SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ ax-y-z=a-1 \\ 3x-2az=a-1 \end{array}\right\}$$ **(2,5 puntos)**

Resolverlo para a=0 **(0,5 puntos)**

La matriz de coeficientes del sistema y su matriz ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{pmatrix} \quad A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ a & -1 & -1 & a-1 \\ 3 & 0 & -2a & a-1 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{vmatrix}=4a-3-3+2a^2=2a^2+4a-6$$

Si igualamos a cero.

$$|A|=0 \Rightarrow 2a^2+4a-6=0 \Rightarrow a^2+2a-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases} =\frac{-2+4}{2}=1 \\ =\frac{-2-4}{2}=-3 \end{cases}$$

Estudiamos tres casos distintos.

CASO 1. $a\neq 1 \text{ y } a\neq -3$

El determinante de A es no nulo y el rango de A es 3. Al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

CASO 2. $a=1$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \\ 3x-2z=0 \end{array}\right\}$$ Utilizamos Gauss para estudiar su compatibilidad.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \\ 3x-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{La ecuación 2ª la sustituimos por} \\ 2\cdot\text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ \\ \begin{array}{rrrr} 2x & -2y & -2z & =0 \\ -2x & -y & +z & =0 \\ \hline & -3y & -z & =0 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{La ecuación 3ª la sustituimos por} \\ 2\cdot\text{Ecuación 3ª - 3}\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ \\ \begin{array}{rrrr} 6x & & -4z & =0 \\ -6x & -3y & +3z & =0 \\ \hline & -3y & -z & =0 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ -3y-z=0 \\ -3y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ -3y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=z \\ -3y=z \end{array}\right\}$$

Este sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones, dependiendo de los valores de z.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO
Estudiando los rangos.

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

El determinante de A es 0. El rango de A es menor de 3.
¿El rango de A es 2? Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-1=-3 \neq 0$. El rango de A es 2

Como la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ que solo añade una columna de ceros. El rango de A/B y el de A son el mismo.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3 = número de incógnitas.
El sistema tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $a=-3$

El sistema queda

$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ -3x-y-z=-4 \\ 3x+6z=-4 \end{array}\right\}$ Utilizamos Gauss para estudiar su compatibilidad.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ -3x-y-z=-4 \\ 3x \quad +6z=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{La ecuación } 2^a \text{ se sustituye por} \\ 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a + 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \\ \begin{array}{rrrr} -6x & -2y & -2z & =-8 \\ 6x & +3y & -3z & =0 \\ \hline & y & -5z & =-8 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{La ecuación } 3^a \text{ se sustituye por} \\ 2 \cdot \text{Ecuación } 3^a \text{ - } 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \\ \begin{array}{rrrr} 6x & & +12z & =-8 \\ -6x & -3y & +3z & =0 \\ \hline & -3y & +15z & =-8 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ y-5z=-8 \\ -3y+15z=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{La ecuación } 3^a \text{ se sustituye por} \\ 3 \cdot \text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 3^a \\ \\ \begin{array}{rrrr} 3y & -15z & = & -24 \\ -3y & +15z & = & -8 \\ \hline & 0 & = & -32 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ y-5z=-8 \\ 0=-32 \end{array}\right\}$$

El sistema ecuaciones es incompatible. No tiene solución al ser la última ecuación una igualdad imposible.

OTRA FORMA DE HACERLO

Con el estudio de los rangos de la matriz.

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

El determinante de A es 0. El rango de A es menor de 3.

¿El rango de A es 2? Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2+3=1\neq 0$$. El rango de A es 2

¿Cuál es el rango de $A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$?

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 3ª columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 8-12-12=-16\neq 0$$. El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = rango de A/B. El sistema es incompatible. No tiene solución.

Resolvamos el sistema para $a=0$. Estamos en el caso 1, es decir, el sistema tiene una única solución.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ -y-z=-1 \\ 3x=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ -y-z=-1 \\ \boxed{x=-\frac{1}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\frac{2}{3}+y-z=0 \\ y=1-z \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{2}{3}+(1-z)-z=0 \Rightarrow -2z=-1+\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2z=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{6}} \Rightarrow \boxed{y=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}}$$

La solución es $x=-\frac{1}{3};\ y=\frac{5}{6};\ z=\frac{1}{6}$

CUESTIÓN A2. Determine el punto de la gráfica de la función $f(x)=-x^3+6x^2-7x+5$ en la que la pendiente de la recta tangente sea máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?. **(2 puntos)**

La pendiente de la recta tangente en x = a es *f ´(a).*

Queremos hacer máxima la pendiente *f ´(a)*→ $f''(a)=0\ y\ f'''(a)<0$

Averigüemos donde se anula la derivada segunda.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=-3x^2+12x-7 \Rightarrow f''(x)=-6x+12 \\ f''(a)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -6x+12=0 \Rightarrow x=\frac{-12}{-6}=2$$

Como $f''(x)=-6x+12 \Rightarrow f'''(x)=-6 \Rightarrow f'''(2)=-6<0$

En x = 2 hay un máximo de la pendiente de la tangente de la función.

La ecuación de esta tangente en x = 2 es:

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=-2^3+6(2)^2-14+5=-8+24-14+5=7 \\ f'(2)=-3(2)^2+24-7=-12+24-7=5 \end{array}\right\} \Rightarrow y-f(2)=f'(2)(x-2)$$

$$y-7=5(x-2) \Rightarrow y-7=5x-10 \Rightarrow \boxed{y=5x-3}$$

CUESTIÓN A3. Representar gráficamente la región limitada por las funciones $f(x)=9-x^2$ y $g(x)=x^2-9$. Calcula su área. **(2 puntos)**

Encontremos los posibles puntos de corte entre estas dos funciones.

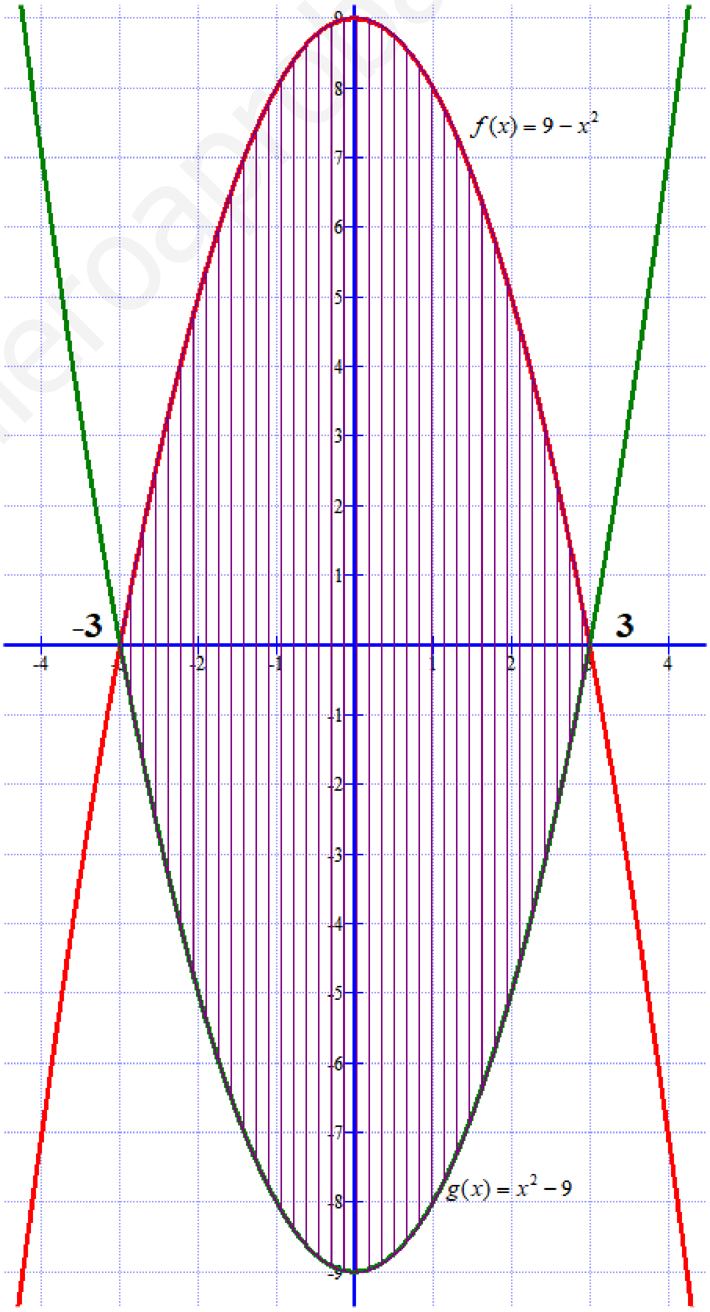
$f(x)=g(x) \Rightarrow 9-x^2=x^2-9 \Rightarrow 18=2x^2 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$

Se cortan en x = – 3 y en x = + 3.

Hacemos una tabla de valores

x	$y=9-x^2$
-3	0
-1	8
0	9
1	8
3	0

x	$y=x^2-9$
-3	0
-1	-8
0	-9
1	-8
3	0



La región es la zona rayada.

Calculamos el área de la región con una integral definida de la diferencia de las dos funciones entre –3 y 3.

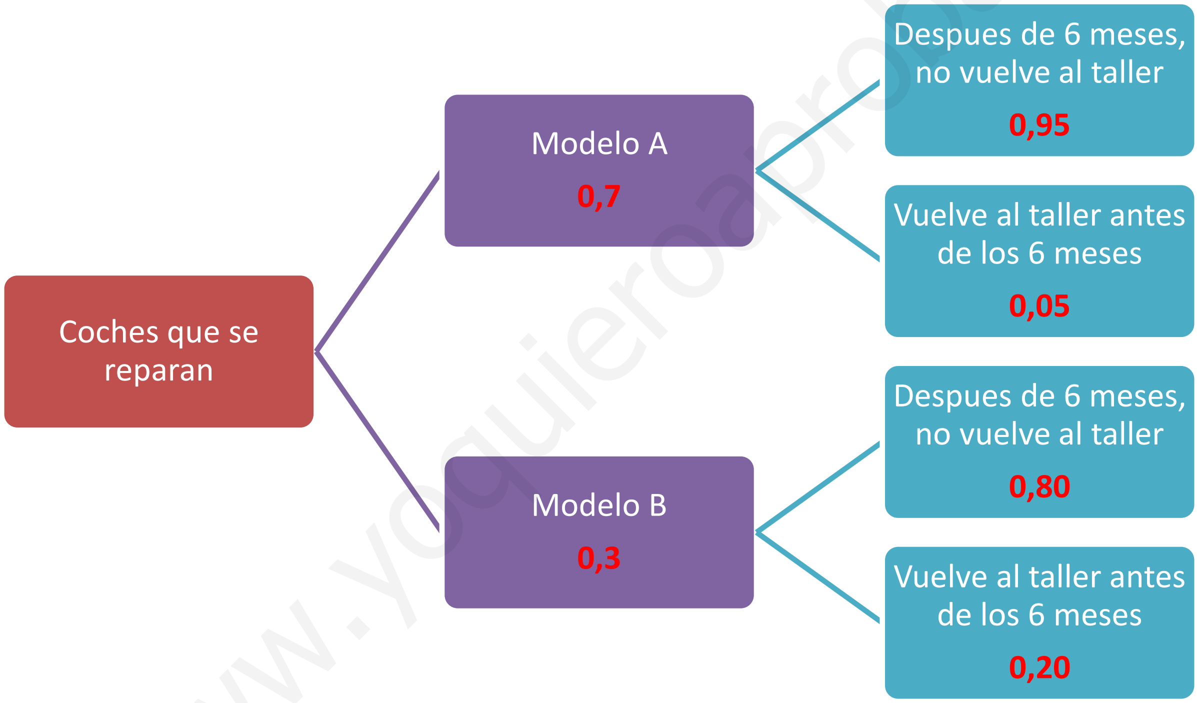
$$Área = \int_{-3}^{3} 9-x^2-\left(x^2-9\right)dx = \int_{-3}^{3} 9-x^2-x^2+9dx = \int_{-3}^{3} 18-2x^2dx =$$

$$= \left[18x-\frac{2x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = \left[18 \cdot 3-\frac{2 \cdot 3^3}{3}\right]-\left[18(-3)-\frac{2(-3)^3}{3}\right] = 54-18-[-54+18] = \boxed{72\ u^2}$$

CUESTIÓN A4. En un taller mecánico el 70% de los coches que se reparan son del modelo A y el resto de un modelo B. Después de 6 meses, el 95% de los coches del modelo A no vuelven al taller mientras que del modelo B solo no vuelven el 80%. Si elegimos un coche al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva al taller antes de 6 meses? **(0,75 puntos)**
b) Si se observa que antes de los seis meses vuelve al taller, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B? **(0,75 puntos)**

Construimos un diagrama de árbol



a)

$$P(\text{Vuelve al taller antes de los 6 meses}) =$$
$$= P(\text{Es del modelo A})P(\text{Vuelve al taller antes de los 6 meses / Es del modelo A}) +$$
$$+P(\text{Es del modelo B})P(\text{Vuelve al taller antes de los 6 meses / Es del modelo B}) =$$
$$= 0,7 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,20 = 0,035 + 0,06 = \boxed{0,095}$$

b)

$$P(\text{Sea del modelo B / Vuelve al taller antes de los 6 meses}) =$$
$$= \frac{P(\text{Sea del modelo B y Vuelve al taller antes de los 6 meses})}{P(\text{Vuelve al taller antes de los 6 meses})} = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,095} = \boxed{0,6313}$$

CUESTIÓN A5. Se sabe que la estatura de los individuos de Murcia es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 6 cm. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos y da una media de 176 cm. Obtenga un intervalo de confianza, con un 99% de confianza, para la media de la estatura de la población. **(1,5 puntos)**

X = Estatura de un murciano en cm.

X ≈ N(μ, 6)

n = 225 → $\bar{x} = 176$

$$1-\alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,995 \rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Busco en la tabla de} \\ \text{la N(0,1)}\end{matrix}\right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2,57+2,58}{2}$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$$

El error es $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575 \cdot \frac{6}{\sqrt{225}} = 1,03$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (176 - 1,03, 176 + 1,03) = (174.97, 177.03)$$

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Un joven emprendedor quiere montar una empresa informática donde comercializará dos tipos de ordenadores. El tipo A dispondrá de 1 disco duro y 1 una unidad de memoria de pequeña capacidad, mientras que el tipo B tendrá 2 discos duros y su unidad de memoria será de alta capacidad. En total cuenta con 40 unidades de memoria de pequeña capacidad y 30 unidades de memoria de alta capacidad y 80 discos duros. Por cada ordenador del tipo A espera obtener un beneficio de 150 euros y del tipo B de 250 euros.

a) ¿Cuál es la mejor decisión sobre el número de ordenadores a montar de cada tipo? **(2,5 puntos)**

b) Con esta producción, ¿habría algún excedente en el material mencionado? **(0,5 puntos)**

a) Llamamos ***x*** al número de ordenadores del tipo A, ***y*** al número de ordenadores del tipo B.

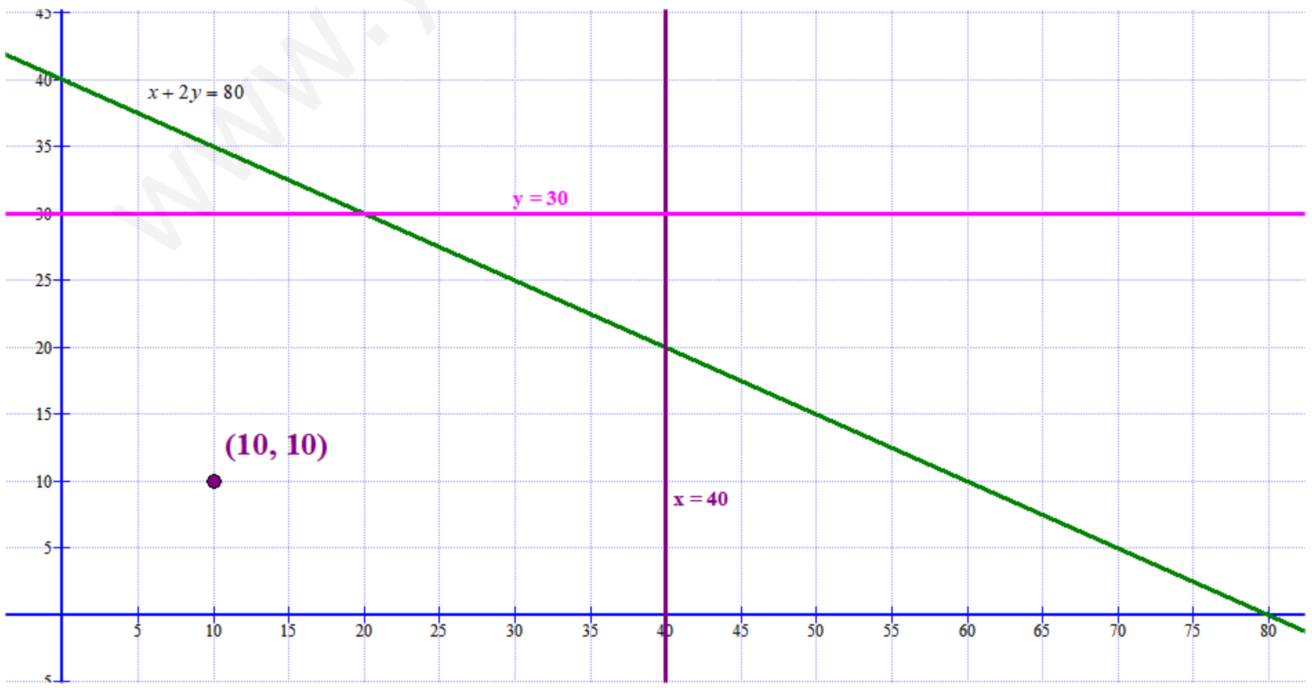
Las restricciones asociadas al problema son:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \text{Cada ordenador del tipo A tiene una memoria de pequeña capacidad } \rightarrow x \leq 40 \\ \text{Cada ordenador del tipo B tiene una memoria de alta capacidad } \rightarrow y \leq 30 \\ \text{Cada ordenador del tipo A tiene un disco duro y cada uno del B tiene dos } \rightarrow x + 2y \leq 80 \end{array}\right\}$$

Y la función beneficio es $B(x, y) = 150x + 250y$

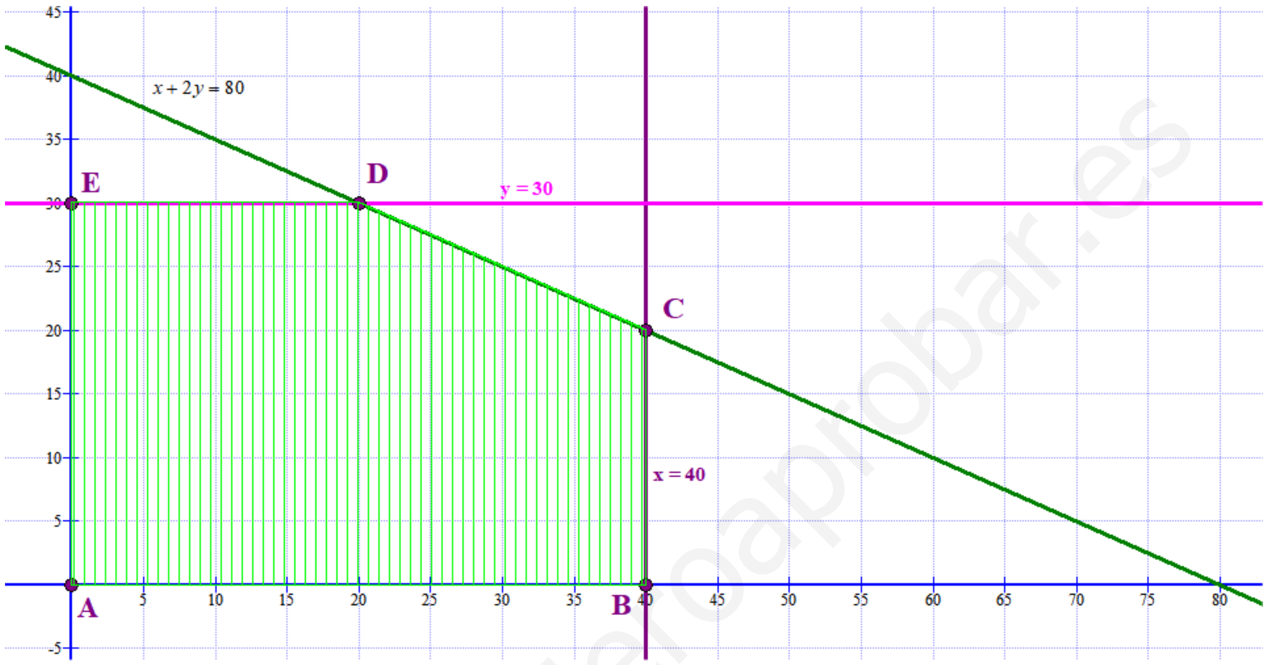
Hacemos una tabla de valores para dibujar la recta $x + 2y = 80$. Las otras rectas no precisan de tabla para poder dibujar su gráfica.

x	$y = \frac{80 - x}{2}$
0	40
80	0
40	20
20	30



Probando el punto (10, 10) vemos que cumple todas las restricciones, luego la región factible es la zona rayada y los candidatos a maximizar la función beneficio son los puntos A, B, C, D y E.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \geq 0 \\ 10 \geq 0 \\ 10 \leq 40 \\ 10 \leq 30 \\ 10+20 \leq 80 \end{array}\right\}$$



A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(40, 0) → $B(40,0)=6000+0=6000$

C(40, 20) → $B(40,20)=6000+5000=11000$

D(20, 30) → $B(20,30)=3000+7500=10500$

E(0, 30) → $B(0,30)=0+7500=7500$

El máximo beneficio se obtiene en el punto C(40, 20). Hay que fabricar 40 ordenadores del tipo A y 20 del tipo B para maximizar el beneficio.

b) 40 ordenadores del tipo A necesitan 40 unidades de memoria de pequeña capacidad, como solo hay 40, aquí no hay excedentes.
20 ordenadores del tipo B necesitan 20 unidades de memoria de alta capacidad, como hay 30 sobran 10 unidades de memoria de alta capacidad.
40 ordenadores del tipo A y 20 ordenadores del tipo B necesitan 40 + 40 = 80 discos duros, como solo hay 80 no hay excedentes en discos duros.

Solo sobran 10 memorias de alta capacidad.

CUESTIÓN B2. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. **(0,75 puntos)**

b) $f(x)=xe^{2x}$. **(0,75 puntos)**

a) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{x-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

$\boxed{f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}}$

b)

$f(x)=xe^{2x} \Rightarrow f'(x)=e^{2x}+x\cdot 2e^{2x}=e^{2x}(1+2x)$

$\boxed{f'(x)=e^{2x}(1+2x)}$

CUESTIÓN B3. Dada la función $f(x)=2e^{x+1}$,

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto *x = 1*. **(1 punto)**

b) Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=1$. **(1 punto)**

a) La recta tangente a la función $f(x)=2e^{x+1}$ en x = 1 es:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

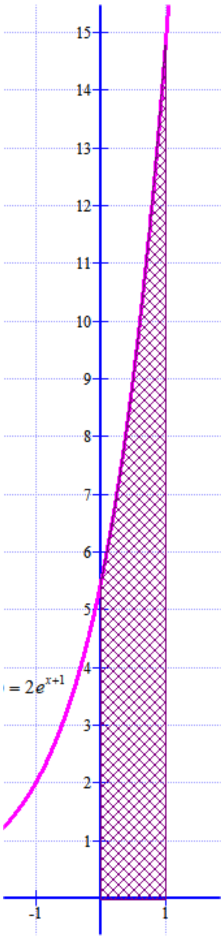
Como la derivada de la función es $f'(x)=2e^{x+1}$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=2e^{1+1}=2e^2 \\ f'(1)=2e^{1+1}=2e^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y-2e^2=2e^2(x-1) \Rightarrow y-2e^2=2e^2x-2e^2 \Rightarrow \boxed{y=2e^2x}$$

b) La función $f(x)=2e^{x+1}$ es siempre positiva y no corta el eje de abscisas, por lo que el área pedida es la integral definida de la función entre 0 y 1.

$$\int_0^1 2e^{x+1}dx=\left[2e^{x+1}\right]_0^1=2e^{1+1}-2e^{0+1}=2e^2-2e=\boxed{9{,}34\,u^2}$$

Se corresponde aproximadamente con los cuadraditos de la zona rayada de la región del dibujo.

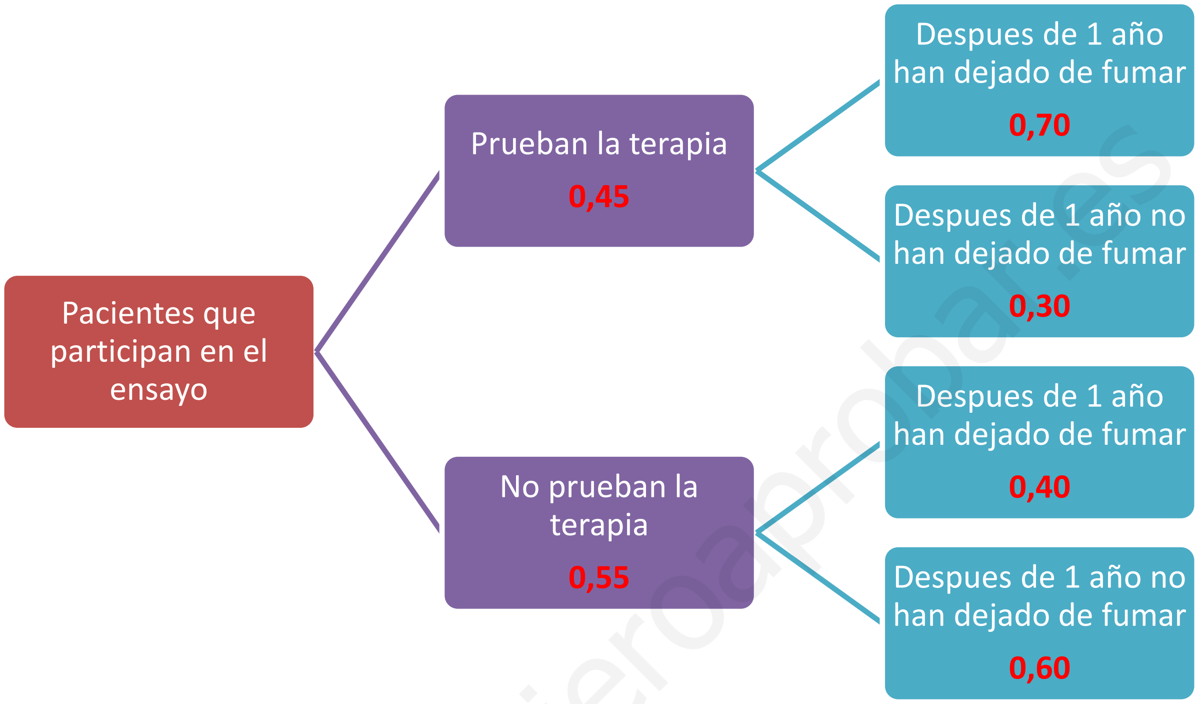


CUESTIÓN B4. En un hospital de la región de Murcia se está probando una nueva terapia para dejar de fumar. De los pacientes que entran en este ensayo el 45% prueba la terapia y el resto no. Después de un año el 70% de los que siguieron la terapia y el 40% de los que no la siguieron han dejado de fumar. Se elige al azar a un paciente fumador de este hospital:

a) Calcule la probabilidad de que después de un año haya dejado de fumar. **(0,75 puntos)**

b) Si transcurrido un año el paciente sigue fumando, calcule la probabilidad de que haya seguido la nueva terapia. **(0,75 puntos)**

Construimos el diagrama de árbol



a)

$$P(\text{Haya dejado de fumar al cabo del año}) =$$
$$= P(\text{Haya probado la terapia}) \cdot P(\text{Haya probado la terapia y deje de fumar al año}) +$$
$$+ (\text{No haya probado la terapia}) \cdot P(\text{No haya probado la terapia y deje de fumar al año}) =$$
$$= 0,45 \cdot 0,7 + 0,55 \cdot 0,4 = 0,315 + 0,22 = \boxed{0,535}$$

b)

$$P(\text{Haya seguido la terapia / No ha dejado de fumar}) =$$
$$= \frac{P(\text{Haya seguido la terapia y no ha dejado de fumar})}{P(\text{No ha dejado de fumar})} =$$
$$= \frac{0,45 \cdot 0,3}{1 - 0,535} = \frac{0,135}{0,465} = \boxed{0,2903}$$

CUESTIÓN B5. En un estudio realizado por una empresa se ha obtenido que el intervalo de confianza de una variable, a un nivel de confianza del 95%, es: (6,824 9,176). Hallar la media y el tamaño de la muestra para obtener dicho intervalo conociendo que la varianza de la distribución es de 9. Explique cada uno de los pasos realizados. **(2 puntos)**

Si la varianza es 9 la desviación típica es $\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{9} = 3$

Como el nivel de confianza es del 95%

$$1-\alpha=0,95 \rightarrow \alpha=0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0,025 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0,975 \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Busco en la tabla de} \\ \text{la N(0,1)}\end{array}\right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1,96$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}}=2,575$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x}-Error, \overline{x}+Error\right)=(6.824, 9.126)$$

Si sumo los extremos y divido por 2 sale la media muestral:

$$\overline{x}=\frac{6,824+9,176}{2}=8$$

El intervalo de confianza es:

$$(8-Error, 8+Error)=(6.824, 9.126)$$

Luego $8+Error=9.126 \Rightarrow Error=9.126-8=1,126$

Y utilizando la fórmula del error.

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1,96\cdot\frac{3}{\sqrt{n}}=1,126 \Rightarrow \sqrt{n}=\frac{1,96\cdot 3}{1,126}=5 \Rightarrow n=5^2=25$$

El tamaño de la muestra es 25 y la media es 8.