

Sistemas, Matrices, Determinantes

Nombre:.....

1.– Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Halla una matriz X que cumpla la ecuación: $2AA^t - \frac{1}{3}X = B$

b) Halla B^{-1}

(2 puntos)

2.– Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, comprobar que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz unidad.

Usando la fórmula anterior, halla A^4 en función de A

(2 puntos)

3.– Resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

4.– Dado el sistema:

$$\begin{cases} 4x + ky = 2 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

(2 puntos)

a) ¿Para qué valores de “k” es un sistema de Cramer?

b) Resuelve el sistema anterior cuando $k = -5$, utilizando el método de Cramer.

5.– De un capital de 20000 € se ha colocado una parte al 5 % y la restante al 4 %. La primera produce anualmente 280 € más que la segunda. Hallar los valores de las dos partes del capital.

(2 puntos)

1) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ a) $2 \cdot A \cdot A^t - \frac{1}{3} X = B \Rightarrow X = -3 \cdot (B - 2AA^t) =$
 $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$
 $= -3 \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \right) = -3 \begin{pmatrix} -15 & 11 \\ 17 & -8 \end{pmatrix} =$
 $= \begin{pmatrix} 45 & -33 \\ -51 & 24 \end{pmatrix}$

b) $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj} B^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$
 $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5$
 $B^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj} B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$2A - I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 = 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I$

3) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x - 2y + x \\ -2x + y + y \\ y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -10 \\ -2x + 2y = 6 \\ y + z = 3 \end{cases}$

De las 2 primeras ecuaciones es $\begin{cases} 4x - 2y = -10 \\ -2x + 2y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -10 \\ 4(-2) - 2y = -10 \end{cases}$ De la 3ª ecuación es $\begin{cases} 1 + z = 3 \\ z = 2 \end{cases}$
 $2x = -4 \Rightarrow x = -2$ $-8 + 10 = 2y \Rightarrow y = 1$

Solución $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x + ky = 2 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$ a) Es de Cramer si $\begin{vmatrix} 4 & k \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$.
 Es $\begin{vmatrix} 4 & k \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 2k \Rightarrow -12 - 2k = 0 \Rightarrow k = -6$

Es de Cramer si: $k \neq -6$

Para $k = -5$ es $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$ $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-6 + 20}{-12 + 10} = \frac{14}{-2} = -7$
 $y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{16 - 8}{-12 + 10} = \frac{8}{-2} = -4$

Sol. $\begin{cases} x = -7 \\ y = -4 \end{cases}$

5) $x =$ "1ª parte del capital" $x + y = 20000$
 $y =$ "2ª parte del capital" $0,05x + 0,04y = 280$
 $\sim \begin{cases} x + y = 20000 \\ 5x - 4y = 28000 \end{cases} \sim \begin{cases} -5x - 5y = -100000 \\ 5x - 4y = 28000 \end{cases} \sim \begin{cases} -9y = -72000 \\ y = 8000 \end{cases}$
 $x = 20000 - 8000 = 12000 \text{ €}$

Sol: $\begin{cases} x = 12000 \text{ €} \\ y = 8000 \text{ €} \end{cases}$