Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 5

Año 2016

5.1. Septiembre 2016

- CUESTIÓN A1.

  Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} y & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & z \\ x & 2 & y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 9 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

  a) Calcular $C^t + I$, siendo I la matriz identidad.

  b) Hallar x, y, z para que se cumpla que $AB = C^t + I$.

  selcs Sep 2016 Solución:

  a) $C^t + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 10 \\ 6 & 9 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 10 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

  b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} y & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & z \\ x & 2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+x & 2 & 3\,y \\ -1 & -2 & 6-2\,z \\ 4\,x+2 & 9 & z+4\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 10 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

  Igualando términos correspondientes: $f(x) = \begin{cases} y + x = 2 \\ 3y = 3 \\ 6 - 2z = 10 \\ 4x + 2 = 6 \\ z + 4y = 2 \end{cases}$ de donde resulta $y = 1, x = 1, z = -2$

- CUESTIÓN A2.

  Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

  a) $f(x) = x^5 \ln x + 2e^x$

  b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{2x+5}}$

  c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 3}$

selcs Sep 2016 Solución:

a) $f'(x) = 5x^4 \ln x + x^5 \dfrac{1}{x} + 2e^x = 5x^4 \ln x + x^4 + 2e^x$

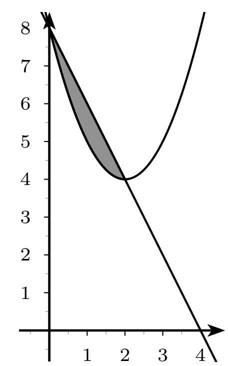
b) $g(x) = (2x+5)^{\frac{-1}{7}}$, $\quad g'(x) = \dfrac{-1}{7}(2x+5)^{\frac{-8}{7}} \cdot 2 = \dfrac{-2}{7\sqrt[7]{(2x+5)^8}}$

c) $h'(x) = \dfrac{2x(x+3) - (x^2-1)\cdot 1}{(x+3)^2} = \dfrac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}$

- CUESTIÓN A3.

Calcular el area del recinto acotado limitado por la curva $y = x^2 - 4x + 8$ y la recta $y = -2x + 8$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sep 2016 Solución:



Hallemos los puntos de corte entre las gráficas:

$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 8 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \quad x^2 - 4x + 8 = -2x + 8; \quad x^2 - 2x = 0; \quad x = 0, x = 2$

El área viene dada por: $S = \displaystyle\int_0^2 \text{recta} - \text{parábola} =$

$\displaystyle\int_0^2 (-2x+8) - (x^2 - 4x + 8)\, dx = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}\ \text{u}^2$

- CUESTIÓN A4.

Se sabe que el 28 % de una población padece algún tipo de alergia. El 45 % de los individuos de la población que sufren alergia son mujeres. Además, de la parte de la población que no padece alergia, el 35 % son mujeres.

a) Calcular la probabilidad de que al elegir al azar un individuo de la población sea mujer.

b) Se ha elegido un individuo al azar y es mujer; calcular la probabilidad de que no padezca alergia.

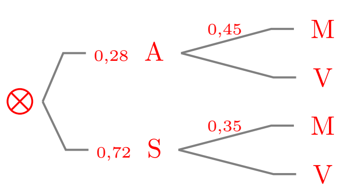
selcs Sep 2016 Solución:

Llamamos M al suceso " ser mujer".

Llamamos V al suceso " ser varón".

Llamamos A al suceso " tener alergia".

Llamamos S al suceso " no tener alergia".



$\{A, S\}$, forman un sistema completo de sucesos.

a) Teorema de la probabilidad total:

$p(M) = p(M/A) \cdot p(A) + p(M/S) \cdot p(S) + p() \cdot p() = 0,45 \cdot 0,28 + 0,35 \cdot 0,72 = 0,378$

b) Teorema de Bayes:

$$p(S/M) = \frac{p(M/S) \cdot p(S)}{p(M/S) \cdot p(S) + p(M/A) \cdot p(A)} = \frac{0,35 \cdot 0,72}{0,35 \cdot 0,72 + 0,45 \cdot 0,28} = 0,6667$$

- CUESTIÓN A5.

Para estimar la proporción de individuos de una población que utilizan el comercio electrónico se ha realizado una encuesta a una muestra aleatoria de 200 individuos, de los cuales 90 han respondido que utilizan el comercio electrónico. Con estos datos, hallar un intervalo de confianza del 95 % para la proporción de individuos de la población que utilizan el comercio electrónico.

selcs Sep 2016 Solución:

Los datos son: proporción de la muestra $\hat{p} = \dfrac{90}{200} = 0,4500, n = 200$

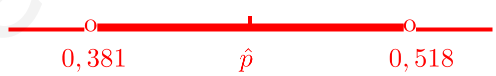
Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,4500 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,4500 \cdot 0,5500}{200}} = 0,4500 \pm 0,0689 \begin{cases} 0,3811 \\ 0,5189 \end{cases}$$

El intervalo de confianza para la proporción es $(0,3810; 0,5180)$

con probabilidad 95 % p está en:



- CUESTIÓN B1.

Una empresa necesita, como mínimo, 180 uniformes de mujer y 120 de hombre. Los encarga a dos talleres A y B. El taller A confecciona diariamente 6 uniformes de mujer y 2 de hombre con un coste de 75 euros al día. El taller B hace diariamente 4 uniformes de mujer y 3 de hombre con un coste diario de 90 euros. ¿Cuántos días debe trabajar cada taller para satisfacer las necesidades de la empresa con el mínimo coste?, ¿cuánto vale dicho coste?

selcs Sep 2016 Solución: 1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

$x = n^0$ de días de de trabajo de taller A,

$y = n^0$ de días de de trabajo de taller B. Coste: $F(x, y) = 75x + 90y$

Uniformes de mujer: $6x + 4y \geq 180$ (1)

x	0	30
y	45	0

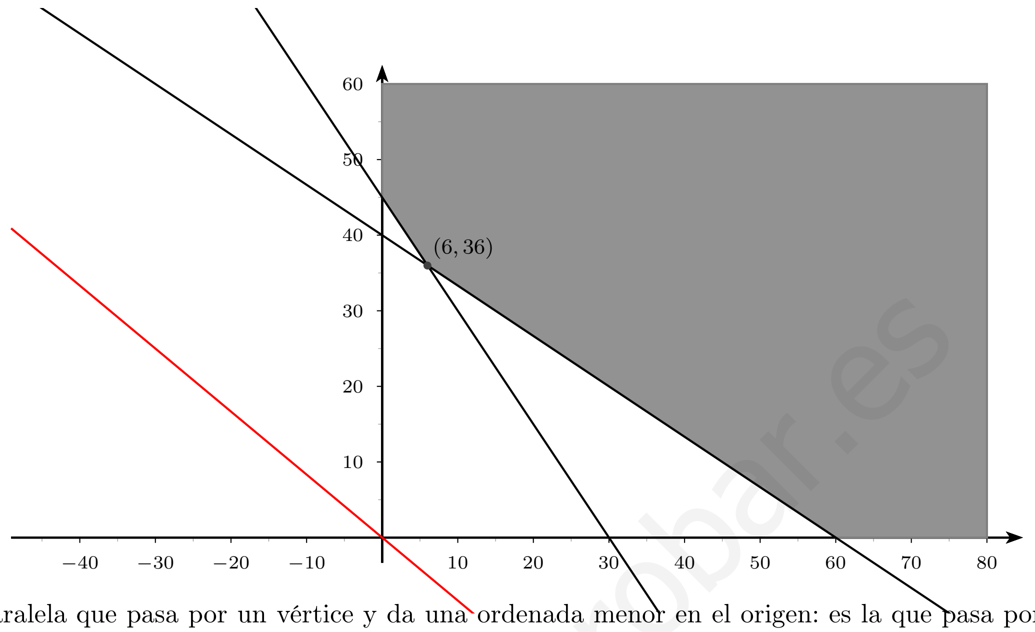
Uniformes de hombre: $2x + 3y \geq 120$ (2)

x	0	60
y	40	0

además: $0 \leq x; \quad 0 \leq y$

2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta: $F(x, y) = 0 \quad 75x + 90y = 0$

x	0	-90
y	0	75



Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada menor en el origen: es la que pasa por el vértice intersección de

$$\begin{cases} 6x + 4y = 180 \\ 2x + 3y = 120 \end{cases} \quad \text{es } (6, 36)$$

Luego para obtener el menor coste habrá que trabajar 6 días en A y 36 días en B.

El coste mínimo será entonces: $F(6, 36) = 75 \cdot 6 + 90 \cdot 36 = 3690$ euros será el mínimo coste.

- CUESTIÓN B2.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & si \quad x \leq -2 \\ 2x + 7 & si \quad -2 < x < 1 \\ ax^2 - 5x + 6 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ donde $a \in R$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = -2$

b) Hallar a para que la función sea continua en $x = 1$

c) Para $a = 1$ hacer la representación gráfica de la función.

selcs Sep 2016 Solución:

a) Para que sea continua en $x = -2$ han de ser iguales los límites $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ y coincidir con $f(-2)$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} (-x + 1) = 3$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} (2x + 7) = 3$

Como $f(-2) = -(-2) + 1 = 3$, por tanto es continua en $x = -2$

b) De modo parecido:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 7) = 9$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (ax^2 - 5x + 6) = a - 5 + 6$

Igualando $a - 5 + 6 = 9, \quad a = 8$ para que sea continua.

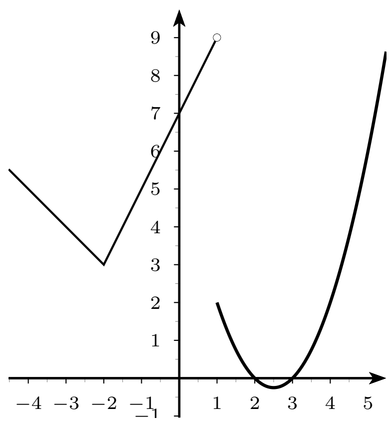
c) Representamos: $f(x) = \begin{cases} -x+1 & si \quad x \le -2 \\ 2x+7 & si \quad -2 < x < 1 \\ x^2-5x+6 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$ donde $a \in R$

Tramo recto $y = -x+1$ $\begin{array}{c|cc} x & -4 & -2 \\ \hline y & 5 & 3 \end{array}$

Tramo recto $y = 2x+7$ $\begin{array}{c|cc} x & -2 & 1 \\ \hline y & 3 & 9 \end{array}$

Trozo de parábola $y = x^2 - 5x + 6$.

Corte con OX : $\quad x^2 - 5x + 6 = 0, \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$ Punto de comienzo $\begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline y & 2 \end{array}$



- CUESTIÓN B3.

Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int (-x + 2e^x) dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 (x^2 - \frac{x^3}{2} - 1) dx$

selcs Sep 2016 Solución:

a) $\displaystyle\int (-x + 2e^x)\, dx = -\frac{x^2}{2} + 2e^x + C$

b) $\displaystyle\int_1^2 (x^2 - \frac{x^3}{2} - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} - x\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{8} - 2 - (\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{8} - 1) = -\frac{13}{24}$

- CUESTIÓN B4.

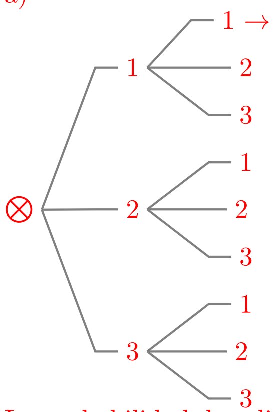
En una urna hay bolas numeradas del 1 al 3, hay 30 bolas con el número 1, 60 con el número 2 y 90 con el número 3. Se realiza el experimento de sacar dos bolas consecutivamente sin reemplazamiento.

a) Hallar la probabilidad de que en las dos salga 1.

b) Hallar la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea par.

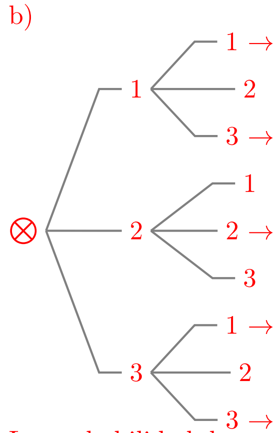
selcs Sep 2016 Solución:

a)



La probabilidad de salir uno las dos veces es:
$\dfrac{30}{180} \cdot \dfrac{29}{179} = \dfrac{29}{1074} = 0'027$

b)



La probabilidad de sumar par es:
$\dfrac{30}{180} \cdot \dfrac{29}{179} + \dfrac{30}{180} \cdot \dfrac{90}{179} + \dfrac{60}{180} \cdot \dfrac{59}{179} + \dfrac{90}{180} \cdot \dfrac{30}{179} + \dfrac{90}{180} \cdot \dfrac{89}{179} = \dfrac{99}{179} = 0'553$

- CUESTIÓN B5.

Según un informe sobre calidad de infraestructuras turísticas, la puntuación media de los alojamientos turísticos de un país es, como mínimo, de 7,8, con una desviación típica de 0,7. Para comprobar esta información, se toma una muestra aleatoria de 150 alojamientos, para los que se obtiene una puntuación media de 7,5. Si la puntuación es una variable normal:

a) Plantear un contraste para determinar si se puede aceptar la afirmación del informe. Dar la expresión de la región de aceptación.

b) Con un nivel de significación del 4 %, ¿se puede aceptar lo que dice el informe?

selcs Sep 2016 Solución:

a) Al hablar de cumplir un mínimo de calidad nos están indicando un contraste unilateral con región de aceptación ilimitada por la derecha

El contrate es pues $H_0 : \mu \geq 7,8$ frente a $H_1 : \mu < 7,8$.

Entonces el intervalo de aceptación tiene de extremo:

$\bar{x} - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7,8 - z_\alpha \cdot \dfrac{0,7}{\sqrt{150}} = 7,8 - 0'0571 z_\alpha$, siendo z_α el valor crítico correspondiente al nivel de significación que se indique.

Si el valor de la muestra es mayor entonces se acepta que la puntuación media de los alojamientos turísticos de un país es, como mínimo, de 7,8 con ese nivel de significación.

b)
Contrastamos $H_0 : \mu = 7,8$ frente a $H_1 : \mu < 7,8$.
La desviación típica es $\sigma = 0,7$. El tamaño muestral es $n = 150$.
El nivel de significación $\alpha = 0,04$, corresponde con $z_\alpha = 1,750686071$.

Entonces el intervalo de aceptación tiene de extremo:
$\bar{x} - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7,8 - 1,750686071 \cdot \dfrac{0,7}{\sqrt{150}} = 7,8 - 0,10 = 7,70$
El intervalo de aceptación es $(7,70; \infty)$

Como $\bar{x} = 7,5$ queda fuera del intervalo, se rechaza H_0