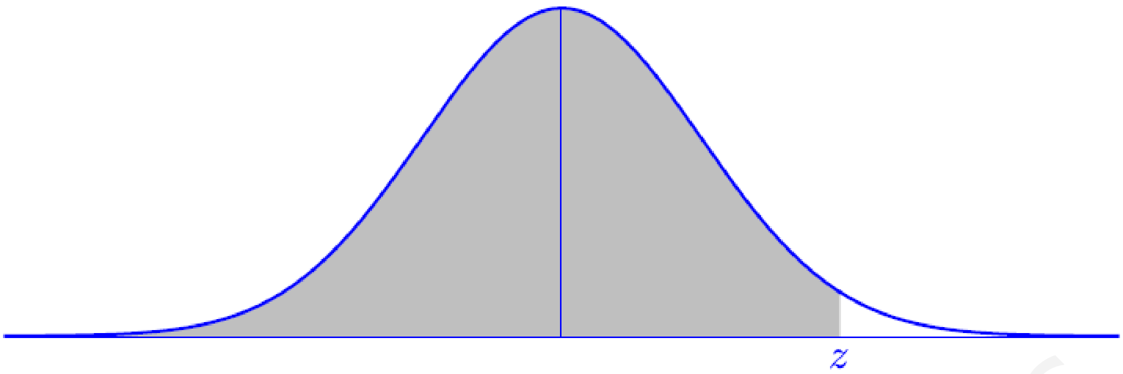
B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x + z = 2 \\ -2x + y - 2z = 1 \end{cases}.$$

a) (1.5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a *r* y a *s*.
b) (1 punto) Calcule la distancia entre *r* y *s*.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.
a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.
b) (1.5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución N(0, 1), P(Z < 0,45) = 0,6736.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

Llamamos "x" al número de seguidores de Sara, "y" al número de seguidores de Cristina y "z" al número de seguidores de Jimena.

"*Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social*" → $x+y+z=15000$

"*Si Jimena perdiera el 25% (se queda con el 75 %) de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara*" → $0.75z=3x$

"*La mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena*" → $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=\frac{z}{4}$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=15000 \\ 0.75z=3x \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=\frac{z}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=15000 \\ \frac{0.75z}{3}=x \\ \frac{10x}{20}+\frac{4y}{20}=\frac{5z}{20} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=15000 \\ 0.25z=x \\ 10x+4y=5z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0.25z+y+z=15000 \\ 10\cdot 0.25z+4y=5z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+1.25z=15000 \\ 2.5z+4y=5z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=15000-1.25z \\ -2.5z+4y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2.5z+4(15000-1,25z)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2.5z+60000-5z=0 \Rightarrow -7.5z=-60000 \Rightarrow \boxed{z=\frac{60000}{7.5}=8000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=15000-1.25\cdot 8000=5000} \\ \boxed{x=0.25\cdot 8000=2000} \end{cases}$$

Sara tiene 2000 seguidores, Cristina tiene 5000 y Jimena tiene 8000.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
a) 1.25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1) (0.5 puntos) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-senx}$ a.2) (0.75 puntos) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{sen\frac{1}{x}}\right)$

(**Indicación**: use el cambio de variable $t = 1/x$ donde sea necesario).

b) (1.25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b.1) (0.5 puntos) $\int \frac{x}{x^2-1}dx$ b.2) (0.75 puntos) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

a.1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-senx} = \frac{0^2(1-0)}{0-0-sen0} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L´Hôpital) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x(1-2x)+x^2(-2)}{1-4x-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x-4x^2-2x^2}{1-4x-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x-6x^2}{1-4x-\cos x} = \frac{0-0}{1-0-\cos 0} = \frac{0}{0} =$$

$$= Indeterminación(L´Hôpital) = \lim_{x \to 0} \frac{2-12x}{0-4+senx} = \frac{2-0}{-4+sen0} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

a.2)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{sen\frac{1}{x}}\right) = 0 \cdot \infty = Indeterminación = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x^2} - \lim_{x \to \infty} \frac{2}{xsen\frac{1}{x}} = 0 - \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x}}{sen\frac{1}{x}} =$$

$$= -\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x}}{sen\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L´Hôpital) = -\lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{2}{\cancel{x^2}}}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}\cos\frac{1}{x}} =$$

$$= -\lim_{x \to \infty} \frac{2}{\cos\frac{1}{x}} = -\frac{2}{\cos 0} = \boxed{-2}$$

b.1)

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + K$$

b.2)

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \ldots$$

$$\int x^2 e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 \to du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx \to v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = x^2\left(-e^{-x}\right) - \int \left(-e^{-x}\right) 2xdx =$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \to du = dx \\ dv = e^{-x}dx \to v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array} \right\} =$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\left[x\left(-e^{-x}\right) - \int -e^{-x}dx \right] = -x^2 e^{-x} + 2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}dx \right] =$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + K$$

$$.. = \left[-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} \right]_0^1 = \left[-1^2 e^{-1} - 2e^{-1} - 2e^{-1} \right] - \left[-0^2 e^{-0} - 2 \cdot 0e^{-0} - 2e^{-0} \right] =$$

$$= -5e^{-1} + 2 = \boxed{2 - \frac{5}{e}}$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv x-1 = y+1 = \frac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto *A*.

b) (0.75 puntos) Determinar la distancia entre la recta *r* y el plano π.

c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta *r* y no corta al plano π.

a) Hallamos la ecuación del plano π´ perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto $A(1,0,-1)$.

Al ser perpendicular a la recta su vector normal es el director de la recta $\overrightarrow{u_r} = (1,1,2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{n'} = \overrightarrow{u_r} = (1,1,2) \\ A(1,0,-1) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi' \equiv x+y+2z+D=0 \\ A(1,0,-1) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow 1+0-2+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=1 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x+y+2z+1=0}$$

Hallamos el ángulo que forman los planos π y π´ hallando el ángulo que forman sus vectores normales.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y-z-6=0 \\ \pi' \equiv x+y+2z+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{n} = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{n'} = (1,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\pi, \pi'\right) = \left(\vec{n}, \overrightarrow{n'}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{n'}}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n'}\right|}\right)$$

$$\left(\pi, \pi'\right) = \arccos\left(\frac{(1,1,-1)\cdot(1,1,2)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right) = \arccos\left(\frac{1+1-2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}\right) = \arccos(0)$$

$$\left(\pi, \pi'\right) = 90^{\circ}$$

Los planos son perpendiculares.

b) Estudiemos la posición relativa de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv x-1 = y+1 = \frac{z-2}{2} \\ \pi \equiv x+y-z=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,2) \\ \vec{n} = (1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \vec{n} = (1,1,2)(1,1,-1) = 1+1-2 = 0$$

Vector director de la recta *r* y vector normal del plano son perpendiculares, por lo que recta y plano son paralelos.

La distancia de la recta al plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv x-1 = y+1 = \dfrac{z-2}{2} \Rightarrow P_r(1,-1,2) \in r \\ \pi \equiv x+y-z-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|1-1-2-6|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \boxed{\frac{8}{\sqrt{3}}u}$$

c) Una recta *s* que no corte el plano π debe ser una recta paralela a π. Por lo que el vector director de la recta *s* es perpendicular al vector normal del plano $\vec{n}=(1,1,-1)$.
Además, es perpendicular a la recta *r*, por lo que también es perpendicular al vector director $\overrightarrow{u_r}=(1,1,2)$ de la recta *r*.
Un vector director de la recta *s* puede ser el producto vectorial de $\vec{n}$ y $\overrightarrow{u_r}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(1,1,-1) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = \vec{n}\times\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3,-3,0)$$

Hallamos la ecuación de la recta *s* con vector director $\overrightarrow{v_s}=(3,-3,0)$ y que pasa por el punto $A(1,0,-1)$.

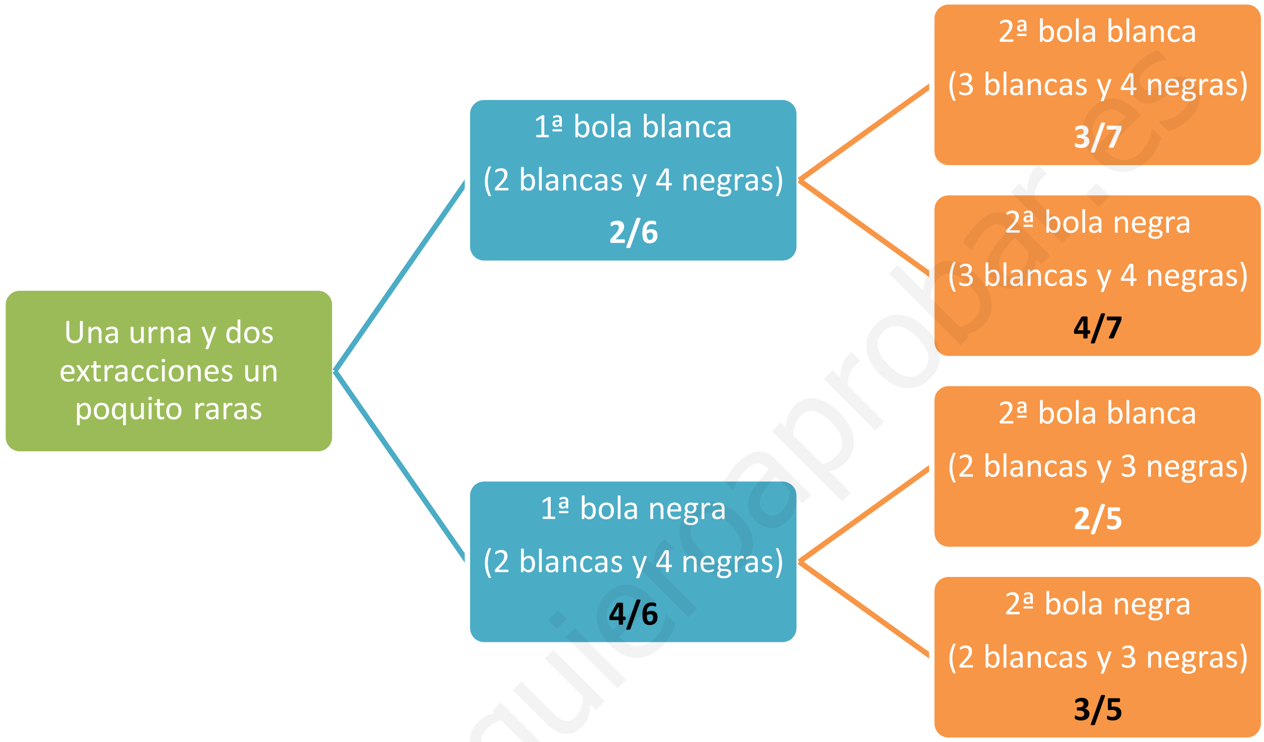
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_s}=(3,-3,0) \\ A(1,0,-1)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{0}}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

b) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

Realizamos un diagrama de árbol para facilitar el cálculo de probabilidades.



Llamamos B1 y B2 a sacar bola blanca en 1ª y 2ª extracción, Análogamente N1 y N2 a sacar negra en 1ª y 2ª extracción.

a) Para sacar dos bolas de distinto color deben ser una blanca y la otra negra, pudiendo ser la 1ª blanca y 2ª negra o 1ª negra y 2ª blanca.

$$P(\text{Dos bolas de distinto color}) = P(B1 \cap N2) + P(N1 \cap B2) =$$
$$= P(B1)P(N2/B1) + P(N1)P(B2/N1) = \{\text{Miramos el diagrama de árbol}\} =$$
$$= \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{7} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} = \boxed{\frac{16}{35} \simeq 0.457}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N1/B2) = \frac{P(N1 \cap B2)}{P(B2)} = \frac{P(N1)P(B2/N1)}{P(B1)P(B2/B1) + P(N1)P(B2/N1)} =$$
$$= \frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{7} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}} = \boxed{\frac{28}{43} \simeq 0.65}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
a) (0.75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables *x* e *y*, que tenga como soluciones $\{x = 1, y = 2\}$ y $\{x = 0, y = 0\}$.
b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables *x*, *y* y *z* cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$$

c) (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, que solo tenga como solución a $x = 1$ e $y = 2$.

a) Si tiene dos soluciones tendrá infinitas, por lo que debe tener las dos ecuaciones proporcionales. Basta encontrar una ecuación con dos incógnitas que cumplan las dos soluciones que nos dicen. Observamos que la “y” es el doble de la “x” en las dos soluciones, por lo que la ecuación es $y = 2x$ y la segunda ecuación puede ser esta multiplicada por “10” → $10y = 20x$.

El sistema es $\left.\begin{matrix} y = 2x \\ 10y = 20x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x - y = 0 \\ 20x - 10y = 0 \end{matrix}\right\}$

b)
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ z = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

c)
$$\left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 2x \\ y - x = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x - y = 0 \\ x - y = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Añadimos una 3ª ecuación} \\ \text{que sea la suma de las dos ecuaciones} \\ \begin{array}{ccc} 2x & -y & = 0 \\ x & -y & = -1 \\ \hline 3x & -2y & = -1 \end{array} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\begin{matrix} 2x - y = 0 \\ x - y = -1 \\ 3x - 2y = -1 \end{matrix}\right\}}$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función

$$f(x)=x^3-|x|+2$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f* en *x = 0*.
b) (1 punto) Determine los extremos relativos de *f(x)* en la recta real.
c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas *y = 0*, y las rectas *x = –1* y *x = 1*.

a) Expresamos la función como una función definida a trozos. Por el valor absoluto de "x" cambia de definición en *x = 0*.

$$f(x)=x^3-|x|+2=\begin{cases} x^3+x+2 & si \;\; x<0 \\ x^3-x+2 & si \;\; x\geq 0 \end{cases}$$

Comprobamos la continuidad en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^3-|0|+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^3+x+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^3-x+2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=2$$

La función es continua en *x = 0*.

Calculamos las derivadas laterales y estudiamos la derivabilidad en *x = 0*.

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x+2 & si \;\; x<0 \\ x^3-x+2 & si \;\; x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 3x^2+1 & si \;\; x<0 \\ 3x^2-1 & si \;\; x>0 \end{cases}$$

Entonces tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(3x^2+1\right)=3\cdot 0^2+1=1 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(3x^2-1\right)=3\cdot 0^2-1=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+)$$

La función no es derivable en *x = 0*.

b)

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x+2 & si \;\; x<0 \\ x^3-x+2 & si \;\; x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 3x^2+1 & si \;\; x<0 \\ 3x^2-1 & si \;\; x>0 \end{cases}$$

Igualamos a cero las derivadas en busca de los puntos críticos.

$$f'(x)=0\Rightarrow \begin{cases} 3x^2+1=0\to x^2=-\dfrac{1}{3}\to x=\sqrt{-\dfrac{1}{3}}=\textit{No existe} \quad si \;\; x<0 \\ 3x^2-1=0\to x^2=\dfrac{1}{3}\to x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} \text{ Solo nos quedamos con el positivo, pues } \; x>0 \end{cases}$$

El punto crítico $x=+\sqrt{\frac{1}{3}}$ lo sustituimos en la segunda derivada para ver si es máximo o mínimo.

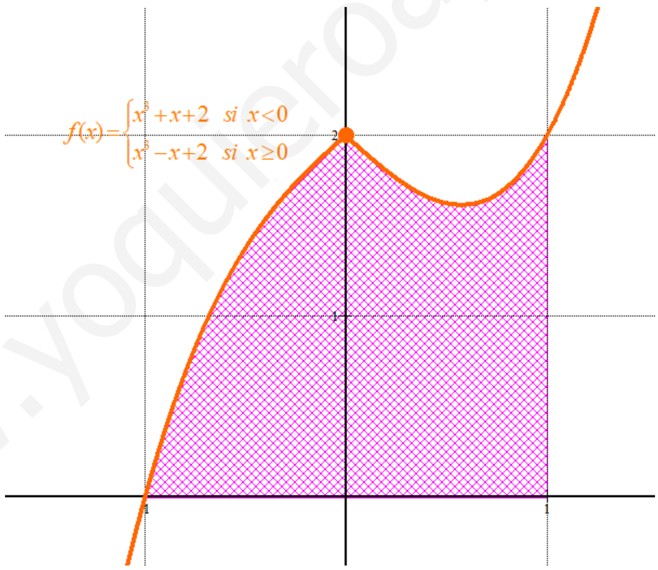
$f''(x)=6x \Rightarrow f''\left(+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=6\sqrt{\frac{1}{3}}>0$, por lo que se trata de un mínimo relativo.

Como $f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3-\sqrt{\frac{1}{3}}+2=2-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ el mínimo relativo tiene coordenadas $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},2-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

En *x = 0* la función no es derivable, pero es continua, como la función crece antes de *x = 0*, pues $f'(0^-)=1>0$ y después de *x = 0* decrece pues $f'(0^+)=-1<0$ en *x = 0* hay un máximo relativo. Sus coordenadas son (0, 2).

Resumiendo: La función tiene un máximo relativo en (0, 2) y un mínimo relativo en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},2-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

c) Dibujamos la gráfica de la función y la región de la cual nos piden calcular su área.



El área es la suma de las integrales definidas entre *x = –1* y *x = 0* de $f(x)=x^3+x+2$ y entre *x = 0* y *x = 1* de $f(x)=x^3-x+2$.

$$Área=\int_{-1}^{0}x^3+x+2dx+\int_{0}^{1}x^3-x+2dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{0}^{1}=$$

$$=\left[\frac{0^4}{4}+\frac{0^2}{2}+0\right]-\left[\frac{(-1)^4}{4}+\frac{(-1)^2}{2}-2\right]+\left[\frac{1^4}{4}-\frac{1^2}{2}+2\right]-\left[\frac{0^4}{4}-\frac{0^2}{2}+0\right]=$$

$$=-\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}+2+\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}+2=\boxed{3\,u^2}$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}.$$

a) (1.5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.
b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s.

a) Comprobamos la posición relativa de las rectas.

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3} \Rightarrow \begin{cases} P_r(2,-1,-4) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,-3) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-z \\ -2x+y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow -2(2-z)+y-2z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4+2z+y-2z=1 \Rightarrow y=5 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=2-t \\ y=5 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(2,5,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,0,1) \end{cases}$$

Los vectores directores de ambas rectas no tienen coordenadas proporcionales.

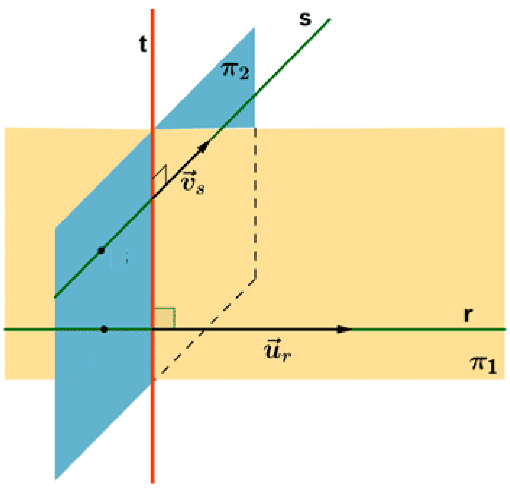
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-3) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{-3}{1}$$

por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.
Vemos si se cortan o se cruzan.

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} P_r(2,-1,-4) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,-3) \end{cases} \\ \begin{cases} Q_s(2,5,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,0,1) \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_rQ_s} = (2,5,0)-(2,-1,-4) = (0,6,4) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,-3) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{P_rQ_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[\overrightarrow{P_rQ_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}\right] = 0+18+0+4-0-6-0 = 16 \neq 0$$

Las rectas se cruzan.



Para hallar la recta "t" perpendicular común a *r* y *s* vamos a hallar $\overrightarrow{w_t}$ el vector director de *t* como el producto vectorial de los vectores directores de las rectas *r* y *s*. Luego hallamos el plano π_1 que contiene a *r* y con vector director $\overrightarrow{w_t}$. También el plano π_2 que contiene a la recta *s* y con vector director $\overrightarrow{w_t}$. La recta "t" es la intersección de ambos planos.

Hallamos el vector perpendicular a las rectas *r* y *s*.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,-3)\\ \overrightarrow{v_s}=(-1,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{w_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1,2,1)$$

Hallamos la ecuación de π_1.

$$\left.\begin{array}{l} r\equiv\begin{cases}P_r(2,-1,-4)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,-3)\end{cases}\\ \overrightarrow{w_t}=(1,2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P_r(2,-1,-4)\in\pi_1\\ \vec{u}=\overrightarrow{u_r}=(1,1,-3)\\ \vec{v}=\overrightarrow{w_t}=(1,2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \pi_1\equiv\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+4\\ 1 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$x-2-3y-3+2z+8-z-4-y-1+6x-12=0\Rightarrow \boxed{\pi_1\equiv 7x-4y+z-14=0}$$

Hallamos la ecuación de π_2.

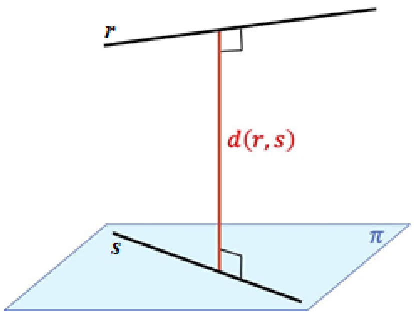
$$\left.\begin{array}{l} s\equiv\begin{cases}Q_s(2,5,0)\\ \overrightarrow{v_s}=(-1,0,1)\end{cases}\\ \overrightarrow{w_t}=(1,2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}Q_s(2,5,0)\in\pi_2\\ \vec{u}=\overrightarrow{v_s}=(-1,0,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{w_t}=(1,2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \pi_2\equiv\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$y-5-2z+y-5-2x+4=0\Rightarrow -2x+2y-2z-6=0\Rightarrow \boxed{\pi_2\equiv x-y+z+3=0}$$

La recta *t* perpendicular común a las rectas *r* y *s* tiene ecuación:

$$t\equiv\begin{cases}7x-4y+z-14=0\\ x-y+z+3=0\end{cases}$$

b) Hallamos el plano π_3 paralelo a *r* que contiene a *s*. La distancia entre las rectas será la distancia de cualquier punto de la recta *r* al plano π_3.

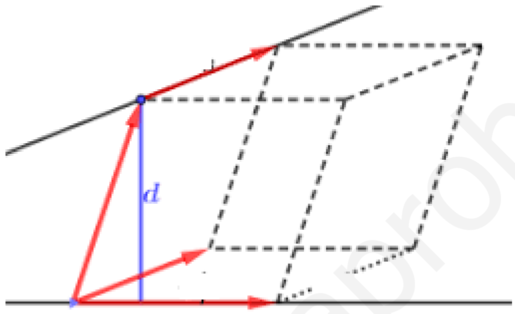


$$s \equiv \begin{cases} Q_s(2,5,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,0,1) \end{cases} \left. \begin{matrix} \\ \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,-3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} Q_s(2,5,0) \in \pi_2 \\ \vec{u} = \overrightarrow{v_s} = (-1,0,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{u_r} = (1,1,-3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \pi_3 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$y-5-z-3y+15-x+2=0 \Rightarrow \boxed{\pi_3 \equiv x+2y+z-12=0}$$

$$\left. \begin{matrix} P_r(2,-1,-4) \\ \pi_3 \equiv x+2y+z-12=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow d(r,s) = d(P_r,\pi_3) = \frac{|2+2(-1)-4-12|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{16}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{8\sqrt{6}}{3} \simeq 6.53\,u}$$

También se puede calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan con una fórmula.



$$\left. \begin{matrix} \left[\overrightarrow{P_rQ_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}\right] = 16 \\ \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{v_s} = (1,2,1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rQ_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{16}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \boxed{\frac{16}{\sqrt{6}}\,u}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.
a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.
b) (1.5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

a) X = El número de días que ha llovido en 100 días.
Es una variable binomial pues la probabilidad de que llueva un día es independiente de lo que pasó el días anteriores o posteriores.
La probabilidad de que llueva es siempre p = 0.45, de que no llueva es q = 0.55, el número de repeticiones es n = 100.

X = B(100, 0.45)

$$P(X=40)=\binom{100}{40}0.45^{40}\cdot 0.55^{60}=\frac{100!}{40!\cdot 60!}0.45^{40}\cdot 0.55^{60}=\text{No es posible con calculadora}$$

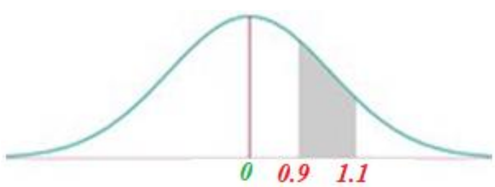
Con la herramienta "Wolfram Alpha" obtenemos $\simeq$ 0.0488

b) Como n · p = 100 · 0.45 = 45 > 5 y n · q = 100 · 0.55 > 5 aproximamos los valores de la probabilidad de la binomial mediante una normal de media $\mu = np = 100\cdot 0.45 = 45$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{100\cdot 0.45\cdot 0.55}\simeq 4.975$

X variable binomial se aproxima con una variable normal Y = N(45, 4.975)

$$P(X=40)=P(39.5\le Y\le 40.5)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{39.5-45}{4.975}\le Z\le\frac{40.5-45}{4.975}\right)=$$
$$=P(-1.1\le Z\le -0.9)=P(0.9\le Z\le 1.1)=$$
$$=P(Z\le 1.1)-P(Z\le 0.9)=0.8643-0.8159=\boxed{0.0484}$$

=



z	0,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7257
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8159
1,0	0,8413
1,1	0,8643
1,2	0,8849