

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 2 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 3 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina, segundo os valores de λ , o rango da matriz $AA^t - \lambda I$, sendo A^t a matriz trasposta de A e I a matriz unidade de orde 2.

b) Determina a matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica a ecuación matricial $AA^t X = 6X$.

2. a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x}$

b) Deséxase construír unha caixa de base cadrada, con tapa e cunha capacidade de 80 dm^3 . Para a tapa e a superficie lateral quérese utilizar un material que custa 2€/dm^2 e para a base outro que custa 3€/dm^2 . Calcula as dimensións da caixa para que o seu custo sexa mínimo

c) Calcula $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$

3. Dados os planos $\pi_1: x + y - z + 2 = 0$; $\pi_2: \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de π_1 e π_2 . Se se cortan, calcula o ángulo que forman.

b) Sexa r a recta que pasa polo punto $P(1,1,1)$ e é perpendicular a π_1 . Calcula o punto de corte de r e π_1 .

c) Calcula o punto simétrico do punto $P(1,1,1)$ respecto do plano π_1

4. a) Nun experimento aleatorio, sexan A e B dous sucesos con $P(\bar{A}) = 0,4$; $P(B) = 0,7$. Se A e B son independentes, calcula $P(A \cup B)$ e $P(A - B)$. (Nota: $\bar{A}$ suceso contrario ou complementario de A).

b) Nun grupo de 100 persoas hai 40 homes e 60 mulleres. Elíxense ao azar 4 persoas do grupo, ¿cal é a probabilidade de seleccionar máis mulleres que homes?

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & 1 \\ x & - & z = m \\ x + y - z & = & 1 \end{array}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 1$.

2. a) Calcula os valores a, b para que a función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ sexa derivable en $x = 3$ e determina o punto no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á recta $x + 3y = 0$.

b) Se $P(x)$ é un polinomio de terceiro grao, cun punto de inflexión no punto $(0,5)$ e un extremo relativo no punto $(1,1)$, calcula $\int_0^1 P(x) dx$.

3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $P(1,0,5)$ e $Q(5,2,3)$

a) Calcula a distancia do punto $A(5, -1, 6)$ á recta r .

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a r e pasa polo punto $A(5, -1, 6)$.

c) Calcula a área do triángulo de vértices os puntos $P(1,0,5)$, $A(5, -1, 6)$ e o punto de corte da recta r co plano $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$.

4. Nun estudo realizado nun centro de saúde, observouse que o 30% dos pacientes son fumadores e destes, o 60% son homes. Entre os pacientes que non son fumadores, o 70% son mulleres. Elixido un paciente ao azar,

a) Calcula a probabilidade de que o paciente sexa muller

b) Se o paciente elixido é home, ¿cal é a probabilidade de que sexa fumador?

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\text{a) } AA^t - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(AA^t - \lambda I) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 6\lambda = \lambda(\lambda - 6)$$

Polo tanto:

$$\begin{array}{l} \text{Se } \lambda \neq 0 \text{ e } \lambda \neq 6, \text{ rang}(AA^t - \lambda I) = 2 \\ \text{Se } \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 6, \text{ rang}(AA^t - \lambda I) = 1 \end{array}$$

b)

$$AA^t X = 6X \Leftrightarrow (AA^t - 6I)X = 0$$

Sabemos polo apartado a) que a matriz $AA^t - 6I$ non ten inversa, polo que imos obter infinitas solucións

$$(AA^t - 6I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x - 3y = 0 \Rightarrow x = y$$

As infinitas solucións son

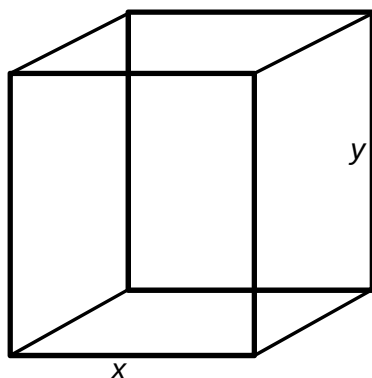
$$X = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}$$

Exercicio 2:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ (L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x \cos x - 6x}{2xe^{x^2} + 2\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 6}{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} + 4\cos 2x} = -\frac{4}{6} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

b)



Sexan:

x = medida da base en dm

y = medida da altura en dm

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Como o volumen é 80dm^3 , temos que

$$x^2y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{x^2}$$

e o custo, función a minimizar, será

$$C(x) = 3x^2 + 2x^2 + 8x \cdot \frac{80}{x^2} = 5x^2 + \frac{640}{x}$$

Calculamos puntos críticos:

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 10x - \frac{640}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 10x^3 = 640 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4$$

Ademais

$$C''(x) = 10 + \frac{1280}{x^3} \Rightarrow C''(4) > 0$$

E polo tanto $C(x)$ ten un mínimo en $x = 4$. Para este valor resulta que $y = \frac{80}{16} = 5$

$$\boxed{\text{Dimensións: } x = 4 \text{ dm; } y = 5 \text{ dm}}$$

c)

Calculamos a integral indefinida

$$\begin{aligned} \int x \ln(1+x) dx &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx = \\ &\left\{ \begin{array}{l} u = \ln(1+x) \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \quad (\text{grao numerador} > \text{grao denominador. Facemos a división}) \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|1+x| + K \end{aligned}$$

Aplicamos a regra de Barrow:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \ln(1+x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|1+x| \right]_0^1 = \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{4}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) Os vectores normais aos planos son:

$$\vec{n}_{\pi_1} = (1, 1, -1)$$
$$\vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (3, -1, 2)$$

Como os vectores normais non son proporcionais, entón

Os planos córtanse

O ángulo α que forman os planos é o ángulo que forman os vectores normais

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}}{|\vec{n}_{\pi_1}| |\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{3 - 1 - 2}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{9+1+4}} = 0$$

Polo tanto

$$\alpha = \pi/2; \pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ son perpendiculares}$$

b) Como a recta r é perpendicular ao plano π_1 , o vector $\vec{n}_{\pi_1}$ é un vector director de r . Ademais, a recta pasa polo punto $P(1,1,1)$. Con estes elementos podemos escribir as ecuacións paramétricas da recta:

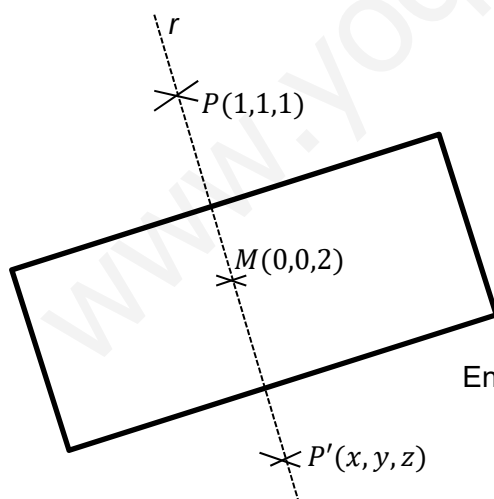
$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Para calcular o punto de corte da recta co plano, substituímos na ecuación de π_1

$$1 + \lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Sustituindo este valor de λ nas ecuacións paramétricas, obtemos o punto de corte da recta e o plano

$$M(0,0,2)$$



Temos que:

M é o punto de corte de r e π_1

$P(1,1,1)$ é un punto de r

r é perpendicular a π_1

Entón M é o punto medio de P e o seu simétrico $P'(x,y,z)$

Polo tanto:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{x+1}{2} \\ 0 &= \frac{y+1}{2} \\ 2 &= \frac{z+1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{P'(-1, -1, 3)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) $P(\bar{A}) = 0,4 \Rightarrow P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$

Como A e B son independentes:

$$P(A) = P(A/B)$$

Pero

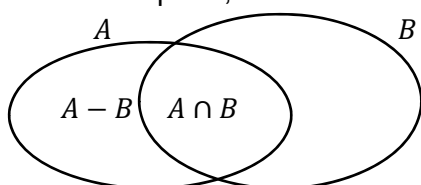
$$\left. \begin{array}{l} P(A) = P(A/B) \\ P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$$

Entón

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,7 - 0,42 = 0,88$$

$$\boxed{P(A \cup B) = 0,88}$$

Por outra parte,



$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

↑
Disxunta

Polo tanto

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = 0,6 - 0,42 = 0,18$$

$$\boxed{P(A - B) = 0,18}$$

b) Se chamamos

M = A persoa elexida é muller

H = A persoa elexida é home

Hai cinco casos posibles: $MMMH, MMHM, MHMM, HMMM, MMMM$

$$\begin{aligned} &P(MMMH) + P(MMHM) + P(MHMM) + P(HMMM) + P(MMMM) \\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{59}{99} \cdot \frac{58}{98} \cdot \frac{40}{97} + \frac{6}{10} \cdot \frac{59}{99} \cdot \frac{40}{98} \cdot \frac{58}{97} + \frac{6}{10} \cdot \frac{40}{99} \cdot \frac{59}{98} \cdot \frac{58}{97} + \frac{4}{10} \cdot \frac{60}{99} \cdot \frac{59}{98} \cdot \frac{58}{97} + \frac{6}{10} \cdot \frac{59}{99} \cdot \frac{58}{98} \cdot \frac{57}{97} \\ &= 0,3490 + 0,1243 = \boxed{0,4733} \end{aligned}$$

Tamén podemos resolvelo utilizando a aproximación pola distribución binomial

X = nº de mulleres nun grupo de 4 persoas

$X \longrightarrow B(4; 0,6)$

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \cdot 0,6^3 \cdot (1 - 0,6) + \binom{4}{4} \cdot 0,6^4 = 0,3456 + 0,1296$$

Polo tanto

$$\boxed{P(X \geq 3) = 0,4752}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C :

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 1 + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

Cálculo do rango da matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m - m - 2 = m - 1$$

➤ $m \neq 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$

➤ $m = 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$

Discusión:

$m = 1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) < n^{\circ} \text{ incógnitas. Sistema compatible indeterminado.}$
 $m \neq 1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A) \text{ Sistema incompatible}$

c) Para $\boxed{m=1}$ xa vimos que era un sistema compatible indeterminado (infinitas solucións). Un sistema equivalente ao dado é:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 1 + z \\ x = 1 + z \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0$$

As infinitas solucións son

$$\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 0; \\ z = \lambda \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) Para que a función sexa derivable en $x = 3$ ten que ser continua en $x = 3$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax^2 + b) = 9a + b \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x - 2) = 0 \\ f(3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 9a + b = 0$$

Por outra parte

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2ax = 6a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-2} = 1$$

Polo tanto, para que a función sexa derivable en $x = 3$, debe cumprirse:

$$9a + b = 0$$

$$6a = 1 \Rightarrow a = 1/6$$

$$\Rightarrow b = -3/2$$

Temos entón

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2} & \text{se } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & \text{se } x < 3 \\ \frac{1}{x-2} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Hai que determinar un punto $(x_0, f(x_0))$ tal que $f'(x_0) = -\frac{1}{3}$ = pendente de $x + 3y = 0$

$$\frac{1}{3}x_0 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_0 = -1 < 3 \text{ que está no dominio de definición de } \frac{1}{3}x$$

$$\frac{1}{x_0-2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_0 = -1 > 3 \text{ Polo tanto non está no dominio de definición de } \ln(x-2)$$

$$\text{Punto: } \left(-1, -\frac{4}{3}\right)$$

b) $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$P''(x) = 6ax + 2b$$

A gráfica de $P(x)$ pasa polo punto (0,5)

$$P(0) = 5 \Rightarrow d = 5$$

$P(x)$ ten un punto de inflexión en $x = 0$

$$P''(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$P(x) = ax^3 + cx + 5$$

A gráfica de $P(x)$ pasa polo punto (1,1)

$$P(1) = 1 \Rightarrow a + c + 5 = 1$$

$P(x)$ ten un extremo relativo en $x = 1$

$$P'(1) = 0 \Rightarrow 3a + c = 0$$

$$\Rightarrow a = 2; c = -6$$

Entón

$$\int_0^1 P(x)dx = \int_0^1 (2x^3 - 6x + 5)dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 5x \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 3 + 5 = \frac{5}{2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) Calculamos un vector director da recta;

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (4, 2, -2)$$

E utilizando a fórmula da distancia dun punto a unha recta

$$d(A, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\|}{\|\vec{v}_r\|} = \frac{\sqrt{144+144}}{\sqrt{16+4+4}} = \sqrt{12} = \boxed{2\sqrt{3} u}$$

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (0, -12, -12)$$

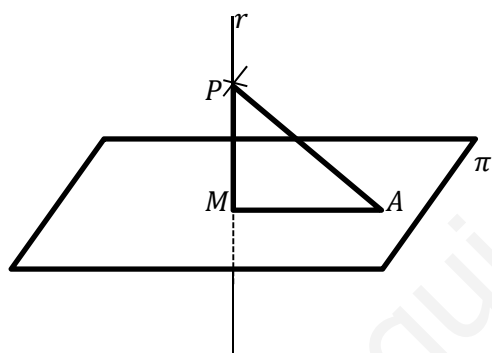
b) Sexa π o plano buscado e $\vec{n}_\pi$ un vector normal do plano

$$r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_\pi$$

$$A \in \pi$$

$$\Rightarrow \pi : 4(x-5) + 2(y+1) - 2(z-6) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : 2x + y - z - 3 = 0}$$

c)



Para calcular o punto de corte, M , da recta r co plano π escribimos as ecuacións paramétricas da recta e substituímos na ecuación do plano

$$\left. \begin{array}{l} P(1,0,5) \in r \\ \vec{v}_r = (4,2,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 2(1+4\lambda) + 2\lambda - (5-2\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 12\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Levando este valor ás ecuacións paramétricas da recta obtemos $M(3,1,4)$. Como a recta é perpendicular ao plano, o triángulo é rectángulo con ángulo recto en M . Polo tanto

$$\text{Área } \triangle AMP = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{PM}| = \frac{1}{2} |(-2, 2, -2)| \cdot |(2, 1, 1)| = \frac{1}{2} \sqrt{12} \cdot \sqrt{6} = \boxed{3\sqrt{2} u^2}$$

Tamén se podería calcular

$$\text{Área } \triangle AMP = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AP}| = \frac{1}{2} \sqrt{72} = \boxed{3\sqrt{2} u^2}$$

$$\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 6, 6)$$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

Se chamamos

H = "Un paciente é home"

M = "Un paciente é muller"

F = "Un paciente é fumador"

Datos:

$$P(F) = 0,3$$

$$P(H/F) = 0,6$$

$$P(M/\bar{F}) = 0,7$$

a) Polo teorema de probabilidades totales:

$$P(M) = P(M/F) \cdot P(F) + P(M/\bar{F}) \cdot P(\bar{F}) = 0,4 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,7 = 0,12 + 0,49 = \boxed{0,61}$$

b) Pola regra de Bayes:

$$P(F/H) = \frac{P(F \cap H)}{P(H)} = \frac{P(H/F) \cdot P(F)}{P(H)} = \frac{0,6 \cdot 0,3}{1 - 0,61} = \boxed{0,461}$$

Pódese facer un diagrama en árbol:

