	<p>Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade <b>2021</b></p>	<p><b>Código: 20</b></p>
---	--	--------------------------

## MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera.

### 1. Números y Álgebra:

Despeje  $X$  en la ecuación matricial  $B(X - I) = A$ , donde  $I$  es la matriz identidad y  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas, con  $B$  invertible. Luego, calcule  $X$  si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

### 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro  $m$ , el sistema:

$$\begin{cases} mx + y + z = 2m \\ mx + (m+1)y + z = 1 \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1 \end{cases}$$

### 3. Análisis

- a) Enuncie el teorema de Bolzano.
- b) Obtenga los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  que hacen que  $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$  cumpla  $f(0) = 1$  y tenga extremos relativos en  $x = \pm 1$ . Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

### 4. Análisis:

- a) Enuncie el teorema de Rolle.
- b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de  $f(x) = x + 6$  y  $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

### 5. Geometría:

- a) Obtenga la ecuación implícita del plano  $\pi$  con ecuaciones paramétricas

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- b) Calcule el valor de  $m$  para que los siguientes puntos sean coplanarios:  $A(0, m, 0)$ ,  $B(0, 2, 2)$ ,  $C(1, 4, 3)$  y  $D(2, 0, 2)$ . Obtenga la ecuación implícita del plano  $\pi$  que los contiene.

### 6. Geometría:

Calcule el punto simétrico de  $P(1, 1, 2)$  con respecto al plano  $\pi : 2x - y + z + 3 = 0$ .

**7. Estadística y Probabilidad:**

En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:

- a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.
- b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

**8. Estadística y Probabilidad:**

El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

www.yoquieroaprobar.es

**SOLUCIONES**

**1. Números y Álgebra:**

Despeje  $X$  en la ecuación matricial  $B(X - I) = A$ , donde  $I$  es la matriz identidad y  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas, con  $B$  invertible. Luego, calcule  $X$  si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$B(X - I) = A \Rightarrow B^{-1}B(X - I) = B^{-1}A \Rightarrow X - I = B^{-1}A \Rightarrow X = B^{-1}A + I$$

Hallamos la inversa de  $B$ .

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{Adj(B^T)}{|B|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}}{1/6} = 6 \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = 6 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión  $X = B^{-1}A + I$ .

$$X = B^{-1}A + I$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

**2. Números y Álgebra:**

Discuta, según los valores del parámetro  $m$ , el sistema: 
$$\begin{cases} mx + y + z = 2m \\ mx + (m+1)y + z = 1 \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es  $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es  $A/B = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & m+1 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{vmatrix} = m(m+1)2 + m + \cancel{m(m+1)} - \cancel{m(m+1)} - 2m - m(m+1)$$

$$|A| = 2m(m+1) - m(m+1) + m - 2m = m(m+1) - m = m^2 + m - m = m^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 = 0 \Rightarrow \boxed{m=0}$$

Nos planteamos dos casos distintos que analizamos por separado.

**CASO 1.**  $m \neq 0$ .

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas.

El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

**CASO 2.**  $m = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Para analizar con facilidad esta situación transformamos la matriz ampliada A/B en una matriz triangular equivalente usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ \text{Fila 3}^a - \text{Fila 1}^a \\ \hline \text{Nueva Fila 2}^a \\ \hline \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a \leftrightarrow \text{Fila 2}^a \\ \hline \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

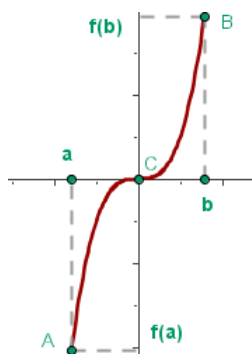
Observando la matriz triangular vemos que el rango de A es 2 y el de A/B es 3. Como tienen distinto rango el sistema es **incompatible**, sin solución.

**3. Análisis**

a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Obtenga los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  que hacen que  $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$  cumpla  $f(0) = 1$  y tenga extremos relativos en  $x = \pm 1$ . Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

a) **Teorema de Bolzano.** Sea  $f$  una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  y que toma valores de signo contrario en los extremos, entonces existe al menos un valor  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .



b) Debe cumplirse que  $f(0) = 1$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Debe cumplirse que  $f'(1) = 0$  y  $f'(-1) = 0$ .

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3 \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 - 3 \Rightarrow \boxed{0 = 3a + 2b - 3}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3 \\ f'(-1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) - 3 \Rightarrow \boxed{0 = 3a - 2b - 3}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 3a + 2b - 3 = 0 \\ 3a - 2b - 3 = 0 \end{array} \right\} \\ \hline 6a \quad -6 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow 3 + 2b - 3 = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0} \end{array}$$

Los valores buscados son  $a = 1$ ,  $b = 0$  y  $c = 1$ .

Averiguamos si  $x = \pm 1$  son máximos o mínimos sustituyendo estos valores en la derivada segunda.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3 \\ a = 1 \\ b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x$$

$x = +1 \Rightarrow f''(1) = 6 > 0$ . En  $x = 1$  hay un mínimo relativo.

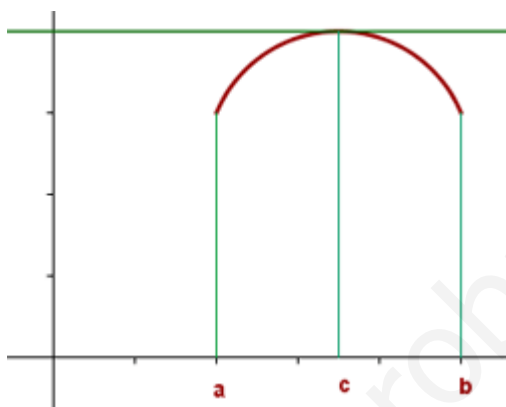
$x = -1 \Rightarrow f''(-1) = -6 < 0$ . En  $x = -1$  hay un máximo relativo.

**4. Análisis:**

a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de  $f(x) = x + 6$  y  $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) **Teorema de Rolle:** Sea  $f(x)$  una función **continua** en  $[a, b]$  y **derivable** en  $(a, b)$  y que, además, cumple que  $f(a) = f(b)$ . Entonces existe algún punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .



b) Averiguamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x + 6 \\ g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (x < 0) \rightarrow x + 6 = -2x \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2 \text{ Válido } (x < 0) \\ (x \geq 0) \rightarrow x^2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 24}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 & \text{Válido } (x \geq 0) \\ \frac{1-5}{2} = -2 & \text{No válido } (x \geq 0) \end{cases} \end{cases}$$

Por el cambio de definición de la función la región la podemos dividir en dos partes, una entre  $x = -2$  y  $x = 0$  y la otra entre  $x = 0$  y  $x = 3$ .

En el intervalo  $(-2, 0)$  la función  $g(x)$  es  $g(x) = -2x$  y el área de la región es:

$$\int_{-2}^0 f(x) - g(x) dx = \int_{-2}^0 x + 6 - (-2x) dx = \int_{-2}^0 3x + 6 dx = \left[ 3 \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^0 = \left[ 3 \frac{0^2}{2} + 0 \right] - \left[ 3 \frac{(-2)^2}{2} + 6(-2) \right] = 6$$

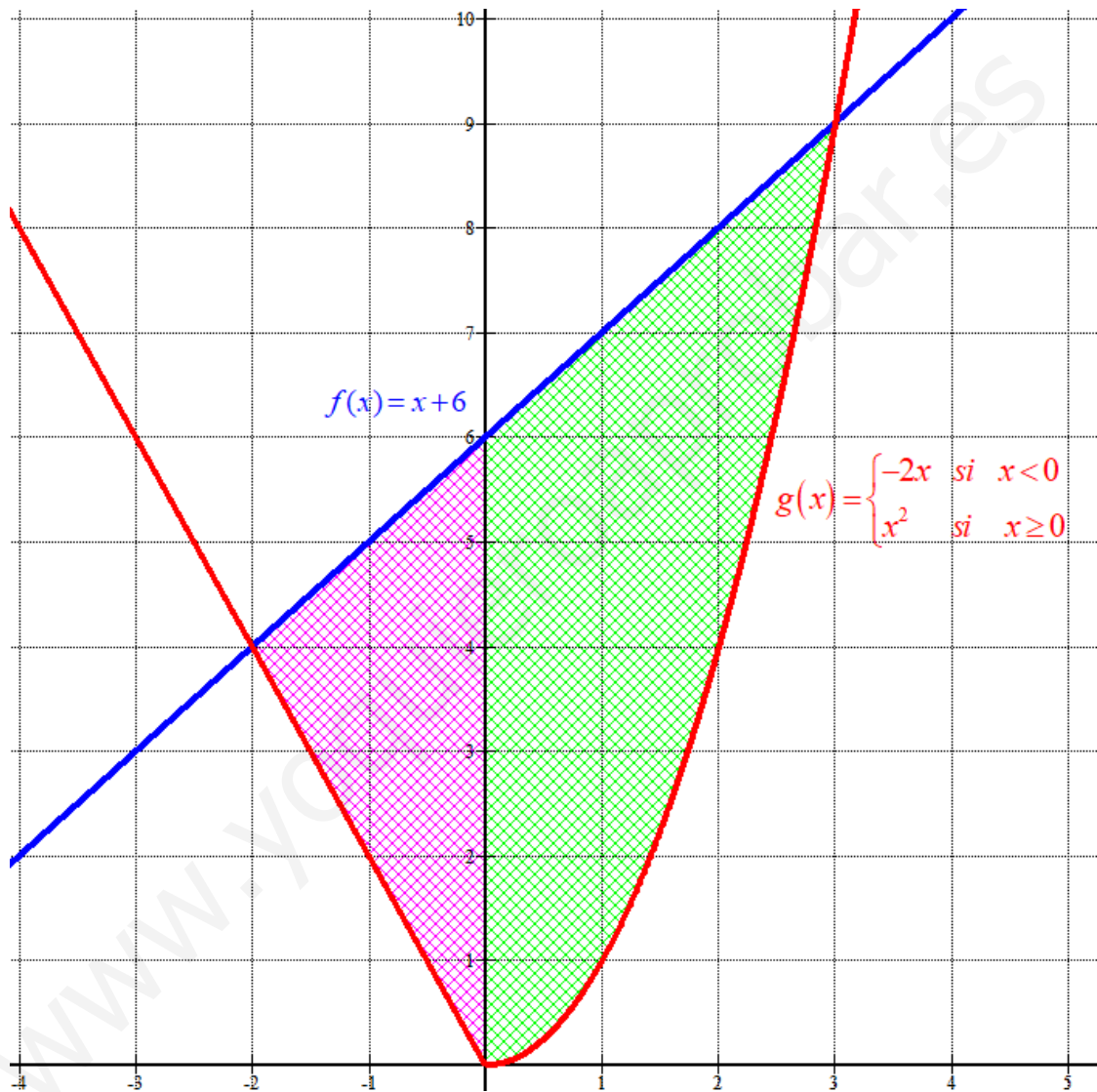
En el intervalo  $(0, 3)$  la función  $g(x)$  es  $g(x) = x^2$  y el área de la región es:

$$\int_0^3 f(x) - g(x) dx = \int_0^3 x + 6 - x^2 dx = \left[ \frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 =$$

$$= \left[ \frac{3^2}{2} + 18 - \frac{3^3}{3} \right] - \left[ \frac{0^2}{2} + 0 - \frac{0^3}{3} \right] = 4.5 + 18 - 9 = 13.5$$

El área total es  $6 + 13.5 = 19.5 \text{ u}^2$ .

No lo piden, pero dibujamos la función para comprobar el resultado.



**5. Geometría:**

a) Obtenga la ecuación implícita del plano  $\pi$  con ecuaciones paramétricas

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b) Calcule el valor de  $m$  para que los siguientes puntos sean coplanarios:  $A(0,m,0)$ ,  $B(0,2,2)$ ,  $C(1,4,3)$  y  $D(2,0,2)$ . Obtenga la ecuación implícita del plano  $\pi$  que los contiene.

a) Obtenemos dos vectores directores del plano y un punto contenido en él.

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \pi : \begin{cases} \vec{u} = (-1, 0, 1) \\ \vec{v} = (0, 1, 2) \\ P(1, 2, 1) \in \pi \end{cases}$$

Obtenemos la ecuación implícita.

$$\pi : \begin{cases} \vec{u} = (-1, 0, 1) \\ \vec{v} = (0, 1, 2) \\ P(1, 2, 1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -z+1+2y-4-x+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : x - 2y + z + 2 = 0}$$

b) Hallamos el plano  $\pi$  que contiene a los puntos B, C y D. Luego calculamos  $m$  para que A pertenezca al plano  $\pi$ .

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} = \overrightarrow{BC} &= (1, 4, 3) - (0, 2, 2) = (1, 2, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{BD} &= (2, 0, 2) - (0, 2, 2) = (2, -2, 0) \\ B(0, 2, 2) &\in \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y - 4 - 2z + 4 - 4z + 8 + 2x = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 6z + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y - 3z + 4 = 0}$$

Hacemos que A pertenezca al plano  $\pi : x + y - 3z + 4 = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} \pi : x + y - 3z + 4 = 0 \\ A(0, m, 0) \in \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 + m - 0 + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -4}$$

El valor buscado es  $m = -4$ .

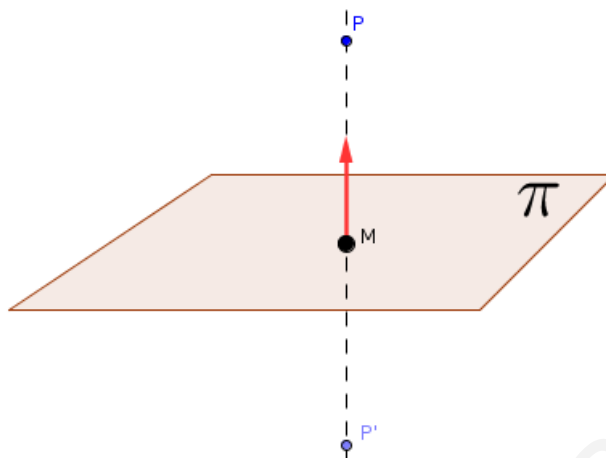
La ecuación del plano que contiene a los puntos A, B, C y D es  $\pi : x + y - 3z + 4 = 0$ .



**6. Geometría:**

Calcule el punto simétrico de  $P(1,1,2)$  con respecto al plano  $\pi : 2x - y + z + 3 = 0$ .

a) Debemos hallar el punto  $P'$  del dibujo.



Obtenemos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto  $P$ . El vector director de la recta  $r$  será el vector normal del plano.

$$\pi : 2x - y + z + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, -1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, -1, 1) \\ P(1, 1, 2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Determinamos las coordenadas del punto  $M$  intersección de la recta  $r$  y el plano  $\pi$ .

$$\begin{aligned} &\left. \begin{array}{l} \pi : 2x - y + z + 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2t) - (1 - t) + 2 + t + 3 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 + 4t - 1 + t + 2 + t + 3 = 0 \Rightarrow 6t + 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{-6}{6} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = 2 - 1 = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow M(-1, 2, 1) \end{aligned}$$

Determinamos las coordenadas del punto  $P'(a, b, c)$  simétrico de  $P$  respecto del plano  $\pi$  haciendo que los vectores  $\vec{PM}$  y  $\vec{MP'}$  sean iguales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{PM} = (-1, 2, 1) - (1, 1, 2) = (-2, 1, -1) \\ \vec{MP'} = (a, b, c) - (-1, 2, 1) = (a + 1, b - 2, c - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow (-2, 1, -1) = (a + 1, b - 2, c - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 = a + 1 \Rightarrow a = -3 \\ 1 = b - 2 \Rightarrow b = 3 \\ -1 = c - 1 \Rightarrow c = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P'(-3, 3, 0)}$$

El punto  $P'$  simétrico de  $P$  con respecto al plano  $\pi$  tiene coordenadas  $P'(-3, 3, 0)$

**7. Estadística y Probabilidad:**

En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:

- a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.
- b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

Realizamos una tabla de contingencia para organizar los datos.

	Tienen mascota	No tienen mascota	
Practican yoga	<b>3</b>		<b>8</b>
No practican yoga			
	<b>20</b>		<b>100</b>

Completamos la tabla.

	Tienen mascota	No tienen mascota	
Practican yoga	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>8</b>
No practican yoga	<b>17</b>	<b>75</b>	<b>92</b>
	<b>20</b>	<b>80</b>	<b>100</b>

- a) Mirando en la tabla se observa que de una población de 100 personas hay 17 que no practican yoga y tienen mascota. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{No practique yoga y a la vez tenga mascota}) = \frac{17}{100} = 0.17$$

	Tienen mascota	No tienen mascota	
Practican yoga	-		
No practican yoga	<b>17</b>	<b>75</b>	<b>92</b>
		<b>80</b>	<b>100</b>

- b) Mirando en la tabla se observa que de los 8 que practican yoga hay 3 que tienen mascota. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Tenga mascota sabiendo que practica yoga}) = \frac{3}{8} = 0.375$$

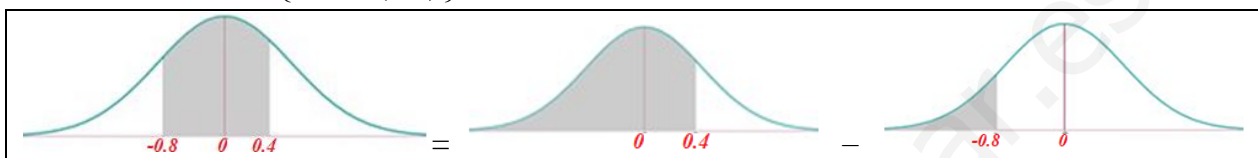
	Tienen mascota	No tienen mascota	
Practican yoga	<b>3</b>		<b>8</b>
No practican yoga			

**8. Estadística y Probabilidad:**

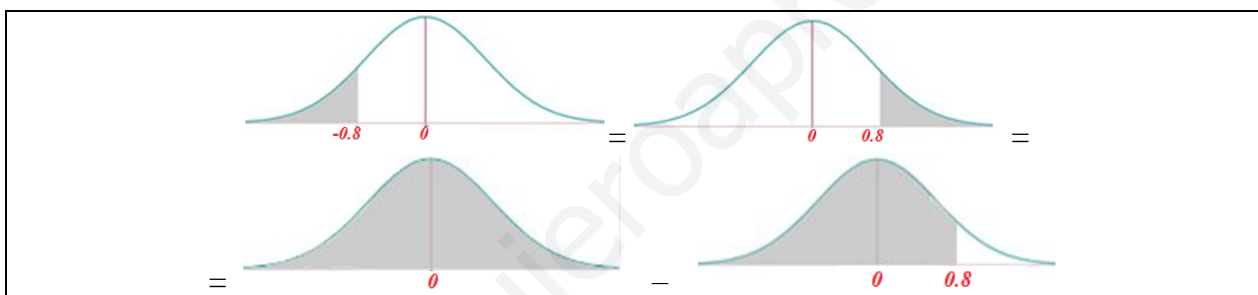
El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

X = Grosor de una plancha de acero en mm.  
 X = N(8, 0.5)

$$P(7.6 \leq X \leq 8.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \\ Z = N(0,1) \end{array} \right\} = P\left(\frac{7.6-8}{0.5} \leq Z \leq \frac{8.2-8}{0.5}\right) = P(-0.8 \leq Z \leq 0.4) = \dots$$



... = P(Z ≤ 0.4) - P(Z ≤ -0.8) = ...



... = P(Z ≤ 0.4) - P(Z > 0.8) = P(Z ≤ 0.4) - [1 - P(Z ≤ 0.8)] =

= {Miramos en la tabla N(0,1)} = 0.6554 - [1 - 0.7881] = 0.4435

	0	
0.0	0.5000	0.50
0.1	0.5398	0.54
0.2	0.5793	0.58
0.3	0.6179	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	0.7257	0.72
0.7	0.7580	0.76
0.8	0.7881	0.79
0.9	0.8159	0.81
1.0	0.8413	0.84