SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Tres automóviles A, B y C salen del mismo punto en tres momentos distintos y los tres circulan a una velocidad constante de 100 km por hora. Actualmente la suma de las distancias recorridas por los tres es de 800 km y la distancia recorrida por A es el triple de la recorrida por B. Hallar la distancia recorrida por cada uno de ellos en la actualidad, sabiendo que cuando pase media hora (es decir, cuando todos hayan recorrido 50 km más) la suma de las distancias recorridas por A y B será 50 km más que la recorrida por C. (3 puntos)

Demos nombre a las incognitas de las cuales queremos averiguar su valor.

$$\left.\begin{array}{l}\text{A recore a Km}\\ \text{B recorre b Km}\\ \text{C recorre c Km}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\textit{la suma de las distancias recorridas por los tres es de } 800 \textit{ km}\\ a+b+c=800\\ \textit{la distancia recorrida por A es el triple de la recorrida por B}\\ a=3b\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\textit{cuando todos hayan recorrido } 50 \textit{ km más } \rightarrow \text{a+50, b+50 } y \text{ c+50}\\ \textit{la suma de las distancias recorridas por A y B será } 50 \textit{ km más que la recorrida por C}\\ (a+50)+(b+50)=(c+50)+50\end{array}\right\}$$

Es sistema de ecuaciones quedaría:

$$\left.\begin{array}{r}a+b+c=800\\ a=3b\\ (a+50)+(b+50)=(c+50)+50\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}a+b+c=800\\ a=3b\\ a+b+100=c+100\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}a+b+c=800\\ a=3b\\ a+b=c\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}3b+b+c=800\\ 3b+b=c\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}4b+c=800\\ 4b=c\end{array}\right\} \Rightarrow 8b=800 \Rightarrow b=100$$

Y sustituyendo en la ecuación $a=3b \rightarrow a=300$

Y sustituyendo en la ecuación $4b=c \rightarrow c=400$

La solución del problema es A recorre 300 km, B recorre 100 km y C recorre 400 km

CUESTIÓN A2. Dada la función $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ donde a y b son números reales, hallar el valor de a y b para que se cumpla que $f(0)=1$ y $f'(0)=1$. (1,25 puntos)

Apliquemos la primera condición $f(0)=1$

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}\\ f(0)=1\end{array}\right\} \Rightarrow 1=\frac{a\cdot 0+b}{0^2+1} \Rightarrow 1=\frac{b}{1} \Rightarrow b=1$$

Calculemos la derivada de la función para poder aplicar la segunda condición $f'(0)=1$

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{a\left(x^2+1\right)-2x(ax+b)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{a\cdot\left(x^2+1\right)-2x\left(ax+b\right)}{\left(x^2+1\right)^2} \\ f'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(0)=\dfrac{a\cdot\left(0^2+1\right)-2\cdot 0\cdot\left(a\cdot 0+b\right)}{\left(0^2+1\right)^2} \\ f'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=\dfrac{a-0}{1} \Rightarrow 1=a$$

El valor de a y b buscado es a = b = 1

CUESTIÓN A3. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & si \quad x<-3 \\ x^2+2x+1 & si \ -3\le x \end{cases}$$

a) Hacer la representación gráfica de dicha función. (0'5 puntos)
b) Hallar el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y la recta $y=2x+5$. (1'75 puntos)

a) Para representar la función a trozos $f(x)=\begin{cases} -x+1 & si \quad x<-3 \\ x^2+2x+1 & si \ -3\le x \end{cases}$ realizaremos dos tablas de valores, sabiendo que son un trozo de recta y un trozo de parábola.

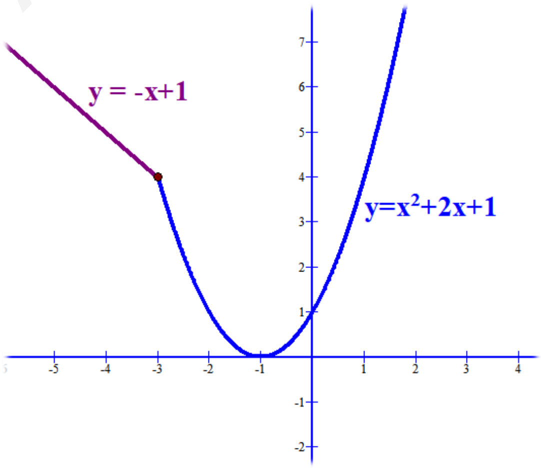
x	$f(x)=-x+1$
–3 (no vale)	3 +1= 4
–4	4 +1= 5
–5	5 +1= 6

x	$f(x)=x^2+2x+1$
–3 (si vale)	9 – 6 +1 = 4
–2	4 – 4 +1 = 1
–1	1 – 2 + 1 = 0
0	0 + 0 + 1 = 1
1	1 + 2 + 1 = 4

Para trazar mejor la parábola determinemos su vértice:

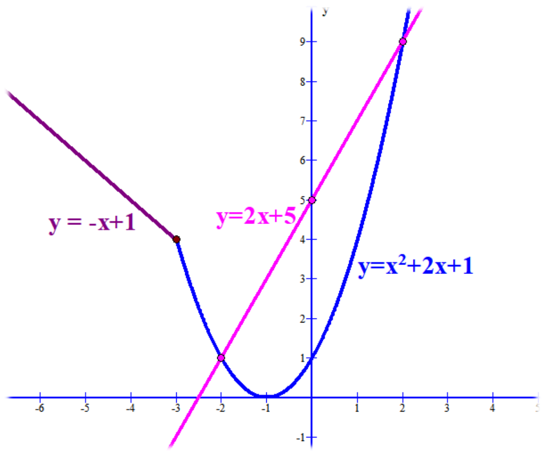
$$x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1 \Rightarrow y_v=f(-1)=1-2+1=0$$

El vértice de la parábola es $V=(-1,0)$

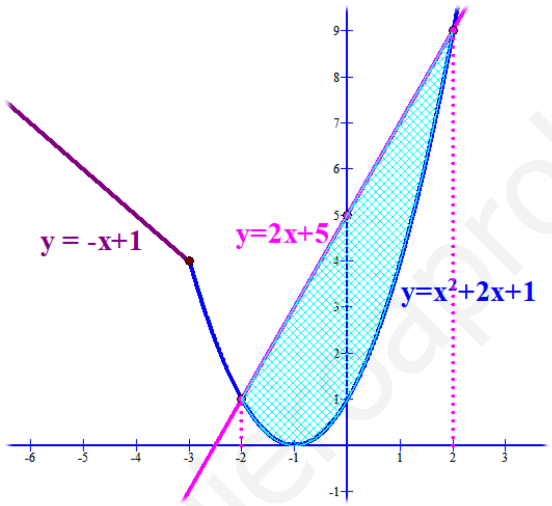


b) Añadimos a la gráfica anterior la de la recta $y=2x+5$ con tabla de valores:

x	$y=2x+5$
–2	1
0	5
2	9



El recinto pedido está delimitado por la recta $y = 2x + 5$ y la parábola $y = x^2 + 2x + 1$ entre los valores de $x = -2$ y $x = 2$



Calculamos su área con la integral definida:

$$\int_{-2}^{2} 2x+5-\left(x^2+2x+1\right)dx = \int_{-2}^{2} 2x+5-x^2-2x-1dx = \int_{-2}^{2} -x^2+4\,dx =$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{-2^3}{3}+4\cdot 2\right]-\left[\frac{-(-2)^3}{3}+4(-2)\right] = \left[\frac{-8}{3}+8\right]-\left[\frac{8}{3}-8\right] = \frac{16}{3}+\frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10'6$$

El valor del área pedida es de 10’6 unidades^2

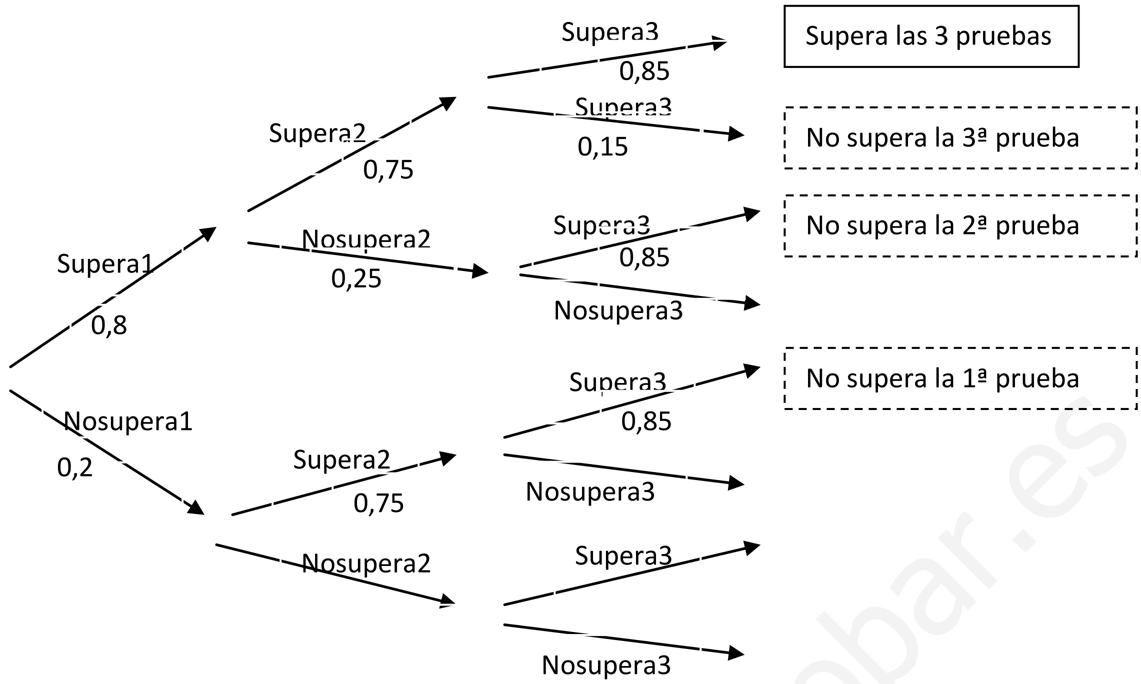
CUESTIÓN A4. Para que un producto cosmético tenga un informe favorable de una agencia de sanidad debe superar tres pruebas de evaluación de garantía sanitaria. Las pruebas son independientes y todos los productos se someten a las tres pruebas. Se sabe, por otras ocasiones, que la probabilidad de superar la primera prueba es 0,8, la de superar la segunda es 0,75 y la de superar la tercera 0,85. Hallar:

a) La probabilidad de que un producto tenga el informe favorable. (1 punto)
b) La probabilidad de que un producto no tenga el informe favorable por fallar solamente en una prueba. (1 punto)

Demos nombre a los sucesos que vamos a utilizar:
Superar la 1ª Prueba = Supera1 y No superar la 1ª Prueba= Nosupera1
Superar la 2ª Prueba = Supera2 y No superar la 2ª Prueba= Nosupera2
Superar la 3ª Prueba = Supera3 y No superar la 3ª Prueba= Nosupera3.

Sabemos que *P(Supera1) = 0,8*; *P(Supera2) = 0,75; P(Supera3) = 0,85*
P(Nosupera1) = 0,2; *P(Nosupera2) = 0,25; P(Nosupera3) = 0,15.*

Construyamos un árbol que nos permita aclarar como es este experimento aleatorio:



a) La probabilidad de informe favorable = P(Supera1) · P(Supera2) · P(Supera3) = =0,8·0,75·0,85 = 0,51

b) La probabilidad de que un producto no tenga el informe favorable por fallar solamente en una prueba = P(Supera1) · P(Supera2) · P(Nosupera3) + P(Supera1) · P(Nosupera2) · P(Supera3) + P(Nosupera1) · P(Supera2) · P(Supera3) = 0,8·0,75·0,15 + 0,8·0,25·0,85 + 0,2·0,75·0,85 = 0,3875

CUESTIÓN A5. El consumo de carne por persona en un año para una población es una variable aleatoria con distribución normal con desviación típica igual a 2 kg. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 individuos y se obtienen los siguientes consumos anuales por persona (en kg):

24; 20; 12; 10; 30; 27; 35; 30; 25; 39.

Determinar el intervalo de confianza al 90% para el consumo medio de carne por persona al año para la población. (1,5 puntos)

La media de la muestra es:

$$\bar{x} = \frac{24+20+12+10+30+27+35+30+25+39}{10} = 25,2 \text{ kg de carne por persona al año}$$

Los datos son $\bar{x} = 25,2 \quad \sigma = 2 \quad n = 10$

Para el nivel de confianza del 90% corresponde un valor crítico de $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,65$

Entonces el intervalo de confianza tiene extremos:

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 25,2 \pm 1,65 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = 25,2 \pm 1,04 = \begin{cases} 25,2-1,04 = 24,16 \\ 25,2+1,04 = 26,24 \end{cases}$$

El intervalo de confianza al 90% para el consumo medio de carne por persona al año para la población es de $(24'16\, ,\, 26,24)$

OPCIÓN B

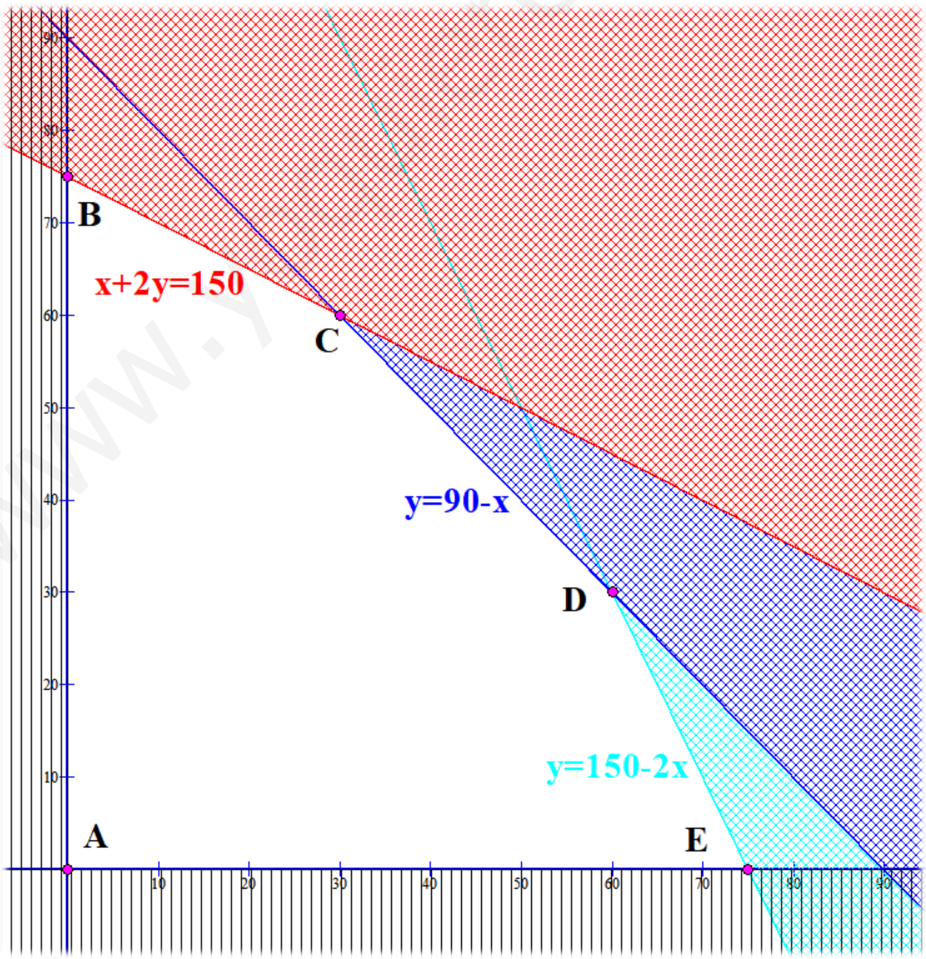
CUESTIÓN B1. Una perfumería prepara dos lotes de productos, el lote 1 contiene 2 perfumes, 2 jabones y 1 crema corporal y el lote 2 está formado por 1 perfume, 2 jabones y 2 cremas corporales. Sabiendo que dispone de 150 perfumes, 180 jabones y 150 cremas corporales y que el beneficio obtenido es de 45 euros por cada lote del tipo 1 y de 30 euros por cada lote del tipo 2, hallar el número de lotes que debe hacer de cada tipo para obtener el beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio? (3 puntos)

Número de lotes del tipo 1 = x
Número de lotes del tipo 2 = y
Beneficio = 45x +30y
Determinemos las restricciones y dibujemos la región factible.

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 2x+y\leq 150 \\ 2x+2y\leq 180 \\ x+2y\leq 150 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+y\leq 150 \rightarrow \begin{array}{c|c} x & y=150-2x \\ \hline 0 & 150 \\ 50 & 50 \end{array} \qquad 2x+2y\leq 180 \rightarrow x+y\leq 90 \rightarrow \begin{array}{c|c} x & y=90-x \\ \hline 0 & 90 \\ 50 & 40 \end{array}$$

$$x+2y\leq 150 \rightarrow y\leq \frac{150-x}{2} \rightarrow \begin{array}{c|c} x & y=\dfrac{150-x}{2} \\ \hline 0 & 75 \\ 50 & 50 \end{array}$$

Tomo la escala de 10 en 10 y represento las rectas asociadas a cada una de las restricciones:



$$\left.\begin{array}{l} x+2y=150 \\ y=90-x \end{array}\right\} \Rightarrow x+2(90-x)=150 \Rightarrow x+180-2x=150 \Rightarrow x=30 \to y=90-30=60$$

El punto C=(30, 60)

Las coordenadas del punto D son:

$$\left.\begin{array}{l} y=150-2x \\ y=90-x \end{array}\right\} \Rightarrow 150-2x=90-x \Rightarrow 60=x \to y=90-60=30$$

El punto D=(60, 30)

Determinemos el beneficio obtenido en los puntos de corte de las tres rectas (dos a dos).

A (0,0) → Beneficio = 0

B(0,75) → Beneficio = 45·0 +30·75 = 2250 euros

C(30,60) →Beneficio = 45·30 + 30·60 = 1350 + 1800 = 3150 euros

D(60, 30) → Beneficio = 45·60 + 30·30 = 2700 + 900 = 3600 euros

E(75,0) → Beneficio = 45·75 + 30·0 = 3375 euros

El beneficio máximo se obtiene para 60 lotes del tipo 1 y 30 lotes del tipo 2.

CUESTIÓN B2. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$. (0,75 puntos)

b) $g(x)=x^2e^{x^2}$. (0,75 puntos)

c) $h(x)=\dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x}$. (0,75 puntos)

a)

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{2x+1}-x\cdot\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\sqrt{2x+1}}}{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{2x+1}-\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}=$$

$$=\frac{\dfrac{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-x}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}=\frac{2x+1-x}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}=\boxed{\frac{x+1}{(2x+1)^{3/2}}}$$

b)

$$g(x)=x^2e^{x^2} \Rightarrow g'(x)=2xe^{x^2}+x^2e^{x^2}\cdot 2x=2xe^{x^2}+2x^3e^{x^2}$$

c)

$$h(x)=\frac{\ln\left(x^2\right)}{x} \Rightarrow h'(x)=\frac{\dfrac{2x}{x^2}\cdot x-1\cdot\ln\left(x^2\right)}{x^2}=\frac{2-\ln\left(x^2\right)}{x^2}$$

CUESTIÓN B3. Dada la función $f(x)=2e^{2x-2}$ hallar la función primitiva $F(x)$ que cumple que $F(1)=0$. (1,25 puntos)

$$F(x)=\int 2e^{2x-2}dx=\left\{\begin{array}{r}\text{Cambio de variable } 2x-2=t\\ 2dx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{2}\end{array}\right\}=\int 2e^t\,\frac{dt}{2}=\int e^t dt=e^t=e^{2x-2}+C$$

Como además debe cumplir $F(1)=0$:

$$\left.\begin{array}{l}F(x)=e^{2x-2}+C\\ F(1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow 0=e^{2\cdot 1-2}+C\Rightarrow 0=e^0+C\Rightarrow C=-1$$

La primitiva pedida es $F(x)=e^{2x-2}-1$

CUESTIÓN B4. En un grupo el 60% de los alumnos aprueba la asignatura A y el 30% aprueba la asignatura B. Se sabe, además, que el 10% de los alumnos que aprueba la asignatura B aprueba también la asignatura A. Hallar el porcentaje de alumnos del grupo que aprueba alguna de las dos asignaturas. (2 puntos)

Construyamos una tabla con las probabilidades de los sucesos A=aprueba la asignatura A, B=aprueba la asignatura B, $\overline{A}$ =suspende la asignatura A y $\overline{B}$ =suspende la asignatura B

	A	$\overline{A}$	
B			30%
$\overline{B}$			
	60%		100%

Como dicen que el 10% de los alumnos que aprueba la asignatura B (30% del total) aprueba también la asignatura A, esto será un 10% del 30% que son un $\frac{10\cdot 30}{100}=3$ → 3% del total. Lo ponemos en la tabla y terminamos de completarla:

	A	$\overline{A}$	
B	**3 %**	27%	**30%**
$\overline{B}$	57%	13%	70%
	60%	40%	**100%**

A partir de estos datos:

El porcentaje de alumnos del grupo que aprueba alguna de las dos asignaturas =
= 3 + 27 + 57 = 87%

CUESTIÓN B5. La estatura de los individuos de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 0,4 m. Para estimar la media se toma una muestra aleatoria de tamaño n y se encuentra un valor medio de la estatura igual a 1,6 m. Si el intervalo de confianza al 95% construido a partir de esos datos es (1,5216 , 1,6784), calcula el valor de n. (1,5 puntos)

La media muestral es el valor central del intervalo de confianza:

$$\overline{x}=\frac{1'5216+1'6784}{2}=1'6$$

Los datos son $\overline{x}=1,6 \quad \sigma=0'4 \quad n=desconocido$

Para el nivel de confianza del 95% corresponde un valor crítico de $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

Si el intervalo de confianza al 95% construido a partir de esos datos es (1'5216, 1'6784) entonces

$$\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'6784 \Rightarrow 1'6 + 1'96 \cdot \frac{0'4}{n} = 1'6784 \Rightarrow 1'96 \cdot \frac{0'4}{n} = 0'0784$$

$$1'96 \cdot 0'4 = 0'0784 \cdot n \Rightarrow n = \frac{1'96 \cdot 0'4}{0'0784} = 10$$

Tambien podriamos haberlo conseguido con $\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'5216$

El tamaño de la muestra aleatoria es de 10 elementos