Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad

Curso 2020-2021

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. **El estudiante ha de elegir 5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo **se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas**. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar las respuestas y las soluciones**.

PREGUNTAS

1. Sea la igualdad matricial $M \cdot X = N$, donde $M = \begin{pmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz X? (Justificar la respuesta). (0,5 puntos)
b) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ es la matriz M invertible? (1 punto)
c) ¿Puede ser $M \cdot N$ invertible para algún valor de $k \in \mathbb{R}$? (0,5 puntos)

2. Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$: (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} ax + \ \ y = 1 \\ x + ay = a \\ ax + 2y = 1 \end{array}\right\}.$$

3. Sean las rectas *r* y *s* dadas por $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases}$, $s : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$

a) Obtener un plano π que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s*. (1 punto)
b) Calcular la distancia entre las dos rectas. (1 punto)

4. Calcular un vector de módulo 3 que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1,1,-1)$ y $\vec{v} = (2,1,0)$.
(2 puntos)

5. a) Estudiar la continuidad de la siguiente función *f(x)* para $x \neq 0$ (con $a \in \mathbb{R}$): (0,5 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ a & si \quad x = 0 \end{cases}$$

b) Calcular el valor de *a* para que la función *f(x)* sea continua en $x = 0$. (1,5 puntos)

6. Sea la función $f\left(x\right)=\dfrac{2-x^2}{x^2-4}$.

a) Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de la función *f(x)*. (1,5 puntos)
b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de *f(x)*. (0,5 puntos)

7. Resolver la integral $\int \ln^2\left(x\right)dx$ (2 puntos)

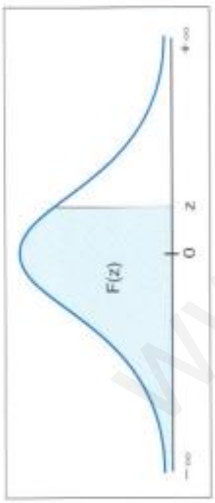
8. Dadas las funciones $f\left(x\right)=3x-x^2$ y $g\left(x\right)=x^2-2x$, calcular el área de la región limitada por sus gráficas. (2 puntos)

9. En un estudio a 1000 estudiantes europeos, 500 saben hablar inglés, 300 saben hablar español, y 100 de ellos hablan los dos idiomas. Se elige un estudiante al azar del estudio:
a) Calcular la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas. (1 punto)
b) Calcular la probabilidad de que hable español, sabiendo que habla inglés. (1 punto)

10. La duración de un Smartphone se ajusta a una normal de media 3 años y desviación típica de 1 año. El fabricante da una garantía de 3,5 años a sus Smartphone.
a) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure menos que la garantía. (1 punto)
b) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure más de 5 años. (1 punto)

Tabla de distribución normal *N(0,1)*

$F(z)=P(Z\leq z)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

1. Sea la igualdad matricial $M \cdot X = N$, donde $M = \begin{pmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz X? (Justificar la respuesta). (0,5 puntos)
b) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ es la matriz M invertible? (1 punto)
c) ¿Puede ser $M \cdot N$ invertible para algún valor de $k \in \mathbb{R}$? (0,5 puntos)

a) La matriz *X* es de dimensiones *m x n*.

$$M \cdot X = N$$
$$3 \times \boxed{3 \cdot m} \times n \to 3 \times n$$

Para que sea posible el producto debe ser *m = 3*. Y el resultado debe ser una matriz N de dimensiones 3 x 2 luego *n = 2*.

La matriz X es de dimensiones 3 x 2. Debe tener 3 filas y 2 columnas.

b) Para ser invertible debe tener determinante no nulo.

$$|M| = \begin{vmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 2k - 2 + 2k + 2k - k = k^2 + k - 2$$

$$|M| = 0 \Rightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ o \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

El valor de *k* debe ser distinto de 1 y de –2.

c) Miramos las dimensiones del producto M · N.

$$M \cdot N$$
$$3 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \to 3 \times 2$$

La matriz resultado del producto tiene 3 filas y 2 columnas, no es cuadrada, por lo que no es invertible para ningún valor de k.

2. Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$: (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} ax+\ \ y=1 \\ x+ay=a \\ ax+2y=1 \end{array}\right\}.$$

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A/B e igualamos a cero.

$$|A/B|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix}=a^2+a^2+2-a^2-1-2a^2=-a^2+1$$

$$|A/B|=0 \Rightarrow -a^2+1=0 \Rightarrow a=\sqrt{1}=\pm 1$$

Analizamos 3 casos distintos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq -1$

En este caso el determinante de A/B es no nulo y el rango de A/B es 3. Como el rango de A es como mucho 2, tenemos que los rangos son distintos y el sistema es incompatible.

CASO 2. $a=1$

En este caso el determinante de A/B es nulo y su rango no es 3.

La matriz A/B queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 1ª el menor de orden 2 que queda tiene determinante no nulo, por lo que el rango de A/B es 2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0$

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y tiene rango 2, pues el menor de orden 2 que resulta de quitar la 1ª fila tiene determinante no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$.

Los rangos de A y de A/B son iguales a 2, igual que el número de incógnitas (2), el sistema es compatible determinado (una única solución).

Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} x+\ y=1 \\ x+y=1 \\ x+2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ x+2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=1-y \\ x+2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-y+2y=1 \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{x=1-0=1}$$

La solución es *x = 1*; *y = 0*.

CASO 3. $a=-1$

El determinante de A/B es nulo y su rango no es 3.

La matriz A/B queda $A/B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 1ª el menor de orden 2 que queda tiene determinante no nulo, por lo que el rango de A/B es 2. $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1+2=1\neq 0$

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y tiene rango 2, pues el menor de orden 2 que resulta de quitar la 1ª fila tiene determinante no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1=1\neq 0$.

Los rangos de A y de A/B son iguales a 2, igual que el número de incógnitas (2), el sistema es compatible determinado (una única solución).

Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} -x+\ y=1 \\ x-y=-1 \\ -x+2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=-1 \\ -x+2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=-1+y \\ -x+2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-y+2y=1 \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{x=-1+0=-1}$$

La solución es *x = –1*; *y = 0*.

3. Sean las rectas r y s dadas por $r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-3\lambda \\ z=1 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=4 \end{cases}$

a) Obtener un plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s. (1 punto)
b) Calcular la distancia entre las dos rectas. (1 punto)

a) Para definir un plano necesito un punto por el que pase y dos vectores directores. Como contiene a la recta r, nos sirve un punto de r → $P_r(1,2,1)$ y como vectores directores del plano nos sirven el director de la recta r $\overrightarrow{v_r}=(1,-3,0)$ y el de la recta s.

$$r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-3\lambda \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,2,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,-3,0) \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-x-z \\ x-y-z=4 \end{cases} \Rightarrow x-2+x+z-z=4 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=2-3-z \Rightarrow y=-1-z \Rightarrow s:\begin{cases} x=3 \\ y=-1-\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(3,-1,0) \\ \overrightarrow{u_s}=(0,-1,1) \end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{u_s}=(0,-1,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{v_r}=(1,-3,0) \\ P_r(1,2,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow y-2+z-1+3x-3=0 \Rightarrow \boxed{\pi:3x+y+z-6=0}$$

b) Las dos rectas no son paralelas pues las coordenadas de sus vectores directores no son proporcionales.

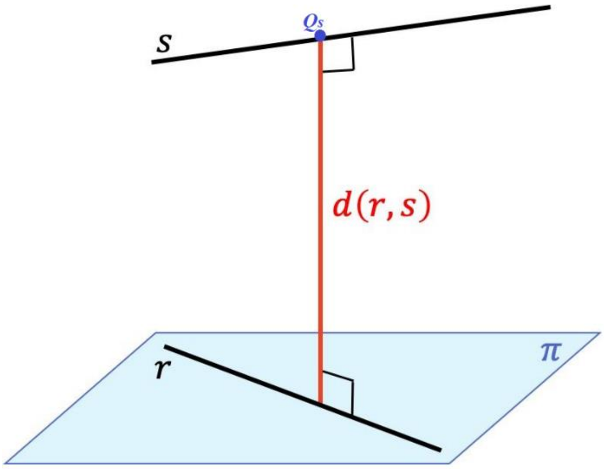
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(0,-1,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,-3,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{0}{1}\neq\frac{-1}{-3}\neq\frac{1}{0}$$

Comprobamos si las rectas se cortan o se cruzan.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(1,2,1) \\ Q_s(3,-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s}=(3,-1,0)-(1,2,1)=(2,-3,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_rQ_s}=(2,-3,-1) \\ \overrightarrow{u_s}=(0,-1,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,-3,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{P_rQ_s},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{v_r}\right]=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=-3-1+6=2\neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas r y s se cruzan.



La distancia entre las rectas es la distancia de un punto cualquiera de la recta s, por ejemplo $Q_s(3,-1,0)$ al plano π hallado en el apartado anterior.

$$\left.\begin{array}{l} Q_s(3,-1,0) \\ \pi : 3x+y+z-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,s)=d(Q_s,\pi)=\frac{|9-1+0-6|}{\sqrt{3^2+1^2+1^2}}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{11}} \simeq 0.60\,u}$$

4. Calcular un vector de módulo 3 que sea perpendicular a los vectores $\vec{u}=(1,1,-1)$ y $\vec{v}=(2,1,0)$.
(2 puntos)

Si es perpendicular a $\vec{u}=(1,1,-1)$ y $\vec{v}=(2,1,0)$ entonces es proporcional al producto vectorial de ambos.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(1,1,-1)\\ \vec{v}=(2,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=(1,-2,-1)$$

El vector que nos piden es:

$$\left.\begin{array}{r}\vec{w}=a\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)=(a,-2a,-a)\\ \left|\vec{w}\right|=3\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt{a^2+(-2a)^2+(-a)^2}=3\Rightarrow \sqrt{6a^2}=3\Rightarrow \sqrt{6}\cdot a=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\pm\frac{3}{\sqrt{6}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\Rightarrow \boxed{\begin{cases}\vec{w}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2},-\sqrt{6},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\\ o\\ \vec{w}=\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{6},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\end{cases}}$$

5. a) Estudiar la continuidad de la siguiente función *f(x)* para $x \neq 0$ (con $a \in \mathbb{R}$): (0,5 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ a & si \quad x = 0 \end{cases}$$

b) Calcular el valor de *a* para que la función *f(x)* sea continua en $x = 0$. (1,5 puntos)

a) La función es continua en $x \neq 0$ pues es un cociente de una función continua en el numerador: diferencia de una exponencial y una polinómica y el denominador es una polinómica que se anula solo en $x = 0$.
La función *f(x)* es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b)
Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse que $f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{e^0 - 1 - 0}{0^2} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L'Hôpital) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{2x} =$$
$$= \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L'Hôpital) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{e^0 - 1 - 0}{0^2} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L'Hôpital) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{2x} =$$
$$= \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L'Hôpital) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \\ f(0) = a \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{1}{2} \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

El valor de *a* para que la función sea continua en $x = 0$ es $a = \frac{1}{2}$.

6. Sea la función $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x^2-4}$.

a) Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de la función *f(x)*. (1,5 puntos)

b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de *f(x)*. (0,5 puntos)

a) El dominio de la función $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x^2-4}$ son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

Dominio $f(x)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Asíntota vertical. $x=a$

¿*x* = *–2*?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{2-x^2}{x^2-4}=\frac{2-(-2)^2}{(-2)^2-4}=\frac{-2}{0}=\infty$$

La recta *x* = *–2* es asíntota vertical.

¿*x* = *2*?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2-x^2}{x^2-4}=\frac{2-2^2}{2^2-4}=\frac{-2}{0}=\infty$$

La recta *x* = *2* es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2-x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-1}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\frac{2}{\infty}-1}{1-\frac{4}{\infty}}=\frac{0-1}{1-0}=-1$$

La recta *y* = *–1* es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene, pues existe asíntota horizontal.

Para la monotonía y extremos utilizamos la derivada de la función.

$$f(x)=\frac{2-x^2}{x^2-4} \Rightarrow f'(x)=\frac{-2x\left(x^2-4\right)-2x\left(2-x^2\right)}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{\cancel{-2x^3}+8x-4x+\cancel{2x^3}}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{4x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

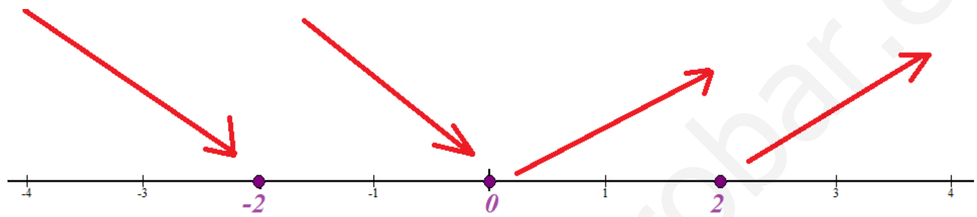
$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{4x}{\left(x^2-4\right)^2}=0 \Rightarrow x=0$$

Tenemos un punto crítico en *x* = *0* y los dos valores excluidos del dominio: *x* = *–2* y *x* = *2*. Vemos como evoluciona el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty,-2)$ tomamos *x* = *–3* y la derivada vale $f'(-3)=\dfrac{-12}{(9-4)^2}<0$. La función decrece en $(-\infty,-2)$.

- En $(-2,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{-4}{(1-4)^2}<0$. La función decrece en $(-2,0)$.
- En $(0,2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{4}{(1-4)^2}>0$. La función crece en $(0,2)$.
- En $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=\dfrac{12}{(9-4)^2}>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema:

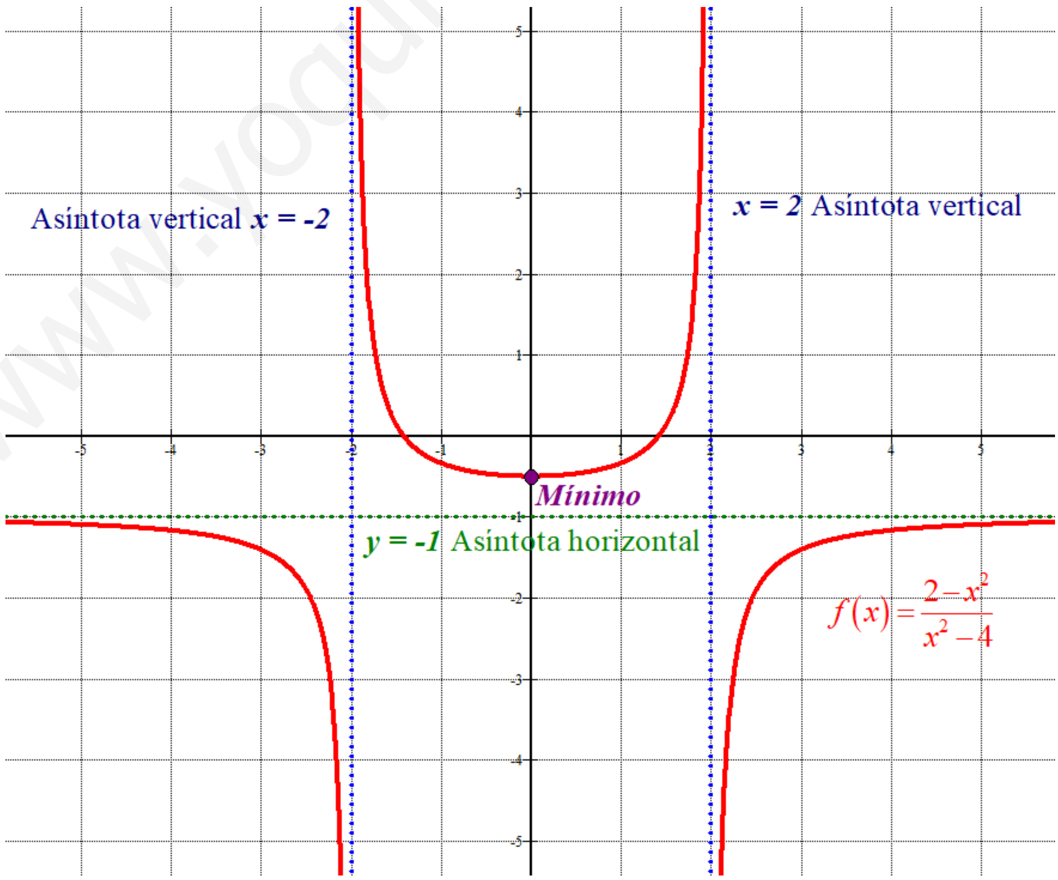


La función decrece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y crece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$.

Como $f(0)=\dfrac{2-0^2}{0^2-4}=-\dfrac{1}{2}$ las coordenadas del punto mínimo relativos son $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$

b)



7. Resolver la integral $\int \ln^2(x)\,dx$ (2 puntos)

$$\int \ln^2(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln^2(x) \rightarrow du = 2\ln(x)\frac{1}{x}dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x\ln^2(x) - \int \cancel{x}\, 2\ln(x)\frac{1}{\cancel{x}}dx =$$

$$= x\ln^2(x) - 2\int \ln(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x\ln^2(x) - 2\left[x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx \right] =$$

$$= x\ln^2(x) - 2\left[x\ln(x) - \int dx \right] = x\ln^2(x) - 2\left[x\ln(x) - x \right] = \boxed{x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + K}$$

8. Dadas las funciones $f(x)=3x-x^2$ y $g(x)=x^2-2x$, calcular el área de la región limitada por sus gráficas. (2 puntos)

Averiguo los puntos de corte de ambas funciones para encontrar el inicio y final de la región delimitada por sus gráficas.

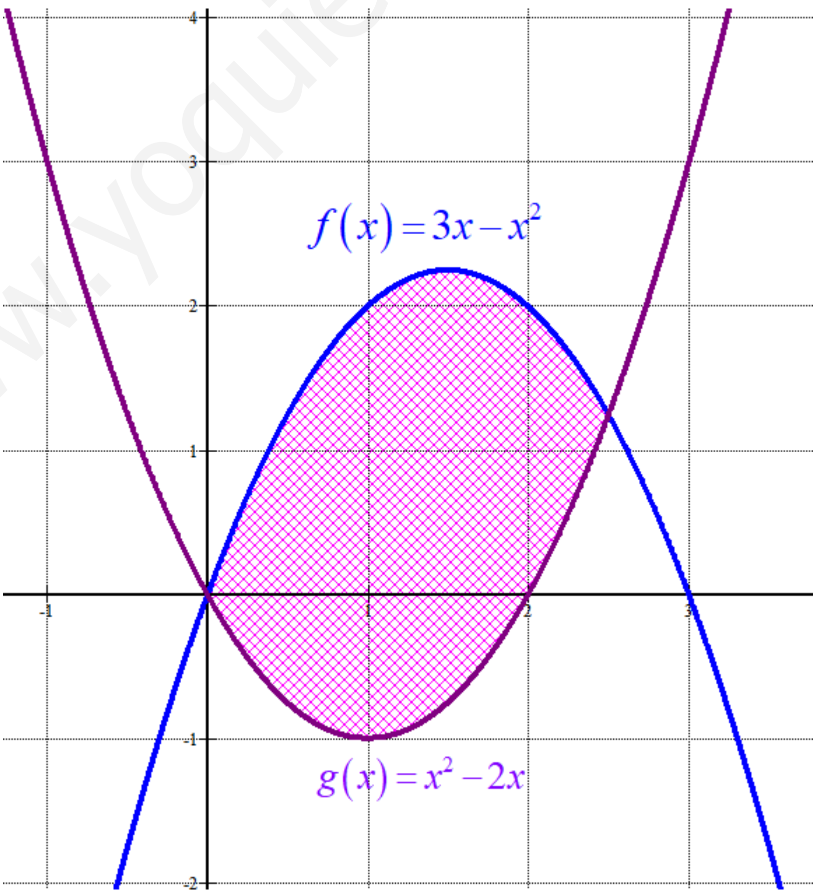
$$f(x)=g(x)\Rightarrow 3x-x^2=x^2-2x\Rightarrow 0=2x^2-5x\Rightarrow x(2x-5)=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ 2x-5=0\Rightarrow x=\dfrac{5}{2}=2.5 \end{cases}$$

El área de la región limitada por sus gráficas es el valor absoluto de la integral definida entre $x=0$ y $x = 2.5$ de $f(x) – g(x)$.

$$Área=\left|\int_0^{2.5} f(x)-g(x)\,dx\right|=\left|\int_0^{2.5} 3x-x^2-\left(x^2-2x\right)dx\right|=\left|\int_0^{2.5} 5x-2x^2dx\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{5x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}\right]_0^{2.5}\right|=\left|\left[\frac{5\cdot 2.5^2}{2}-2\frac{2.5^3}{3}\right]-\left[\frac{5\cdot 0^2}{2}-2\frac{0^3}{3}\right]\right|=\boxed{\frac{125}{24}\simeq 5.208\,u^2}$$

Aunque no lo piden ponemos el dibujo para comprobar visualmente el resultado.



9. En un estudio a 1000 estudiantes europeos, 500 saben hablar inglés, 300 saben hablar español, y 100 de ellos hablan los dos idiomas. Se elige un estudiante al azar del estudio:
a) Calcular la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas. (1 punto)
b) Calcular la probabilidad de que hable español, sabiendo que habla inglés. (1 punto)

Hacemos una tabla de contingencia.

	Hablan español	No hablan español	
Hablan inglés	**100**		**500**
No hablan inglés			
	300		**1000**

Completamos la tabla.

	Hablan español	No hablan español	
Hablan inglés	**100**	**400**	**500**
No hablan inglés	**200**	**300**	**500**
	300	**700**	**1000**

a) Solo hay 300 de los 1000 estudiantes que no hablan ninguno de los dos idiomas, por lo que son 700 los que hablan alguno de los dos idiomas.

$$P(\text{Hable alguno de los dos idiomas}) = \frac{700}{1000} = \boxed{\frac{70}{100} = 0.7}$$

b) Hay 500 estudiantes que hablan inglés, de los cuales solo 100 hablan español.

$$P(\text{Hable español/ Habla inglés}) = \frac{100}{500} = \boxed{\frac{1}{5} = 0.2}$$

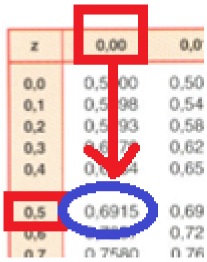
10. La duración de un Smartphone se ajusta a una normal de media 3 años y desviación típica de 1 año. El fabricante da una garantía de 3,5 años a sus Smartphone.
a) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure menos que la garantía. (1 punto)
b) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure más de 5 años. (1 punto)

X = Duración de un smartphone en años. X = N(3, 1)

a)

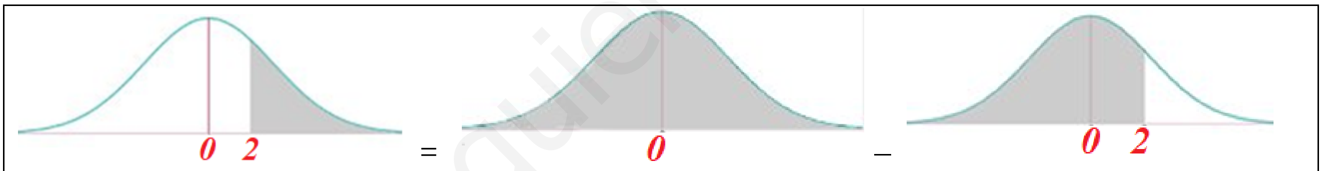
$$P(X<3.5)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{3.5-3}{1}\right)=P(Z<0.5)=$$

$$=\{\text{Miramos en la tabla}\}=\boxed{0.6915}$$



b)

$$P(X\geq 5)=\{Tipificamos\}=P\left(Z\geq\frac{5-3}{1}\right)=P(Z\geq 2)=\ldots$$



$$\ldots=1-P(Z\leq 2)=\{\text{Miro en la tabla}\}=1-0.9772=\boxed{0.0228}$$