Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2020-2021

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} ax+(a-2)y=a-2 \\ ax+\left(a^2-2a\right)y+2z=a \\ 3ax+\left(a^2-4\right)y+z=4a-4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores de t para que se cumpla $\left|A\cdot B^{-1}\right|=1$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r\equiv\begin{cases} 2y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s\equiv\frac{x-6}{-1}=\frac{y-6}{5}=\frac{z-2}{2}$$

(2.5 puntos)

P4) Halla un plano que sea tangente a la esfera de radio 3 y centro (0,0,0), y que corte perpendicularmente a la recta

$$r\equiv\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+4}{-2}$$

Encuentra el punto de tangencia del plano con la esfera, y calcula la ecuación continua de la recta que pasa por ese punto y corta perpendicularmente a r.

(2.5 puntos)

P5) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}$$

(1.25 puntos)

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x}$$

(1.25 puntos)

P6) Se considera la función $f(x)=\log_2\left[\sin\frac{\pi(x+1)}{4}+2^{\frac{x-5}{2}}\right]$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo [6, 7].

(1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha\in(6,7)$ tal que $f(\alpha)=0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.5 puntos)

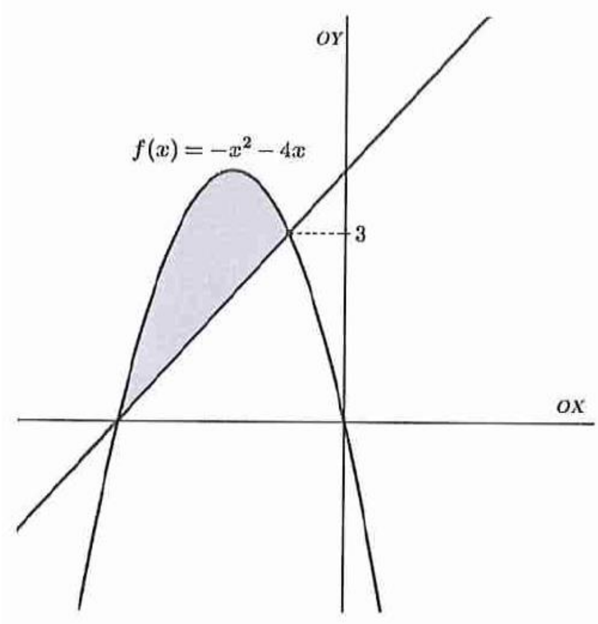
P7) Se considera la función $f(x)=\sqrt{x+\sin\frac{\pi x}{2}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,3]$. (0.75 puntos)

b) Demuestra que existen dos valores $\alpha\in(1,2)$ y $\beta\in(2,3)$ tal que $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.75 puntos)

P8) Teniendo en cuenta los datos que aparecen en el siguiente gráfico, calcula el área de la región sombreada.



(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} ax+(a-2)y=a-2 \\ ax+(a^2-2a)y+2z=a \\ 3ax+(a^2-4)y+z=4a-4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} a & a-2 & 0 & a-2 \\ a & a^2-2a & 2 & a \\ 3a & a^2-4 & 1 & 4a-4 \end{array}\right)$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\text{Sacar "a" factor común en} \\ \text{columna } 1^{\text{a}}\end{array}\right\}=a\begin{vmatrix} 1 & a-2 & 0 \\ 1 & a(a-2) & 2 \\ 3 & (a-2)(a+2) & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Sacar "}a-2\text{" factor común en} \\ \text{columna } 2^{\text{a}}\end{array}\right\}=a(a-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 3 & a+2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A|=a(a-2)(a+6-1-2a-4)=a(a-2)(1-a)$$

$$|A|=0\Rightarrow a(a-2)(1-a)=0\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ a=2 \\ a=1 \end{cases}$$

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a\neq 0, a\neq 2\ y\ a\neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de A/B y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible determinado (una única solución).

Obtenemos la solución por el método de Cramer.

$$|A|=a(a-2)(1-a)$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a-2 & a-2 & 0 \\ a & a(a-2) & 2 \\ 4a-4 & (a-2)(a+2) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\cancel{(a-2)}\begin{vmatrix} a-2 & 1 & 0 \\ a & a & 2 \\ 4a-4 & a+2 & 1 \end{vmatrix}}{a\cancel{(a-2)}(1-a)}=\frac{a^2-2a+8a-8-a-2a^2+8}{a(1-a)}$$

$$\boxed{x=\frac{-a^2+5a}{a(1-a)}=\frac{a(5-a)}{a(1-a)}=\frac{5-a}{1-a}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a & 2 \\ 3a & 4a-4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\cancel{a}\begin{vmatrix} 1 & a-2 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 3 & 4a-4 & 1 \end{vmatrix}}{\cancel{a}(a-2)(1-a)}=\frac{a+6a-12-a+2-8a+8}{(a-2)(1-a)}$$

$$\boxed{y=\frac{-2a-2}{(a-2)(1-a)}=\frac{2a+2}{(a-2)(a-1)}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & a-2 & a-2 \\ a & a(a-2) & a \\ 3a & (a-2)(a+2) & 4a-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\cancel{a}\,\cancel{(a-2)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & a-2 \\ 1 & a & a \\ 3 & a+2 & 4a-4 \end{vmatrix}}{\cancel{a}\,\cancel{(a-2)}(1-a)}=\{\text{Fila 2ª} - \text{Fila 1ª}\}=$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a-2 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 3 & a+2 & 4a-4 \end{vmatrix}}{1-a}=\{\text{Columna 2ª} - \text{Columna 1ª}\}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a-2 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 3 & a-1 & 4a-4 \end{vmatrix}}{1-a}=\frac{(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4a-4 \end{vmatrix}}{1-a}$$

$$\boxed{z=\frac{-\cancel{(1-a)}(4a-4-3a+6-2)}{\cancel{1-a}}=-a}$$

La solución es $x=\dfrac{5-a}{1-a}$, $y=\dfrac{2a+2}{(a-2)(a-1)}$, $z=-a$.

CASO 2. $a=0$

En este caso la matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \end{array}\right)$

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Divido fila } 2^a \\ \text{entre } 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observando la matriz ampliada equivalente a la de partida tenemos que el rango de A es 2 al igual que el rango de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).
Lo resolvemos partiendo del sistema equivalente obtenido con las transformaciones de la matriz ampliada asociada.

$$\begin{cases} -2y=-2 \\ 2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=1} \\ \boxed{z=0} \end{cases} \Rightarrow x \text{ es cualquier valor}$$

Las infinitas soluciones son: $x = t, y = 1, z = 0$, con $t \in \mathbb{R}$

CASO 3. $a=1$

En este caso la matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$

La transformamos para establecer el rango de A y A/B.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \\ \text{Nueva fila } 2^a \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 3 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Observando la matriz ampliada equivalente a la de partida tenemos que el rango de A es 2 y el rango de A/B es 3 por lo que el sistema es incompatible (sin solución)

CASO 4. $a = 2$

En este caso la matriz ampliada queda $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$

La transformamos para establecer el rango de A y A/B.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Fila } 2^{a} - 2 \cdot \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \\ \text{Nueva fila } 2^{a} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} \text{Fila } 3^{a} - 3 \cdot \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 6 & 0 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \\ \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\text{Divido fila } 2^{a} \text{ por } 2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 2^{a} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \\ \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Observando la matriz ampliada equivalente a la de partida tenemos que el rango de A es 2 y el rango de A/B es 3 por lo que el sistema es incompatible (sin solución)

Resumiendo: Para $a \neq 0, a \neq 2$ *y* $a \neq 1$ el sistema tiene una única solución, para $a = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones y para $a = 1$ o $a = 2$ el sistema no tiene solución.

P2) Calcula los valores de t para que se cumpla $\left|A\cdot B^{-1}\right|=1$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & t & -t\\ 2t-1 & t-1 & t\\ t-2 & 0 & t-2\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}t-1 & t & -t\\ 1-2t & 2t & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Como el determinante de un producto es el producto de los determinantes y el determinante de la matriz inversa es el inverso del determinante lo aplicamos a la expresión $\left|A\cdot B^{-1}\right|=1$.

$$\left.\begin{array}{r}\left|A\cdot B^{-1}\right|=|A|\cdot\left|B^{-1}\right|=|A|\cdot\dfrac{1}{|B|}=\dfrac{|A|}{|B|}\\ \left|A\cdot B^{-1}\right|=1\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{|A|}{|B|}=1\Rightarrow|A|=|B|$$

Basta hallar el determinante de A y de B y sustituir en la expresión anterior.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & t & -t\\ 2t-1 & t-1 & t\\ t-2 & 0 & t-2\end{vmatrix}=\left\{\text{Sacar factor común "}t-2\text{" en fila 3ª}\right\}=(t-2)\begin{vmatrix}1 & t & -t\\ 2t-1 & t-1 & t\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\text{Columna 1ª }-\text{ Columna 3ª}\right\}=(t-2)\begin{vmatrix}1+t & t & -t\\ t-1 & t-1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\left\{\text{Fila 2ª }-\text{ Fila 3ª}\right\}=$$

$$=(t-2)\begin{vmatrix}1+t & t & -t\\ t-1 & t-1 & t-1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\left\{\text{Sacar "}t-1\text{" factor común en fila 2ª}\right\}=(t-2)(t-1)\begin{vmatrix}1+t & t & -t\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=(t-2)(t-1)[1+t-t]=(t-2)(t-1)$$

$$|A|=(t-2)(t-1)$$

$$|B|=\begin{vmatrix}t-1 & t & -t\\ 1-2t & 2t & -1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=\left\{\text{Columna 2ª + Columna 3ª}\right\}=\begin{vmatrix}t-1 & 0 & -t\\ 1-2t & 2t-1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\text{Sacar "}2t-1\text{" factor común en columna 2ª}\right\}=(2t-1)\begin{vmatrix}t-1 & 0 & -t\\ 1-2t & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(2t-1)(t-1)$$

$|B|=(2t-1)(t-1)$, siendo $t\neq 1\ y\ t\neq\dfrac{1}{2}$, pues existe la inversa de B y el determinante no puede ser 0.

Sustituimos y vemos cuando ambos determinantes son iguales

$$\left.\begin{array}{r}|A|=(t-2)(t-1)\\ |B|=(2t-1)(t-1)\\ |A|=|B|\end{array}\right\}\Rightarrow (t-2)\cancel{(t-1)}=(2t-1)\cancel{(t-1)}\Rightarrow t-2=2t-1\Rightarrow \boxed{t=-1}$$

La igualdad $\left|A\cdot B^{-1}\right|=1$ se cumple cuando $t = -1$.

P3) Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-6}{-1}=\frac{y-6}{5}=\frac{z-2}{2}$$

(2.5 puntos)

Estudiamos la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

$$r \equiv \begin{cases} 2y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} z=-2y \\ x=-y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0,0,0) \in r \\ \overrightarrow{u_r}=(-1,1,-2) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-6}{-1}=\frac{y-6}{5}=\frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} B(6,6,2) \in s \\ \overrightarrow{v_s}=(-1,5,2) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

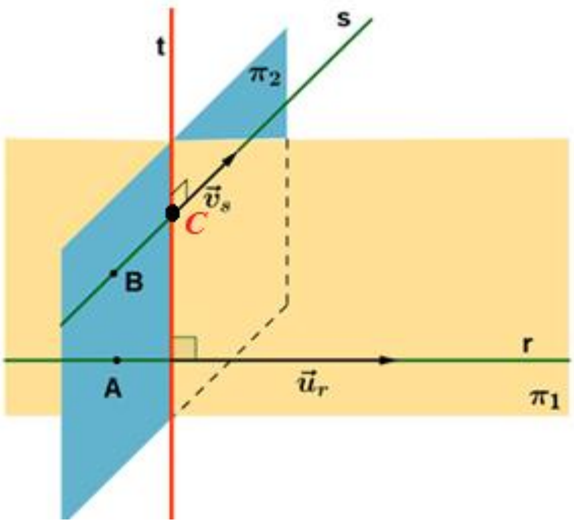
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,-2) \\ \overrightarrow{v_s}=(-1,5,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{5} \neq \frac{-2}{2}$$

Hacemos el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{AB}$ para ver si es nulo o no.

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{AB}=(6,6,2)-(0,0,0)=(6,6,2) \\ \overrightarrow{u_r}=(-1,1,-2) \\ \overrightarrow{v_s}=(-1,5,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{AB}\right]=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}=-10+12+12+60+2+12$$

$$\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{AB}\right]=88 \neq 0$$

Por lo que las rectas *r* y *s* se cruzan.



Nos piden la recta *t* perpendicular común a ambas rectas. Para ello hallamos la ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r y tiene como vector director el perpendicular a ambas rectas.
Después hallamos el punto C intersección del plano π_1 y la recta *s*.
La recta *t* es la recta con vector director el producto vectorial de los vectores directores de las rectas y pasando por el punto C.

El vector director de la recta *t* es el producto vectorial de los directores de ambas rectas, a su vez será un vector director del plano π_1.

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,-2)\\ \overrightarrow{v_s}=(-1,5,2)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & -2\\ -1 & 5 & 2\end{vmatrix}=(12,4,-4)\Rightarrow \overrightarrow{w_t}=(3,1,-1)$$

La ecuación del plano π_1.

$$\pi_1\equiv\begin{cases}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}=(-1,1,-2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{w_t}=(3,1,-1)\\ A(0,0,0)\in\pi_1\end{cases}\Rightarrow \pi_1\equiv\begin{vmatrix}x & y & z\\ -1 & 1 & -2\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$$

$$-x-6y-z-3z-y+2x=0\Rightarrow \boxed{\pi_1\equiv x-7y-4z=0}$$

El punto C de corte entre plano π_1 y recta *s*.

$$\left.\begin{array}{r}s\equiv\dfrac{x-6}{-1}=\dfrac{y-6}{5}=\dfrac{z-2}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=6-t\\ y=6+5t\\ z=2+2t\end{cases}\\ \pi_1\equiv x-7y-4z=0\end{array}\right\}\Rightarrow (6-t)-7(6+5t)-4(2+2t)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6-t-42-35t-8-8t=0\Rightarrow -44-44t=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=6-(-1)=7\\ y=6+5(-1)=1\Rightarrow C(7,1,0)\\ z=2+2(-1)=0\end{cases}$$

Ya tenemos el vector director de la recta *t* y un punto C por el que pasa.

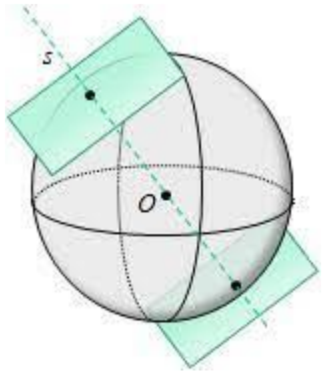
La recta *t* tiene ecuación $t\equiv\begin{cases}C(7,1,0)\in t\\ \overrightarrow{w_t}=(3,1,-1)\end{cases}\Rightarrow \boxed{t\equiv\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}}$

P4) Halla un plano que sea tangente a la esfera de radio 3 y centro (0,0,0), y que corte perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2}$$

Encuentra el punto de tangencia del plano con la esfera, y calcula la ecuación continua de la recta que pasa por ese punto y corta perpendicularmente a r.

(2.5 puntos)



El plano π pedido es perpendicular a la recta, por lo que su vector normal será el director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2,1,-2) \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{v_r} = (2,1,-2)$$

$$\pi \equiv 2x + y - 2z + D = 0$$

Como el plano es tangente a la esfera, la distancia de su centro O(0,0,0) al plano debe ser igual al radio que vale 3.

$$d(O,\pi) = 3 \Rightarrow \frac{|0+0-0+D|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 3 \Rightarrow \frac{|D|}{3} = 3 \Rightarrow |D| = 9 \Rightarrow \begin{cases} D = 9 \\ o \\ D = -9 \end{cases}$$

Hay dos planos como solución de esta situación: $\boxed{\pi_1 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0}$ y $\boxed{\pi_2 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0}$

Hallamos los puntos de tangencia, que llamamos T_1 y T_2.

La recta s que contiene el radio de la esfera es perpendicular al plano $\pi_1 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0$ y tiene como vector director el normal del plano $\vec{v} = (2,1,-2)$ y pasa por el punto O(0,0,0) luego tiene ecuación:

$$s \equiv \begin{cases} \vec{v} = (2,1,-2) \\ O(0,0,0) \in s \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$$

El punto de tangencia T_1 es el punto de corte de la recta s con el plano π_1.

$$\left.\begin{array}{l} s \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \\ \pi_1 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2t) + t - 2(-2t) + 9 = 0 \Rightarrow 4t + t + 4t + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9t = -9 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \Rightarrow \boxed{T_1(-2,-1,2)} \\ z = 2 \end{cases}$$

La recta *s´* que contiene el radio de la esfera es perpendicular al plano $\pi_2 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0$ y tiene como vector director el normal del plano $\vec{v} = (2,1,-2)$ y pasa por el punto O(0,0,0) luego tiene la misma ecuación que la anterior recta *s*:

$$s´ \equiv \begin{cases} \vec{v} = (2,1,-2) \\ O(0,0,0) \in s \end{cases} \Rightarrow s´ \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$$

El punto de tangencia T_2 es el punto de corte de la recta *s´* con el plano π_2.

$$\left.\begin{array}{l} s´ \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \\ \pi_2 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2t) + t - 2(-2t) - 9 = 0 \Rightarrow 4t + t + 4t - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9t = 9 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \quad \Rightarrow \boxed{T_2(2,1,-2)} \\ z = -2 \end{cases}$$

Como la recta *r* es perpendicular a los planos π_1 y π_2 hallamos los puntos de corte A_1 y A_2 de la recta con cada uno de los planos y las rectas que pasan por los puntos de tangencia y son perpendiculares a *r* serán:

Una de ellas la que pasa por A_1 y T_1 y la otra la que pasa por A_2 y T_2.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = -4 - 2t \end{cases} \\ \pi_1 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(3 + 2t) + 4 + t - 2(-4 - 2t) + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 + 4t + 4 + t + 8 + 4t + 9 = 0 \Rightarrow 9t = -27 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 6 = -3 \\ y = 4 - 3 = 1 \quad \Rightarrow \boxed{A_1(-3,1,2)} \\ z = -4 + 6 = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+4}{-2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=3+2t \\ y=4+t \\ z=-4-2t \end{cases} \\ \pi_2 \equiv 2x+y-2z-9=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(3+2t)+4+t-2(-4-2t)-9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6+4t+4+t+8+4t-9=0 \Rightarrow 9t=-9 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=3-2=1 \\ y=4-1=3 \\ z=-4+2=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A_2(1,3,-2)}$$

La recta que pasa por A1 y T1.

$$\left.\begin{array}{l} A_1(-3,1,2) \in s_1 \\ T_1(-2,-1,2) \in s_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{v_1} = \overrightarrow{A_1T_1} = (-2,-1,2)-(-3,1,2)=(1,-2,0) \\ T_1(-2,-1,2) \in s_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s_1 \equiv \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{0}}$$

La recta que pasa por A2 y T2.

$$\left.\begin{array}{l} A_2(1,3,-2) \in s_2 \\ T_2(2,1,-2) \in s_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{v_2} = \overrightarrow{A_2T_2} = (2,1,-2)-(1,3,-2)=(1,-2,0) \\ T_2(2,1,-2) \in s_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s_2 \equiv \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+2}{0}}$$

P5) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}} \qquad \text{(1.25 puntos)}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x} \qquad \text{(1.25 puntos)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}=\left\{\begin{array}{c}\text{Indeterminación en denominador}\\ \infty\ -\ \infty\\ \text{Utilizamos el conjugado}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}{\left(\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}\right)\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}{\left(\sqrt{3x^3+2x^2}\right)^2-\left(\sqrt{3x^3}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}{3x^3+2x^2-3x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1/2}\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}}{2x^{2-1/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}}{2x^{3/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}}{2\sqrt{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}}+\sqrt{\frac{3x^3}{x^3}}}{2\sqrt{\frac{x^3}{x^3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{1+\frac{2}{\infty}}+\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\boxed{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x}=\infty\cdot\sin\frac{1}{\infty}=\infty\cdot 0=\text{Indeterminación}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{-\frac{1}{x^2}}\cdot\cos\frac{1}{x}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=\cos\frac{1}{\infty}=\cos 0=\boxed{1}$$

P6) Se considera la función $f(x)=\log_2\left[\sin\frac{\pi(x+1)}{4}+2^{\frac{x-5}{2}}\right]$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo [6, 7].

(1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha\in(6,7)$ tal que $f(\alpha)=0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.5 puntos)

a) La función es composición y suma de funciones continuas. Solo hace falta ver que la expresión que está dentro del logaritmo es siempre positiva para que no haya problemas en su definición.

Como $-1\leq\sin\frac{\pi(x+1)}{4}\leq 1$ y además:

$$x\in[6,7]\Rightarrow 6\leq x\leq 7\Rightarrow\frac{6-5}{2}\leq\frac{x-5}{2}\leq\frac{7-5}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\frac{x-5}{2}\leq 1\Rightarrow 2^{1/2}\leq 2^{\frac{x-5}{2}}\leq 2^1\Rightarrow\sqrt{2}\leq 2^{\frac{x-5}{2}}\leq 2$$

Sumamos ambas expresiones.

$$-1+\sqrt{2}\leq\sin\frac{\pi(x+1)}{4}+2^{\frac{x-5}{2}}\leq 2+1\Rightarrow 0.41\leq\sin\frac{\pi(x+1)}{4}+2^{\frac{x-5}{2}}\leq 3$$

Por lo que $\sin\frac{\pi(x+1)}{4}+2^{\frac{x-5}{2}}$ es positivo en el intervalo [6, 7].

b) Vamos a aplicar el teorema de Bolzano.

Si una función *f(x)* es continua en [a, b] y cumple que *f(a)* y *f(b)* son de distinto signo entonces existe al menos un valor $c\in(a,b)$ tal que *f(c) = 0*.

Tomamos el intervalo [6, 7] y la función $f(x)=\log_2\left[\sin\frac{\pi(x+1)}{4}+2^{\frac{x-5}{2}}\right]$. Hemos comprobado que es continua en el intervalo, veamos el valor de la función en cada uno de los extremos del intervalo.

$$\boxed{f(6)}=\log_2\left[\sin\frac{\pi(6+1)}{4}+2^{\frac{6-5}{2}}\right]=\log_2\left[\sin\frac{7\pi}{4}+2^{\frac{1}{2}}\right]=\log_2\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right]=\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{-\frac{1}{2}<0}$$

$$\boxed{f(7)}=\log_2\left[\sin\frac{\pi(7+1)}{4}+2^{\frac{7-5}{2}}\right]=\log_2\left[\sin 2\pi+2^1\right]=\log_2 2=\boxed{1>0}$$

Aplicando el teorema de Bolzano existe $c\in(6,7)$ tal que *f(c) = 0.*

P7) Se considera la función $f(x)=\sqrt{x+\sin\frac{\pi x}{2}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,3]$. (0.75 puntos)

b) Demuestra que existen dos valores $\alpha\in(1,2)$ y $\beta\in(2,3)$ tal que $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.75 puntos)

a) El radicando es suma de funciones continuas. Solo falta ver que el radicando es positivo en el intervalo $[1,3]$.

$$\left.\begin{array}{l} x\in[1,3]\Rightarrow 1\leq x\leq 3 \\ -1\leq \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\leq 1 \end{array}\right\}\Rightarrow 0\leq x+\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

La función es continua.

b) Vamos a aplicar el teorema de Rolle:
Si una función es continua en [a, b] y derivable en (a, b) y además *f(a) = f(b)* entonces existe al menos un valor $c\in(a,b)$ tal que *f ´(c) = 0.*

La función también es derivable en el intervalo $[1,3]$.

$$f(x)=\sqrt{x+\sin\frac{\pi x}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{2\sqrt{x+\sin\frac{\pi x}{2}}}$$

Como el radicando es positivo en el intervalo $[1,3]$ y no se anula el denominador en dicho intervalo entonces la función es derivable

Consideramos el intervalo [1, 2].

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\sqrt{1+\sin\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2} \\ f(2)=\sqrt{2+\sin\frac{2\pi}{2}}=\sqrt{2} \end{array}\right\}\Rightarrow f(1)=f(2)$$

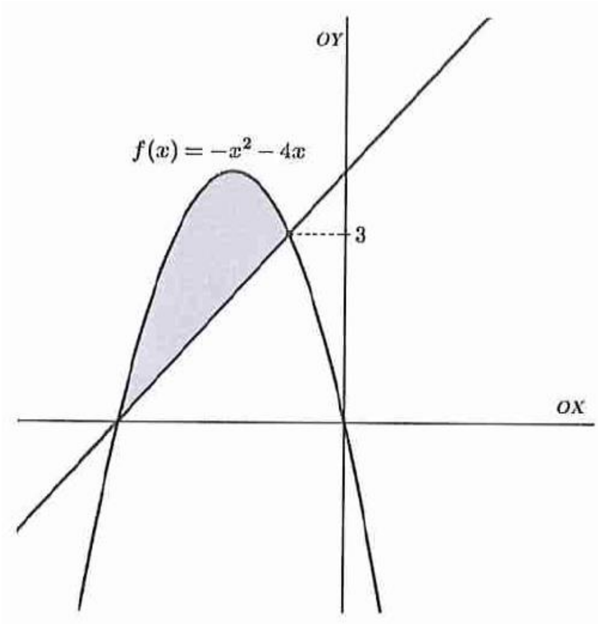
Aplicamos el teorema de Rolle y existe $c\in(1,2)$ tal que *f ´(c) = 0*

Consideramos el intervalo [2, 3].

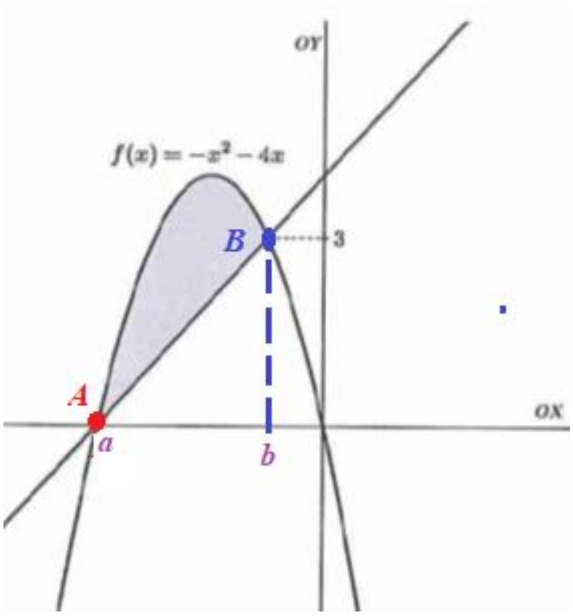
$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\sqrt{2+\sin\frac{2\pi}{2}}=\sqrt{2} \\ f(3)=\sqrt{3+\sin\frac{3\pi}{2}}=\sqrt{2} \end{array}\right\}\Rightarrow f(2)=f(3)$$

Aplicamos el teorema de Rolle y existe $d\in(2,3)$ tal que *f ´(d) = 0*

P8) Teniendo en cuenta los datos que aparecen en el siguiente gráfico, calcula el área de la región sombreada.



(2.5 puntos)



Hallamos las coordenadas del punto A de corte de la parábola con el eje OX

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 - 4x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2 - 4x = 0 \Rightarrow -x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ o \\ x = -4 \end{cases}$$

El punto A tiene coordenadas A(–4, 0).

Hallamos el valor de “b” punto de corte de la parábola y la recta del dibujo.

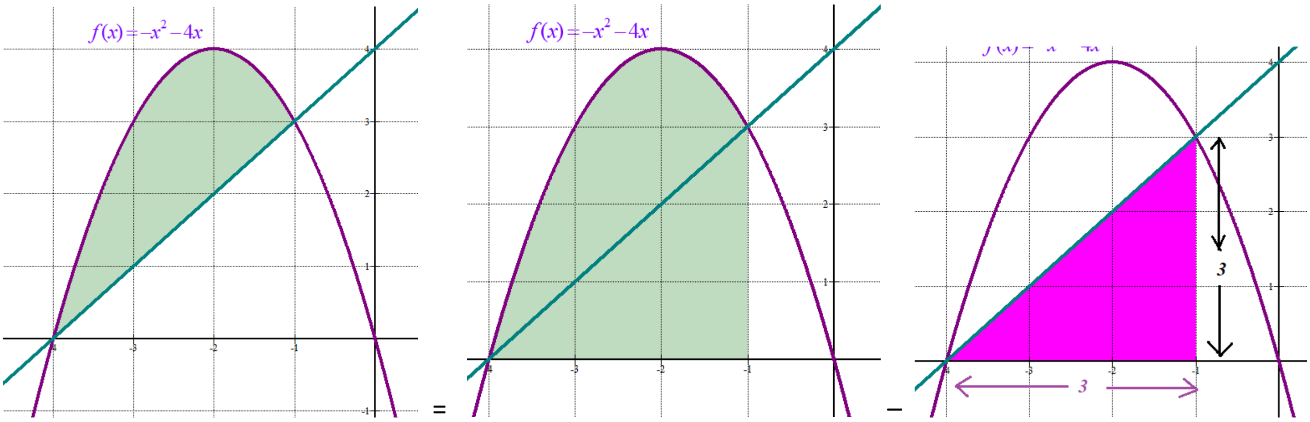
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 - 4x \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2 - 4x = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-4-2}{2} = -3 \\ \frac{-4+2}{2} = -1 \end{cases}$$

De los dos valores obtenidos el valor válido es *b = –1*.

El punto B tiene coordenadas $B(-1,3)$.

Calculamos el área de la región sombreada como indica el esquema siguiente.



Calculamos la integral definida entre –4 y –1 de la función $f(x) = -x^2 - 4x$

$$Área = \int_{-4}^{-1} -x^2 - 4x dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_{-4}^{-1} =$$

$$= \left[-\frac{(-1)^3}{3} - 2(-1)^2 \right] - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - 2(-4)^2 \right] = \frac{1}{3} - 2 - \frac{64}{3} + 32 = 30 - \frac{63}{3} = 6$$

El área del triángulo de color rosa es $\frac{3 \cdot 3}{2} = 4.5$

El área del recinto sombreado del ejercicio es 9 – 4.5 = 4.5 u^2