

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 2 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 3 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Determina, segundo os valores de k , o rango das matrices AB e BA .

b) Para o valor $k = 0$, determina as matrices X que verifican $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Calcula: i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$; ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$

b) A derivada dunha función $f(x)$, que ten por dominio $(0, \infty)$, é $f'(x) = 1 + \ln x$. Determina a función $f(x)$ tendo en conta que a súa gráfica pasa polo punto $(1, 4)$.

c) Determina, se existen, os máximos e mínimos relativos de $f(x)$.

3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $(0, 1, 3)$ e $(1, 1, 1)$ e s a recta $s: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa.

b) ¿É s paralela ao plano YZ ? ¿Está contida no devandito plano?

c) Calcula a distancia da recta r ao plano $\pi: 2x + z = 0$.

4. Sexan A e B dous sucesos con $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,6$ e $P(A \cup B) = 0,9$

a) ¿Son A e B sucesos independentes? Xustifica a resposta.

b) Calcula $P(A - B)$ e $P(A/\bar{B})$. (Nota: \bar{B} suceso contrario ou complementario de B).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x - y + z = m \\ x + my - 2z = m \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 0$.

2. Dada a función $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

a) Estuda, en $x = 0$, a continuidade e derivabilidade de $f(x)$.

b) Determina os puntos da gráfica de $f(x)$ nos que a recta tanxente é paralela á recta $x - 4y = 0$ e determina as ecuacións desas rectas tanxentes.

c) Calcula $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

3. Dados os planos $\alpha: 2x - 2y + 4z - 7 = 0$; $\beta: \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases}$; e a recta $r: \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa dos planos α e β . Calcula a distancia entre eles.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a α e contén á recta r .

c) Sexan P e Q os puntos de corte da recta r cos planos XY e YZ respectivamente. Calcula a distancia entre P e Q .

4. O total de vendas diarias nun pequeno restaurante é unha variable que segue unha distribución normal de media 1220€ ao día e desviación típica 120€ ao día.

a) Calcula a probabilidade de que nun día elixido ao azar as vendas excedan de 1400€.

b) Se o restaurante debe vender polo menos 980€ ao día para cubrir os gastos, ¿cal é a probabilidade de que un día elixido ao azar, o restaurante non cubra gastos?

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\text{a) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ k+3 & k+1 & -3k-1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Así

$$|AB| = -4k - 4 - 6k - 18 - 12k - 4 + 12k + 12 + 6k + 2 + 4k + 12 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\boxed{\text{rang}(AB) = 2}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & -2 \\ k+2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k-2 & -2 \\ k+2 & 0 \end{vmatrix} = 2(k+2)$$

Polo tanto

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Se } k = -2, \quad \text{entón } \text{rang}(BA) = 1 \\ \text{Se } k \neq -2, \quad \text{entón } \text{rang}(BA) = 2 \end{array}}$$

b) Vimos que $\det(A \cdot B) = 0$ e polo tanto $A \cdot B$ non ten inversa. Se $k = 0$

$$A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

Como a terceira ecuación é suma das dúas primeiras, podemos prescindir dela

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3z \\ 3x + y = z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 3z - x \\ 3x + 3z - x = z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 4z \\ x = -z \end{array} \right.$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercício 2:

a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+6e^{2x}}{1+2e^{2x}} = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+6e^{2x}}{1+2e^{2x}} \stackrel{\infty/\infty \text{ (L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{4e^{2x}} = \boxed{3}$$

b) $f(x)$ é a primitiva de $f'(x)$ passando pelo ponto (1,4)

$$\int (1 + \ln x) dx = x + \int \ln x dx = x + x \ln x - \int dx = x \ln x + K$$
$$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = dx/x \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$f(1) = 4 \Rightarrow K = 4$$

Polo tanto

$$\boxed{f(x) = x \ln x + 4}$$

c)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1/e \text{ ponto crítico}$$

$$f''(x) = 1/x \Rightarrow f''(1/e) = e > 0$$

Polo tanto o ponto crítico é um mínimo

$$\boxed{\text{Mínimo relativo } (1/e, 4 - 1/e)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Determinamos un punto e un vector director das rectas r e s :

$$r: \begin{cases} P_r = (0,1,3) \in r \\ \vec{v}_r = (1,1,1) - (0,1,3) = (1,0,-2) \end{cases} \quad s: \begin{cases} P_s = (1,0,0) \in s \\ \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (0,2,1) \end{cases}$$

Como os vectores directores das rectas non son proporcionais, as rectas córtanse ou crúzanse. Para saber se se cortan ou se se cruzan, estudamos o $\text{rang}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s})$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 + 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = 3$$

Polo tanto

As rectas crúzanse

b)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vector normal ao plano } YZ: \vec{n} = (1,0,0) \\ \text{Vector director de } s: \vec{v}_s = (0,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{v}_s \Rightarrow \boxed{s \text{ é paralela ao plano } YZ}$$

Para ver que a recta non está contida no plano chega encontrar un punto da recta que non esté no plano YZ ($\alpha: x = 0$):

$$\left. \begin{array}{l} P_s = (1,0,0) \in s \\ P_s = (1,0,0) \notin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s \text{ non está contida no plano } YZ}$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1,0,-2) \\ \vec{n}_\pi = (2,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{v}_r$$

Como o vector normal ao plano é perpendicular ao vector director da recta, a recta r é paralela ao plano π . Podemos polo tanto calcular a distancia da recta ao plano como a distancia dun punto calquera da recta ao plano:

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5}}$$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercício 4:

a)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

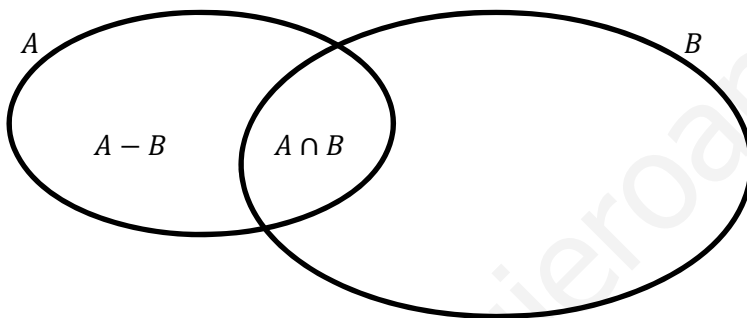
$$P(A \cap B) = 0,7 + 0,6 - 0,9 = 0,4$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3} \neq P(A) \Rightarrow \boxed{A \text{ e } B \text{ non son independentes}}$$

Tamén

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \boxed{A \text{ e } B \text{ non son independentes}}$$

b)



Disxuntos

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = 0,7 - 0,4 \Rightarrow \boxed{P(A - B) = 0,3}$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A - B)}{1 - P(B)} = \frac{0,3}{1 - 0,6} = 3/4 \Rightarrow \boxed{P(A/\bar{B}) = 0,75}$$

Tamén podemos utilizar a probabilidade calculada no apartado anterior: $P(A \cap B) = 0,4$ e construír a táboa

	B	\bar{B}	
A	0,4	0,3	0,7
\bar{A}	0,2	0,1	0,3
	0,6	0,4	1

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,7 - 0,4 = \boxed{0,3}$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,3}{0,4} = \boxed{0,75}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -2 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & m \\ 1 & m & -2 & m \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C :

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -2 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 3m - 4 = -3m$$

$$\Rightarrow \text{rang}(C) = \begin{cases} 2 & \text{se } m = 0 \\ 3 & \text{se } m \neq 0 \end{cases}$$

Cálculo do rango de A :

Sempre $\text{rang}(A) \geq \text{rang}(C)$

A^* é unha matriz $3 \times 4 \Rightarrow \text{rang}(A) \leq 3$

$m \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3$

$m = 0 \Rightarrow$ a última columna de A é de ceros

$$\Rightarrow \text{rang}(C) = \text{rang}(A), \forall m$$

Discusión:

$m = 0$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.
 $m \neq 0$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible determinado.

b) Para $m = 0$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x - y = -z \end{cases}$$

Entón:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -(-2z) = 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -(-3z) = 3z$$

As infinitas solucións son:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Tamén podemos resolvelo por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & m \\ 3 & -2 & 0 & : & 0 \\ 1 & m & -2 & : & m \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a - 3 \cdot 1^a \\ - - - - - \\ 3^a - 1^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & m \\ 0 & 1 & -3 & : & -3m \\ 0 & m+1 & -3 & : & m \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a - 2^a} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & m \\ 0 & 1 & -3 & : & 0 \\ 0 & m & 0 & : & m \end{pmatrix}$$

➤ Se $m \neq 0$

$$3^{\text{a}} \text{ fila: } my = 3m \Rightarrow y = 3$$

$$2^{\text{a}} \text{ fila: } 3 - 3z = -3m \Rightarrow z = m + 1$$

$$1^{\text{a}} \text{ fila: } x - 3 + m + 1 = m \Rightarrow x = 2$$

⇒ **Sistema compatible determinado. Solución única**

➤ Se $m = 0$

Podemos prescindir da 3ª ecuación. Pasando a 3ª columna ao termo independente (Sistema compatible indeterminado. Infinitas solución):

$$\left. \begin{array}{l} x - y = -z \\ y = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2z \\ \end{array}$$

⇒ *As infinitas solucións son*

$$\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+x} = 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ é continua en } x = 0}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(1-x)^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1+x)^2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{As derivadas laterais son finitas e coinciden. Polo tanto } \boxed{f(x) \text{ é derivable en } x = 0}$$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad \frac{1}{4} = \text{pendente da recta } x - 4y = 0$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases} \text{ (non é } \leq 0)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases} \text{ (non é } \geq 0)$$

Recta tanxente en $x = -1$:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}$$

Recta tanxente en $x = 1$:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}}$$

c)

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{1-x} dx = \int_{-1}^0 \left(-1 + \frac{1}{1-x}\right) dx = [-x - \ln|1-x|]_{-1}^0 = -(1 - \ln 2)$$

$$\boxed{\int_{-1}^0 f(x) dx = \ln 2 - 1}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Vectores normais aos planos α e β :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_\alpha = (2, -2, 4) \\ \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 2, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta \Rightarrow \boxed{\alpha \text{ e } \beta \text{ son paralelos}}$$

Como os planos son paralelos, collemos un punto arbitrario nun dos planos e calculamos a distancia dese punto ao outro plano.

$$P(1, 5, 4) \in \beta$$

$$d(\alpha, \beta) = d(P, \alpha) = \frac{|2 - 10 + 16 - 7|}{\sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{12} \text{ unidades}}$$

b) Sexa π o plano buscado. O plano π está determinado por:

- Un punto arbitrario de r , por exemplo $P_r(3, 5, 0)$ (π contén á recta r)
- \vec{n}_α é un vector contido no plano ($\pi \perp \alpha$)
- Un vector director \vec{v}_r da recta r é un vector contido no plano (π contén á recta r)

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 0, 1)$$

$$\pi: 0 = \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2(x-3) - 8(y-5) - 4z - 2(y-5)$$

$$\boxed{\pi: x + 5y + 2z - 28 = 0}$$

c)

$$P: \begin{cases} z = 0 \\ x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(3, 5, 0)$$

$$Q: \begin{cases} x = 0 \\ x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q\left(0, 5, \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow d(P, Q) = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercício 4:

Sexa X = total (en €) de vendas diarias

$$X \rightarrow N(1220; 120)$$

a)

Tipificación

$$\frac{X-1220}{120} = Z \rightarrow N(0,1)$$
$$P(X > 1400) = P\left(\frac{X-1220}{120} > \frac{1400-1220}{120}\right) = P(Z > 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332$$
$$P(X > 1400) = 0,0668$$

b)

Tipificación

$$\frac{X-1220}{120} = Z \rightarrow N(0,1)$$
$$P(X < 980) = P\left(\frac{X-1220}{120} < \frac{980-1220}{120}\right) = P(Z < -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772$$
$$P(X < 980) = 0,0228$$