EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD DE CASTILLA LA MANCHA. CURSO 2020/2021 (EBAU) JUNIO 2021. Materia: MATEMATICAS II.

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2'5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Calcula razonadamente el determinante de A^T, es decir, la matriz traspuesta de A.
b) [1'5 puntos] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X\cdot A + 3\cdot A = B$.

a) El determinante de A^T es igual al de terminante de A

$$\left|A^T\right| = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1$$

b)

$$XA = B-3A \Rightarrow XAA^{-1} = (B-3A)A^{-1} \Rightarrow XI = (B-3A)A^{-1} \Rightarrow X = (B-3A)A^{-1} \Rightarrow Como\ |A| = 1 \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

2.- a) [1'75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in R$:

$$\begin{cases} x + y + z = a + 1 \\ ax \quad + z = a - 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}.$$

b) [0'75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para a = 0, si es posible.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2a-2 \Rightarrow Si\ A = 0 \Rightarrow 2a-2 = 0 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - [1] \Rightarrow A \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$Si\ a = 1$

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

Continuación del Problema 2

b)

Si $a = 0 \Rightarrow$ *Sistema Compatible Deter minado*

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow z = -1 \Rightarrow 2x + 2\cdot(-1) = 4 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 3 + y - 1 = 1 \Rightarrow y = -1$$

Solución $\Rightarrow (x\,,\ y\,,z) = (3\,,\ -1,\ -1)$

3.- a) [1'25 punto] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{2}{3 + e^x}dx$.

(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$:)

b) [1'25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-x + 1}{x^2 + 3}dx$.

a)

$$\int \frac{2}{3+e^x}dx = \int \frac{2}{(3+t)}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{2}{t(3+t)}dt = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t} - \frac{2}{3}\int \frac{dt}{3+t} = \frac{2}{3}\cdot \ln t - \frac{2}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{2}{3}\cdot \ln t - \frac{2}{3}\cdot \ln u = \frac{2}{3}\cdot \ln \frac{t}{u} = \frac{2}{3}\cdot \ln \frac{e^x}{e^x+3} = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{e^x}{e^x+3}\right)^2} + C$$

$$3 + t = u \Rightarrow dt = du$$

$$e^x = t \Rightarrow e^x\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \qquad \frac{2}{t(3+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{3+t} \Rightarrow \frac{A(3+t)+Bt}{t(3+t)} \Rightarrow A(3+t)+Bt = 2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow A(3+0) + B\cdot 0 = 2 \Rightarrow 3A = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{3} \\ t = -3 \Rightarrow A\left[3+(-3)\right] + B\cdot(-3) = 2 \Rightarrow -3B = 2 \Rightarrow B = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{t(3+t)} = \frac{\frac{2}{3}}{t} - \frac{\frac{2}{3}}{3+t}$$

b)

$$\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx = \int \frac{-x}{x^2+3}dx + \int \frac{dx}{x^2+3} = -\int \frac{\frac{dt}{2}}{t} + \int \frac{dx}{3\left(\frac{x^2}{3}+1\right)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = -\frac{1}{2}\cdot \ln t + \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{3}\,du}{u^2+1} =$$

$$x^2 + 3 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2} \qquad \frac{x}{\sqrt{3}} = u \Rightarrow x = \sqrt{3}u \Rightarrow dx = \sqrt{3}\,du$$

$$\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx = -\frac{1}{2}\cdot \ln\left(x^2+3\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\,u = \ln\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{3}} = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{3}} + K$$

4.- a) [1'25 puntos] Sea el punto P(1, 0, 1) y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r.

b) [1'25 puntos] Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 1 - 2a\lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in R$ para que las dos rectas sean paralelas.

a) Hallaremos un plano π que contenga el punto P y que sea perpendicular a la recta, siendo el vector director del plano el de la recta r y es perpendicular al vector PG, siendo G el punto genérico del plano a hallar, y su producto escalar es nulo siendo esa es la ecuación buscada; el punto Q intersección de la recta y el plano hallado es el punto buscado, el módulo del vector PQ es la distancia pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{PG} = (x\,,y\,,z) - (1,0,1) = (x-1,y\,,z-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow (1,1,-1)\cdot(x-1,y\,,z-1) = 0$$

$$x - 1 + y - z + 1 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y - z = 0$$

Continuación del Problema 4

$$r \equiv \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases} \Rightarrow (-1+\lambda)+\lambda-(1-\lambda)=0 \Rightarrow -1+\lambda+\lambda-1+\lambda=0 \Rightarrow -2+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -1+\frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 1-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow Q\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)-(1,\ 0,1) = \left(-\frac{1}{3}-1,\ \frac{2}{3},\frac{1}{3}-1\right) = \left(-\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow d(P,r) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$d(P,r) = \sqrt{\frac{16+4+4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3}\ u$$

b) Dos rectas son paralelas si su vectores directores son iguales o proporcionales y no hay ningún punto común a las dos (serian recta coincidentes)

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (2,-2a,2) \\ \overrightarrow{v_s} = (a,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{-2a}{-1} = \frac{2}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \\ \frac{-2a}{-1} = \frac{2}{1} \Rightarrow -2a = -2 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \begin{cases} s \equiv \begin{cases} x = 0+2\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 0+2\lambda \end{cases} \Rightarrow P(0,1,0) \\ t \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = -1-\alpha \\ z = 2+\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1+\alpha \Rightarrow \alpha = -1 \\ 1 = -1-\alpha \Rightarrow \alpha = 2 \\ 0 = 2+\alpha \Rightarrow \alpha = -2 \end{cases} \Rightarrow \end{cases}$$

P es punto de la recta s pero no es de la recta t $\Rightarrow$ *Para* $a = 1$ *las rectas s y t son paralelas*

5.- Sean los puntos A(0, 0, 1), B(2, 1, 0), C(1, 1, 1) y D(1, 1, 2).
[1'25 puntos] Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
[1'25 puntos] Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C, y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D.

a) El volumen de un tetraedro es la sexta parte del producto mixto de los vectores AB, AC y AD

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2,1,0)-(0,0,1) = (2,1,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (1,1,1)-(0,0,1) = (1,1,0) \\ \overrightarrow{AD} = (1,1,2)-(0,0,1) = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\cdot\left|(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|(-1)\cdot(3-2)\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|(-1)\right| = \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6}\ u^3$$

b) Los vectores AB , AC y AG, donde G es el punto genérico del plano π que queremos hallar, son coplanarios y el volumen del paralelepípedo formado por ellos (su producto mixto) nulo y la ecuación pedida.
El vector director del plano hallado es el de la recta r buscada que pasa por el punto D

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2,1,0)-(0,0,1) = (2,1,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (1,1,1)-(0,0,1) = (1,1,0) \\ \overrightarrow{AG} = (x,y,z)-(0,0,1) = (x,y,z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(z-1)-y+x-(z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$x-y+(z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x-y+z-1 = 0$$

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (1,-1,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$$

6.- a) [1 punto] Sea la función f(x) = $ax^3 - 2x^2 - x + b$ con a, b $\in$ R. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto (1, 2) y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

b) [1'5 puntos] Sea la función f(x) $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ b\cdot e^x & x \geq 0 \end{cases}$, con a, b $\in$ R. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en x = 0.

a)

$$f'(x) = 3ax^2 - 4x - 1$$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow a\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 - 1 + b = 2 \Rightarrow a - 3 + b = 2 \Rightarrow a + b = 5 \\ f'(1) = 1 \Rightarrow 3a\cdot 1^2 - 4\cdot 1 - 1 = 1 \Rightarrow 3a - 5 = 1 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \end{cases} \Rightarrow 2 + b = 5 \Rightarrow b = 3$$

b)

$$Continuidad \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0^2 - a\cdot 0 + 1 = 1 \\ f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = b.e^0 = b\cdot 1 = b \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow b = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - a & x < 0 \\ b\cdot e^x & x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 2\cdot 0 - a = -a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 1.e^0 = 1\cdot 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1$$

7.- a) [1 punto] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2} - 1}{2x - 4}$.

b) [1'5 puntos] Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} & x < 1 \\ \dfrac{2x - 1}{x - 2} & \text{si} & 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & \text{si} & x > 3 \end{cases}$, determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

a)

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2} - 1}{2x - 4} = \frac{e^{2-2} - 1}{2\cdot 2 - 4} = \frac{e^0 - 1}{4 - 4} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}}{2} = \frac{e^{2-2}}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} & x < 1 \\ \dfrac{2x - 1}{x - 2} & \text{si} & 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & \text{si} & x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 \Rightarrow \textit{Existe para toda } x \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = \dfrac{2\cdot 2 - 1}{2 - 2} = \dfrac{3}{0} \Rightarrow \textit{Existe para toda } x - \{2\} \Rightarrow Dom\ f(x) = \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ 2e^x \Rightarrow \textit{Existe para toda } x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1^2 - 2 = 1 \\ f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{2\cdot 1 - 1}{1 - 2} = \dfrac{1}{-1} = -1 \\ f(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \dfrac{2\cdot 3 - 1}{3 - 2} = \dfrac{5}{1} = 5 \end{cases} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1^2 - 2 = 1 \\ f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{2\cdot 1 - 1}{1 - 2} = \dfrac{1}{-1} = -1 \\ f(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \dfrac{2\cdot 3 - 1}{3 - 2} = \dfrac{5}{1} = 5 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2\cdot e^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \textit{Discontinuidad en } x = 1 \Rightarrow f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 \\ \textit{Discontinuidad en } x = 3 \Rightarrow f(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = = 5 \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2e^3 \end{cases} \quad \textit{Asíntota vertical en } x = 2$$

8.- a) Se sabe que el 20% de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80% sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50% ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90% ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

a.1) [0'5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

a.2) [0'75 puntos] Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80% de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

b.1) [0'5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

b.2) [0'75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

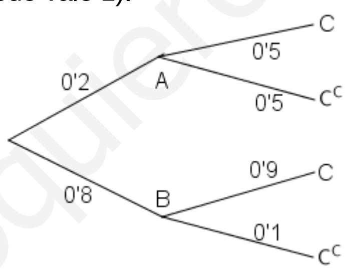
a) Se sabe que el 20% de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80% sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50% ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90% ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

(a.1) ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

Llamemos A, B, C, y C^C, a los sucesos siguientes, "comparte fotografías", "no comparte fotografías", "comenta alguna fotografía" y "no comenta alguna fotografía", respectivamente.

Datos del problema: p(A) = 20% = 0'2; p(B) = 80% = 0'8; p(C/B) = 50% = 0'5; p(C/A) = 90% = 0'9, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(halla comentado alguna fotografía) = p(C)**.

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Me piden **p(C) =** p(A)·p(C/A) + p(B)·p(C/B) = (0'2)·(0'5) + (0'8)·(0'9)**= 41/5 = 0'82**.

(a.2)

Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

Me piden **p(compartir fotos sabiendo que nunca ha comentado fotos) = p(A/C^C)**.

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(A/C^C) =} \frac{p\left(A \cap C^C\right)}{p(C^C)} = \frac{p(A)\cdot p(C^C/A)}{1 - p(C)} = \frac{(0'2)\cdot(0'5)}{1 - 0'82} \mathbf{= 5/9 \cong 0'555556}.$$

(b)

Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80% de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

(b.1)

¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

Recordamos que si realizamos **n** veces (4) un experimento en el que podemos obtener éxito, F = identificas de forma correcta, con probabilidad **p** (p(F) = 80% = 0'8) y fracaso, F^C, con probabilidad **q** (q = 1 - p = = 1 - 0'8 = 0'2), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(4; 0'8)**.

Es decir nuestra variable **X sigue una binomial B(n;p)** = **B(4; 0'8)**.
En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (4 \text{ sobre } k)\cdot 0'8^k\cdot 0'2^{(4-k)} = \binom{4}{k}\cdot 0'8^k\cdot 0'2^{(4-k)}.}$$

****** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n - k)!) con n! el factorial de "n". En la calculadora " n tecla **nCr** k "

Me piden p(X = 4) = $\binom{4}{4}\cdot 0'8^4\cdot 0'2^{(0)}$ **= 0'4096.**

Utilizando la tabla de la binomial sale lo mismo **p(X = 4) = 0'4096.**
(b.2)
¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

Me piden p(X ≥ 1) = {suceso contrario} = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - $\binom{4}{0}\cdot 0'8^0\cdot 0'2^{(4)}$ **=**

= 1 - 0'0016 (coincide con la probabilidad de la tabla) **= 0'9984**.