PROBABILIDAD

Experimentos aleatorios y deterministas.

Decimos que un experimento es **determinista** si su resultado se puede predecir a partir del conocimiento de las condiciones en las que se realiza.

Decimos que un experimento es **aleatorio** si no es posible predecir su resultado, a pesar de conocer las condiciones en las que se realiza.

El **espacio muestral** asociado a un experimento aleatorio es el conjunto formado por todos los resultados posibles. Lo representaremos por E.

Cada uno de los resultados posibles también recibe el nombre de **suceso elemental**.

Sucesos.

Cada uno de los subconjuntos del espacio muestral E recibe el nombre de **suceso** y se representa mediante una letra mayúscula. También se le llama suceso aleatorio o suceso estocástico.

Decimos que un suceso se **verifica** u **ocurre** al efectuar un experimento aleatorio si el resultado obtenido forma parte de dicho suceso.

Suceso seguro: Es el que contiene todos los resultados posibles del experimento. Este suceso se verifica siempre y coincide con el espacio muestral E.

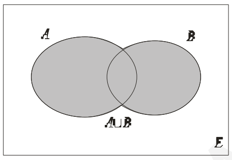
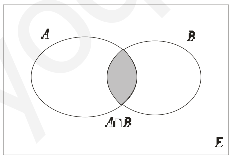
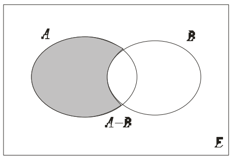
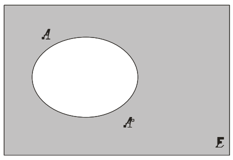
Suceso imposible: Es el que no contiene ningún resultado posible del experimento. Este suceso no se verifica nunca y coincide con el conjunto vacío $\emptyset$.

Llamamos **sucesos elementales** a los sucesos formados por un único elemento del espacio muestral, es decir, por un único resultado del experimento.

Y llamamos **sucesos compuestos** a los sucesos formados por dos o más elementos del espacio muestral, es decir, por dos o más resultados del experimento aleatorio.

Al conjunto formado por todos los sucesos de un experimento aleatorio se le denomina **espacio de sucesos** de E y se le designa por $\mathscr{P}(E)$.

Operaciones con sucesos.

UNIÓN	INTERSECCIÓN	DIFERENCIA	CONTRARIO
Se llama **unión** de los sucesos A y B al suceso formado por todos los resultados que están en A o en B. Se representa por $A\cup B$. El suceso $A\cup B$ se verifica si se verifica A o B.	Se llama **intersección** de los sucesos A y B al suceso formado por todos los resultados que están en A y en B. Se representa por $A\cap B$. El suceso $A\cap B$ se verifica si se verifican, simultáneamente, A y B.	Se llama **diferencia** entre el suceso A y suceso B al suceso formado por todos los resultados que están en A pero no en B. Se representa por $A–B$. El suceso $A–B$ se verifica si se verifica A pero no se verifica B.	Se llama **contrario** o **complementario** del suceso A y se representa por A^C, al suceso formado por todos los resultados del experimento que no están en A, es decir, a la diferencia $E–A$. El suceso A^C se verifica si no se verifica A.
$A\bigcup B=\{x \mid x\in A \text{ o } x\in B\}$	$A\bigcap B=\{x \mid x\in A \text{ y } x\in B\}$	$A-B=\{x \mid x\in A \text{ y } x\notin B\}$	$A^C=\{x \mid x\notin A\}$
			

Propiedades de las operaciones con sucesos

Conmutativa	$A\bigcup B=B\bigcup A$	$A\bigcap B=B\bigcap A$
Asociativa	$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$	$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$
Idempotente	$A\bigcup A=A$	$A\bigcap A=A$
Simplificativa	$A\bigcup(A\bigcap B)=A$	$A\bigcap(A\bigcup B)=A$
Distributiva	$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$	$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$
Elemento neutro	$A\bigcup\emptyset=A$	$A\bigcap E=A$
Contrario	$A\bigcup A^C=E$	$A\bigcap A^C=\emptyset$
Involución	$\left(A^C\right)^C=A$	
Leyes de Morgan	$(A\bigcup B)^C=A^C\bigcap B^C$	$(A\bigcap B)^C=A^C\bigcup B^C$

$\mathscr{P}(E)$, con las operaciones unión, intersección y complementario, constituye un **álgebra de Boole**.

Observaciones:

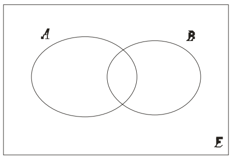
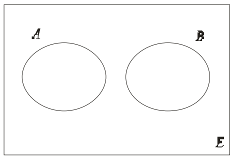
1)Puesto que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ podemos escribir simplemente $A \cup B \cup C$.

2) Puesto que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ podemos escribir simplemente $A \cap B \cap C$.

3) $A - B = A \cap B^C$

Sucesos compatibles y. sucesos incompatibles.

Dos o más sucesos son **compatibles** si pueden verificarse simultáneamente. En caso contrario, son **incompatibles**.

A y B **compatibles** $\Leftrightarrow A \cap B \neq \phi$	A y B **incompatibles** $\Leftrightarrow A \cap B = \phi$
	

Tres o más sucesos son **incompatibles dos a dos** si es incompatible cualquier pareja que se pueda formar entre ellos.

Sistema completo de sucesos

Si E es el espacio muestral de un experimento aleatorio, los sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ forman un **sistema completo de sucesos** si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$
2) $A_1, A_2, \dots, A_n$ son incompatibles dos a dos.

Definición de probabilidad.

Estamos interesados en poder medir el grado de certeza de una situación. Esta medida se denomina **probabilidad**.

Definición experimental.

Dado cualquier suceso A asociado a un experimento aleatorio, llamamos probabilidad de A, P(A), al número hacia el que tienden las frecuencias relativas de A al aumentar el número de realizaciones del experimento.

Definición axiomática.

Dado el espacio muestral E asociado a un experimento aleatorio y su espacio de sucesos $\mathscr{P}(E)$, llamamos **probabilidad** a una aplicación

$$P: \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longrightarrow P(A)$$

que asocia a cada suceso A un número real llamado **probabilidad de A**, $P(A)$, y cumple los siguientes axiomas:

A1.	$0 \leq P(A) \leq 1$, para todo suceso A de $\mathscr{P}(E)$.
A2.	$P(E) = 1$, siendo E el suceso seguro.
A3.	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si A y B son incompatibles.

Consecuencias de los axiomas.

1. La probabilidad del suceso $\bar{A}$, contrario del suceso A, es igual a 1 menos la probabilidad del suceso A.
$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$
2. La probabilidad del suceso imposible es cero.
$$\boxed{P(\phi) = 0}$$
3. La probabilidad de un suceso A contenido en otro suceso B es menor o igual que la probabilidad de B.
$$\boxed{A \subset B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)}$$
4. La probabilidad de la unión de varios sucesos incompatibles dos a dos es igual a la suma de sus probabilidades.
$$\boxed{A_1, A_2, \dots, A_n \text{ incompatibles dos a dos} \Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)}$$
5. La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos menos la probabilidad del suceso intersección de ambos.
$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Regla de Laplace.

Si en un experimento aleatorio todos los sucesos elementales son **equiprobables**, la probabilidad de un suceso A se obtiene dividiendo el **número de resultados que forman el suceso A** (casos favorables) entre el **número de resultados posibles** del experimento (casos posibles).

$$\boxed{P(A)=\frac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles}}$$

Probabilidad condicionada.

Dados dos sucesos A y B, tales que $P(B)\neq 0$, se llama probabilidad de A condicionada a B, $P(A/B)$, al cociente:

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

Probabilidad compuesta.

De la probabilidad condicionada se deduce una expresión muy útil en el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)}$$

A esta expresión se le conoce como **principio de la probabilidad compuesta**.
Al ser $A\cap B=B\cap A$, se tiene:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)}$$

La probabilidad del suceso intersección es igual a la probabilidad de uno de ellos, supuesta no nula, por la probabilidad del otro condicionada a la realización del anterior.

Propiedades de la probabilidad condicionada

1) Si un suceso B está contenido en un suceso C, entonces la probabilidad de B condicionada a A es menor o igual que la probabilidad de C condicionada a A.
$$B\subset C \quad\Rightarrow\quad P(B/A)\leq P(C/A)$$
2) Si un suceso B está contenido en otro suceso A, entonces la probabilidad del suceso B condicionada a A es el cociente entre la probabilidad del suceso B y la probabilidad del suceso A.
$$B\subset A \quad\Rightarrow\quad P(B/A)=\frac{P(B)}{P(A)}$$
3) Si un suceso A está contenido en otro suceso B, entonces la probabilidad del suceso B condicionada a A es uno.
$$A\subset B \quad\Rightarrow\quad P(B/A)=1$$

Independencia de sucesos.

SUCESOS INDEPENDIENTES	SUCESOS DEPENDIENTES
A y B **independientes** $\Leftrightarrow$ $P(A/B)=P(A)$	A y B **dependientes** $\Leftrightarrow$ $P(A/B)\neq P(A)$
Del principio de probabilidad compuesta se deriva:	
A y B **independientes** $\Leftrightarrow$ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$	A y B **dependientes** $\Leftrightarrow$ $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$

Teorema de la probabilidad total

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos y B, un suceso cualquiera, todos ellos asociados a un mismo experimento aleatorio. Si $P(A_1)$, $P(A_2)$, ... , $P(A_n)$ son no nulas, se cumple que:

$$\boxed{P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

Teorema de Bayes

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos y B, un suceso cualquiera, todos ellos asociados a un mismo experimento aleatorio. Si $P(A_1)$, $P(A_2)$, ... , $P(A_n)$ son no nulas, se cumple que:

$$\boxed{P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}}$$

En una situación en la que sea aplicable el teorema de Bayes:

- $P(A_1)$, $P(A_2)$, ... , $P(A_n)$ se llaman **probabilidades a priori**.
- $P(A_1)/B$, $P(A_2/B)$, ... , $P(A_n/B)$ se denominan **probabilidades a posteriori**.
- $P(B/A_1)$, $P(B/A_2)$, ... , $P(B/A_n)$ reciben el nombre de **verosimilitudes**.