SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$

a) Calcule $(A-B)$ (0,5 puntos)

b) Calcule $(A-B)^{-1}$ (0,5 puntos)

c) Hallar la matriz X que verifica $AX-A=BX+B$ (1 punto)

a) $A-B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\-2&0\end{pmatrix}$

b) Veamos si la matriz tiene inversa.

$$|A-B|=\begin{vmatrix}-1&-1\\-2&0\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

El determinante es no nulo y existe su inversa.

$$(A-B)^{-1}=\frac{Adj(A-B)}{|A-B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1&-2\\-1&0\end{pmatrix}}{-2}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1/2\\-1&1/2\end{pmatrix}$$

c) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX-A=BX+B\Rightarrow AX-BX=A+B\Rightarrow (A-B)X=A+B\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A-B)^{-1}(A-B)X=(A-B)^{-1}(A+B)\Rightarrow X=(A-B)^{-1}(A+B)$$

Sustituimos las matrices y operamos.

$$X=(A-B)^{-1}(A+B)$$
$$X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\2&-1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\right]$$
$$X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&4\end{pmatrix}$$
$$X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&4\\6&2-4\end{pmatrix}$$
$$X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&4\\6&-2\end{pmatrix}$$
$$\boxed{X=\begin{pmatrix}0&-2\\-3&1\end{pmatrix}}$$

CUESTIÓN 2. (2 puntos) Sea S la región del plano definida por las inecuaciones.

$$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\geq 2x-4,\ y\leq x-1,\ 2y\geq x,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$$

a) Representar la región S y obtener sus vértices.

b) Maximizar la función $f(x,y)=x-3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el máximo.

c) Minimizar la función $f(x,y)=x-3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el mínimo.

a) Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones y que delimitan la región S.

$y=2x-4$

x	$y=2x-4$
2	0
4	4

$y=x-1$

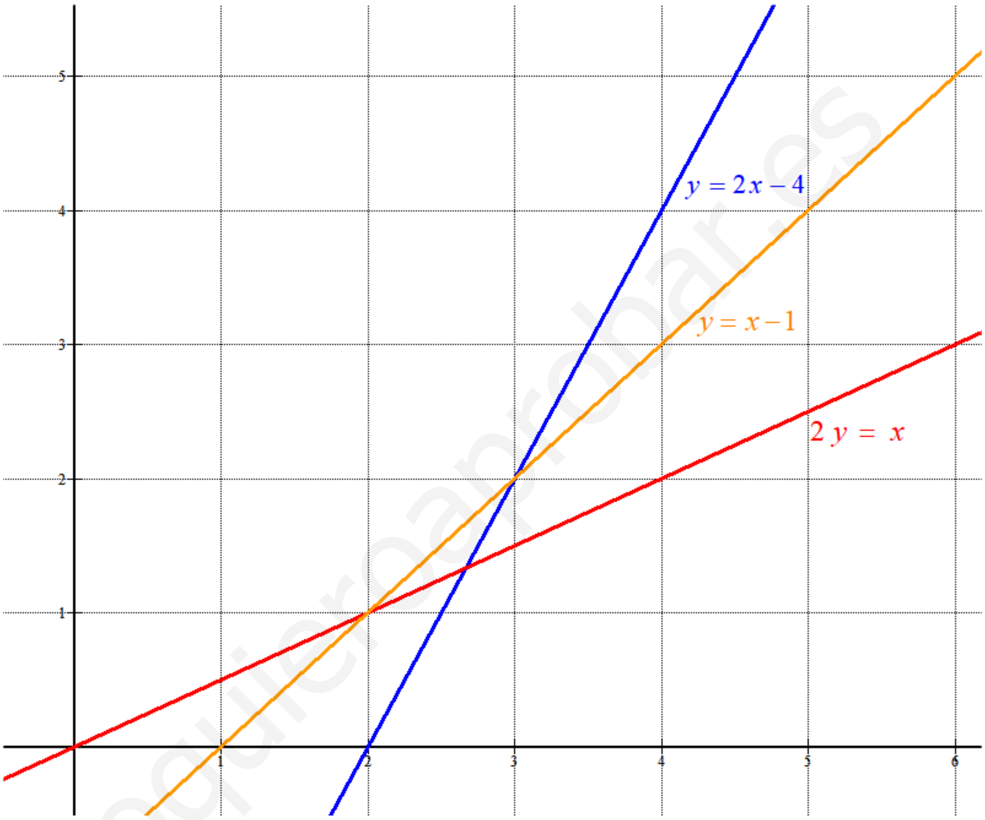
x	$y=x-1$
0	1
2	1

$2y=x$

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
2	1

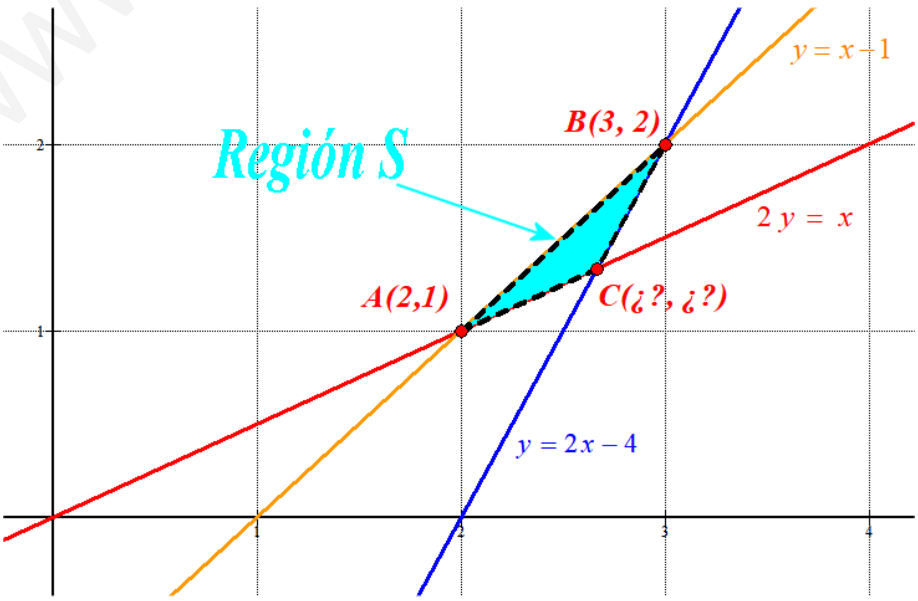
$x\geq 0,\ y\geq 0$

Primer cuadrante



Por las condiciones impuestas en las restricciones la región S está situada por encima de la recta azul ($y\geq 2x-4$), por debajo de la recta naranja ($y\leq x-1$) y por encima de la recta roja ($2y\geq x$).

La región S es la pintada de azul claro.



Las coordenadas de los vértices A y B se aprecian en el dibujo: A(2, 1), B(3,2).

Las coordenadas del vértice C lo obtenemos resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y=2x-4 \\ 2y=x \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2x-4)=x \Rightarrow 4x-8=x \Rightarrow 3x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{3} \Rightarrow 2y=\frac{8}{3} \Rightarrow y=\frac{4}{3} \Rightarrow C\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$$

b) Valoramos la función $f(x,y)=x-3y$ en cada vértice.

- A(2, 1) → $f(2,1)=2-3=-1$
- B(3,2) → $f(3,2)=3-6=-3$
- $C\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$ → $f(x,y)=\frac{8}{3}-3\frac{4}{3}=\frac{8-12}{3}=-\frac{4}{3}$

El máximo valor que alcanza la función en la región S es –1 en el punto A(2, 1).

c) Con lo obtenido en el apartado anterior podemos afirmar que el valor mínimo que alcanza la función en la región S es –3 en el punto B(3, 2).

CUESTIÓN 3. Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años viene dado por la función: $B(t)=\begin{cases} at-t^2 & si \quad 0\le t\le 6 \\ 2t & si \quad 6<t\le 10 \end{cases}$ siendo *t* el tiempo transcurrido en años.

a) Calcular el valor del parámetro *a* para que la función de beneficios sea continua. (0,5 puntos)
b) Para *a* = *8* represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece o decrece. (1 punto)
c) Para *a* = *8* indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo beneficio y cuál es su valor. (0,5 puntos)

a) Para que sea continua debe serlo en *x* = *6* y debe cumplir:

- Existe $B(6)=6a-6^2=6a-36$
- Existe $\lim_{t\to 6} B(t)=\left\{\begin{matrix} \lim_{t\to 6^-} at-t^2=6a-36 \\ \lim_{t\to 6^+} 2t=12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 12=6a-36 \Rightarrow 6a=48 \Rightarrow a=8$
- Son iguales → $\lim_{t\to 6} B(t)=B(6)=12$

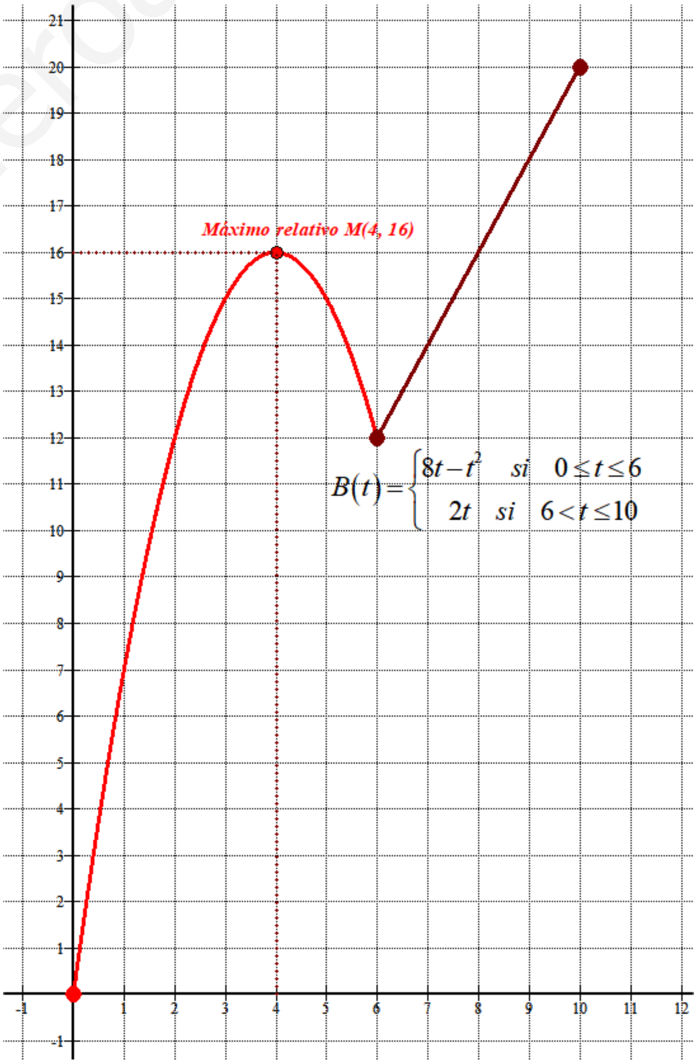
Tomando *a* = *8* se cumplen las tres condiciones y la función *B(t)* es continua.

b) Para *a* = *8* la función es $B(t)=\begin{cases} 8t-t^2 & si \quad 0\le t\le 6 \\ 2t & si \quad 6<t\le 10 \end{cases}$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

t	$B(t)=8t-t^2$
0	0
2	12
4	16
6	12

t	$B(t)=2t$
6	12 Punto vacio
10	20



Observando la gráfica tenemos que la función crece del año *0* hasta el 4º año y entre el año 6º y el año 10º.
Decrece entre el año *4º* y el 6º.

c) Para *a* = *8* observamos en la gráfica que en los 6 primeros años (la parábola) el máximo beneficio se obtiene en el año 4, siendo este beneficio de 16

CUESTIÓN 4. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\left(x^2-2\right)\ln x$ (1 punto)

b) $f(x)=e^{4x^3+2}$ (1 punto)

a) $f(x)=\left(x^2-2\right)\ln x \Rightarrow f\,'(x)=(2x)\ln x+\left(x^2-2\right)\dfrac{1}{x}=\boxed{2x\ln x+\dfrac{x^2-2}{x}}$

b) $f(x)=e^{4x^3+2} \Rightarrow \boxed{f\,'(x)=12x^2e^{4x^3+2}}$

CUESTIÓN 5. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x)=4-x^2$ y la recta $g(x)=2+x$. Calcular su área.

Averiguamos los puntos de corte de ambas gráficas.

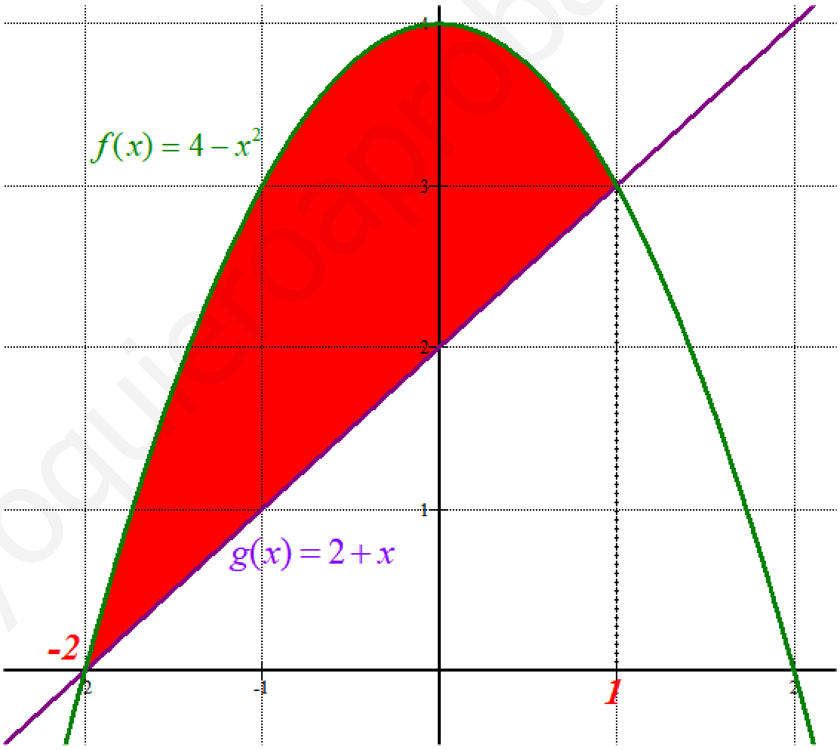
$$f(x)=g(x)\Rightarrow 4-x^2=2+x\Rightarrow 0=x^2+x-2\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{-1+3}{2}=1=x\\ \frac{-1-3}{2}=-2=x\end{cases}$$

Los puntos de corte son $\begin{cases}x=1\Rightarrow f(1)=4-1=3\Rightarrow P(1,3)\\ x=-2\Rightarrow f(-2)=4-4=0\Rightarrow Q(-2,0)\end{cases}$

Completamos la tabla de valores y dibujamos la recta $g(x)=2+x$ y la parábola $f(x)=4-x^2$. Pintamos de rojo la región del plano que buscamos.

x	$y=2+x$
-1	1
0	2

x	$y=4-x^2$
-2	0
-1	3
0	4
1	3



$$Área=\int_{-2}^{1} f(x)-g(x)dx=\int_{-2}^{1} 4-x^2-(2+x)dx=\int_{-2}^{1} 4-x^2-2-xdx=\int_{-2}^{1} 2-x^2-xdx=$$

$$=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}=\left[2-\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right]-\left[2(-2)-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}\right]=2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+4-\frac{8}{3}+2=8-3-\frac{1}{2}=\boxed{4.5\,u^2}$$

CUESTIÓN 6. (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 6x$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

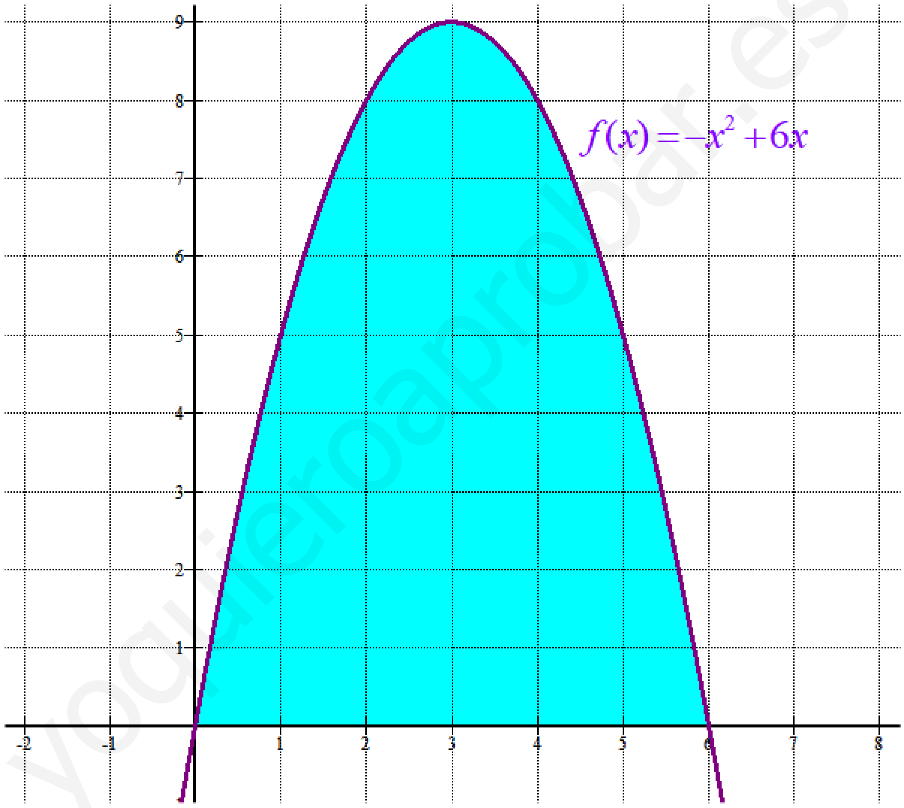
¿Dónde se corta la función $f(x) = -x^2 + 6x$ y el eje OX (*y = 0*)?

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 + 6x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = -x^2 + 6x \Rightarrow x(-x+6) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ -x+6 = 0 \rightarrow x = 6 \end{array}\right.$$

La gráfica de la parábola corta el eje OX en los puntos P(0,0) y Q(6,0).

Hacemos primero la gráfica de la parábola y pintamos de azul el recinto del cual queremos determinar el área.

x	$y = -x^2 + 6x$
0	0
2	8
4	8
6	0



$$Área = \int_0^6 -x^2 + 6x dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} \right]_0^6 = \left[-\frac{6^3}{3} + 6\frac{6^2}{2} \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 6\frac{0^2}{2} \right] = -72 + 108 = \boxed{36\, u^2}$$

CUESTIÓN 7. Entre los alumnos ERASMUS que han llegado este curso a la Universidad de Murcia el 75% hablan inglés, el 50% hablan francés y un 5% no hablan ninguno de estos dos idiomas. Elegido un alumno al azar:

a) Calcule la probabilidad de que hable inglés o francés. (0,5 puntos)
b) Calcule la probabilidad de que hable inglés y francés. (0,5 puntos)
c) Calcule la probabilidad de que, hablando inglés, no hable francés. (1 punto)

Realizamos una tabla de contingencia que nos aclare los cruces de información.

	Habla francés	No habla francés	
Habla inglés			**75**
No habla inglés		**5**	
	50		**100**

Completamos la tabla.

	Habla francés	No habla francés	
Habla inglés	**30**	**45**	**75**
No habla inglés	**20**	**5**	**25**
	50	**50**	**100**

Respondemos a las preguntas utilizando la regla de Laplace.

a)

$$P(\text{Hable inglés o francés}) = \frac{30+20+45}{100} = \boxed{\frac{95}{100} = 0.95}$$

b)

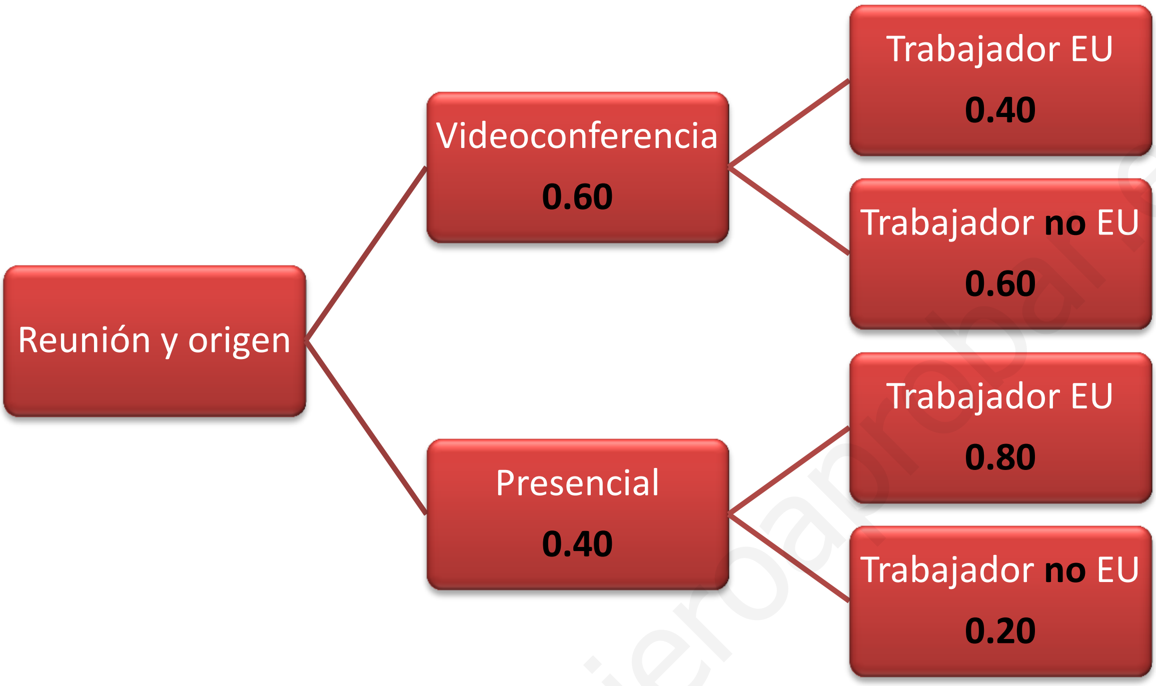
$$P(\text{Hable inglés y francés}) = \boxed{\frac{30}{100} = 0.3}$$

c)

$$P(\text{No hable francés / Habla inglés}) = \frac{\text{N}^{\text{o}}\text{ de alumnos que hablan inglés y no francés}}{\text{N}^{\text{o}}\text{ alumnos que hablan inglés}} = \frac{45}{75} = \boxed{\frac{3}{5} = 0.6}$$

CUESTIÓN 8. En una empresa multinacional el 60% de las reuniones se realizan a través de videoconferencia. El 40% de los empleados que asisten a estas videoconferencias son de países de la Unión Europea, mientras que en las reuniones presenciales solo el 20% son trabajadores que no pertenecen a la Unión Europea. Si elegimos un trabajador al azar:
a) Calcule la probabilidad de que pertenezca a la Unión Europea (1 punto)
b) Sabiendo que el trabajador es de la Unión Europea, ¿Cuál es la probabilidad de que haya asistido a la reunión por videoconferencia (1 punto)

Realizamos un diagrama de árbol.



a)

$$P(Trabajador\ EU) = P(Viedoconferencia)P(Trabajador\ EU / Viedoconferencia) +$$
$$+P(\text{Presencial})P(\text{Trabajador EU / Presencial}) =$$
$$= 0.60 \cdot 0.40 + 0.40 \cdot 0.80 = 0.24 + 0.32 = \boxed{0.56}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(Videoconferencia / Trabajador\ EU) = \frac{P(Videoconferencia\ y\ Trabajador\ EU)}{P(Trabajador\ EU)} =$$
$$= \frac{0.60 \cdot 0.40}{0.56} = \frac{0.24}{0.56} = \boxed{\frac{3}{7} = 0.4286}$$

CUESTIÓN 9. (2 puntos) El precio medio de los aspiradores de una gran superficie se distribuye según una distribución normal de desviación típica 100 €. Se toma una muestra aleatoria de 9 aspiradoras de distintas marcas obteniendo un precio medio de 178.89 €. Determine un intervalo de confianza al 99% para el precio medio.
Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 99% el error cometido de estimación del precio no supere los 50 €.

1ª parte del ejercicio

Sea X la variable aleatoria que mide el precio de un aspirador.
Sabemos que sigue una N(**μ**, 100).

La muestra es de 9 aspiradoras → n = 9, $\bar{x} = 178.89$ €

Para un nivel de confianza del 99%

$1 - \alpha = 0{,}99$ → $\alpha = 0{,}01$ → $\alpha/2 = 0'005$ → $1 - \alpha/2 = 0{,}995$ → $z_{\alpha/2}$ **= 2,575**

El error del intervalo viene dado por la fórmula

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{100}{\sqrt{9}} = 85.8384$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(178.89 - 85.84, 178.89 + 85.84\right) = \left(93.05, 264.73\right)$$

2ª parte del ejercicio

Volvemos a utilizar el que la variable X = N(**μ**, 100) y que para un nivel de confianza del 99% tenemos $z_{\alpha/2}$ **= 2,575.**

$$Error = 50 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{100}{\sqrt{n}} = 50 \Rightarrow 2.575 \cdot \frac{100}{50} = \sqrt{n}$$

$$n = \left(2.575 \cdot \frac{100}{50}\right)^2 = 26.52$$

La muestra debe ser de al menos 27 aspiradores.

CUESTIÓN 10. (2 puntos) Se sabe que el peso de los tarros de cacao de un supermercado es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 1,8 gramos. Se toma una muestra aleatoria de 9 tarros y se obtiene un peso medio de 89 gramos. Obtenga un intervalo de confianza, al 95% para la media de esta población.

¿Cuál será el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido de estimación del peso no supere 1 gramo, a un nivel de confianza del 95%?

X = Peso de un tarro de cacao
X = N(μ, 1.8)

La muestra es de tamaño $n = 9$ y la media muestral es $\bar{x} = 89$ gramos

Con un nivel de confianza del 95% tenemos que

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{1.8}{\sqrt{9}} = 1.176$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(89 - 1.176, 89 + 1.176\right) = \left(87.824, 90.176\right)$$

a) Con el nivel de confianza del 95% ya hemos calculado $z_{\alpha/2}$ **= 1,96.**
El Error de 1 lo ponemos en la fórmula y despejamos n.

$$Error = 1 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1.8}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 1.96 \cdot 1.8 = \sqrt{n}$$

$$n = \left(1.96 \cdot 1.8\right)^2 = 12,4468$$

La muestra debe ser al menos de 13 tarros de cacao.