Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 7

Año 2014

7.1. Septiembre 2014

- CUESTIÓN A1.

  Dadas las matrices

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

  Hallar a y b para que se cumpla que $A \cdot B = B + C^t$.

  selcs Sep 2014 Solución:

  $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \\ a & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3a+1 & b+1 \\ 1-2a & b-2 \end{pmatrix}$$

  $$B + C^t = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \\ a & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ 4 & b+1 \\ a-2 & 1 \end{pmatrix}$$

  Para que sean iguales ha de ser $a = 1, \quad b = 3$

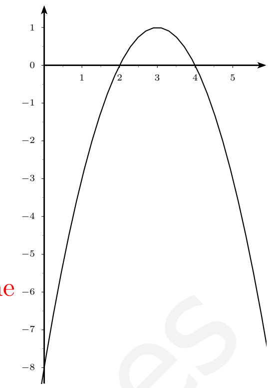
- CUESTIÓN A2.

  El beneficio semanal (en miles de euros) que obtiene una fábrica por la producción de aceite viene dado por la función $B(x) = -x^2 + 6x - 8$ donde x representa los hectolitros de aceite producidos en una semana.

  a) Representar la función $B(x)$ con $x \geq 0$.

  b) Calcular los hectolitros de aceite que se debe producir cada semana para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

  selcs Sep 2014 Solución:



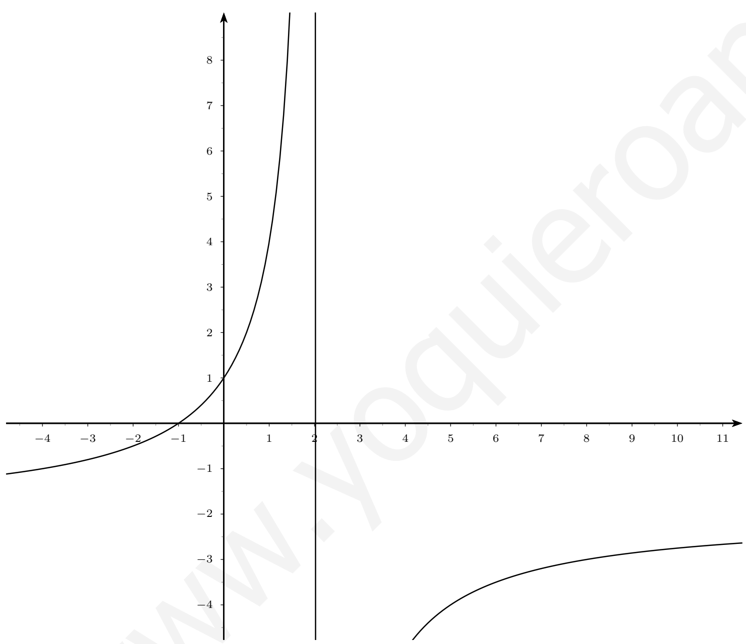
a) Es un trozo de parábola abierta hacia abajo:
Puntos de corte:
Con OY : $x = 0; y = -8$
Con OX : $y = 0; -x^2 + 6x - 8 = 0; \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$
Máximo: $B'(x) = -2x + 6 = 0$, para $x = 3$

b) $B'(x) = -2x+6 = 0$, para $x = 3$; $B(3) = 1$; el beneficio máximo se obtiene produciendo 3 hectolitros y es de 1000 € .

- CUESTIÓN A3.

Dada la función $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 6x - 4}{x^2 - 4}$ hallar su dominio, los puntos de corte con los ejes y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 1$.

selcs Sep 2014 Solución:



Dominio:

$x^2 - 4 = 0; \quad x = \pm 2; \qquad dom(F) = R - \{-2, 2\}$

Cortes con los Ejes:

Con OY se hace $x = 0; y = f(0) = \dfrac{-4}{-4} = 1$

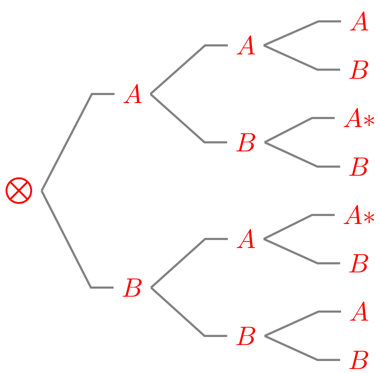
Con OX se hace $y = 0; \dfrac{-2x^2 - 6x - 4}{x^2 - 4} = 0; \quad -2x^2 - 6x - 4 = 0; \quad x = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$. Como -2 no pertenece al dominio, corte con $0X$ es $x = -1$.

$f'(x) = \dfrac{6}{x^2 - 4\,x + 4}; \quad m = f'(1) = 6$ es la pendiente de la recta tangente en $x = 1$

- CUESTIÓN A4.

Un archivador contiene 15 exámenes desordenados, entre los cuales se encuentran dos que tienen la puntuación máxima. Con el fin de encontrarlos, vamos sacando uno tras otro, ¿cuál es la probabilidad de que la tarea finalice exactamente en el tercer intento?

selcs Sep 2014 Solución:



El problema se puede resolver considerando hacer tres extracciones sin devolución, sea A examen de puntuación máxima. Interesan las ramas con dos A y que terminan en A

$$p(ABA) + p(BAA) = \frac{2}{15} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{1}{13} + \frac{13}{15} \cdot \frac{2}{14} \cdot \frac{1}{13} = \frac{2}{105}$$

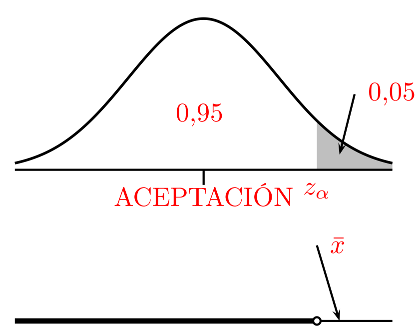
- CUESTIÓN A5.

Según un informe de una universidad, la edad media de finalización de un determinado grado no supera los 23 años. Sabiendo que la edad de finalización sigue una normal con desviación típica de 2 años y que una muestra aleatoria de 100 graduados dio una media de finalización del grado a los 24 años, ¿se puede aceptar, con un nivel de significación del 0'05, la afirmación de la universidad?

selcs Sep 2014 Solución:

Contrastamos $H_0 : \mu = 23$ frente a $H_1 : \mu > 23$.
La desviación típica es $\sigma = 2$. El tamaño muestral es $n = 100$.
El nivel de significación $\alpha = 0,05$, corresponde con $z_\alpha = 1,65$.

Entonces el intervalo de aceptación tiene de extremo:
$\bar{x} + z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 23 + 1,65 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{100}} = 23 + 0,33 = 23,33$
El intervalo de aceptación es $(-\infty; 23,33)$
Como $\bar{x} = 24$ queda fuera del intervalo, se rechaza H_0



- CUESTIÓN B1.

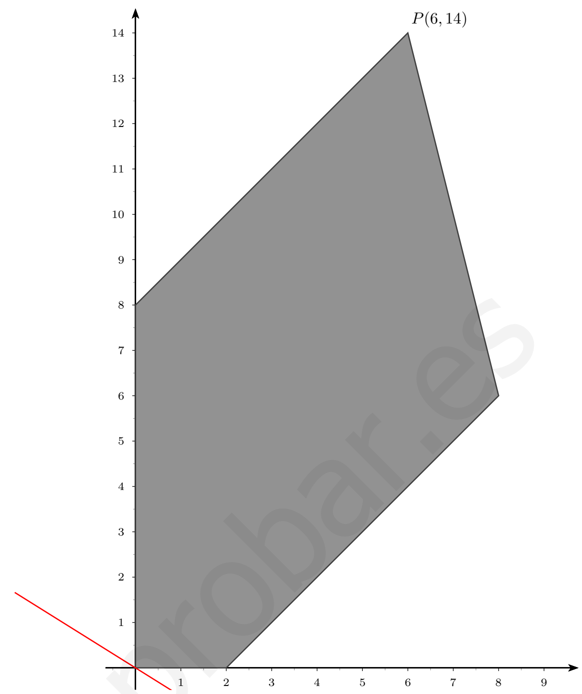
Un profesor proporciona a sus alumnos un listado con 20 problemas del tema 1 y 20 del tema 2. Cada problema del tema 1 vale 5 puntos y cada problema del tema 2 vale 8 puntos. Los alumnos pueden hacer problemas de los dos temas, pero con las siguientes condiciones:

1) El número de problemas realizados del tema 1 no puede ser mayor que el número de problemas del tema 2 más 2, ni ser menor que el número de problemas del tema 2 menos 8.

2) La suma de 4 veces el número de problemas realizados del tema 1 con el número de problemas realizados del tema 2 no puede ser mayor que 38.

Hallar cuántos problemas del tema 1 y del tema 2 hay que hacer para obtener la máxima puntuación.

selcs Sep 2014 Solución:



Sean:
$x =$ número de problemas del tema 1
$y =$ número de problemas del tema 2
Puntuación: $f(x,y) = 5x + 8y$ puntos

$$\left.\begin{array}{l} x \leq y+2 \\ x \geq y-8 \\ 4x+y \leq 38 \end{array}\right\}$$

Representamos: $x \leq y+2$

x	2	5
y	0	3

$x \geq y-8$

x	0	3
y	8	11

$4x+y \leq 38$

x	$9'5$	9
y	0	2

Ahora la función igualada a 0:
$f(xy) = 5x + 8y = 0$

x	0	-8
y	0	5

Para maximizar la puntuación tomaríamos la paralela a $f(x,y) = 0$ más alejada, la que pasa por el punto P, hallamos sus coordenadas: $\left\{\begin{array}{l} x = y-8 \\ 4x+y = 38 \end{array}\right.$ $\quad x = 6, y = 14$.

$P(6,14)$; $\quad f(6,14) = 5\cdot 6 + 8 \cdot 14 = 142$

Por tanto la puntuaciónl máxima resulta de hacer 6 problemas del tema 1 y 14 problemas del tema 2, obteniendo así 142 puntos.

- CUESTIÓN B2.

Dada la función $f(x) = \dfrac{ax^2+x-a}{x^2-b}$

a) Hallar a y b sabiendo que $x = 1$ y $x = -1$ son sus asíntotas verticales y que $f(0) = -1$.

b) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, hallar el resto de las asíntotas y hallar su función derivada $f'(x)$.

selcs Sep 2014 Solución: a) Las asíntotas verticales resultan de anularse el denominador, pues en su proximidad la función se aleja a infinito.

El denominador de segundo grado es $(x-1)(x+1) = x^2-1$, luego $b = 1$

Como el punto de corte con OY es $f(0) = -1$: $\quad \dfrac{-a}{-b} = -1; \quad a = -1$

b) $f(x) = \dfrac{-x^2+x+1}{x^2-1}$

Asíntota horizontal: $y = n$; $\quad n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2+x+1}{x^2-1} = -1 \quad$ Asíntota horizontal: $y = -1$

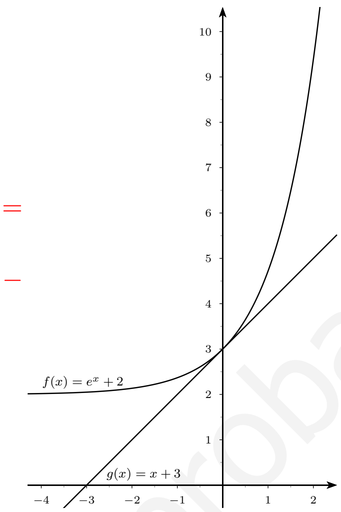
La derivada es $f'(x) = \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

- CUESTIÓN B3.

Dadas las funciones $f(x) = e^x + 2$ y $g(x) = x + 3$, cuyas gráficas están representadas en la siguiente figura, hallar el área comprendida entre las dos curvas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

selcs Sep 2014 Solución:

$$S = \int_0^2 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^2 [e^x + 2 - (x + 3))]dx =$$
$$\int_0^2 [e^x - x - 1))]dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^2 = e^2 - \frac{4}{2} - 2 -$$
$$e^0 = e^2 - 5 \text{ u}^2$$



- CUESTIÓN B4.

Según un estudio, el 35 % de una población utiliza el autobús, mientras que el 65 % restante no lo hace. En cuanto al tranvía, es utilizado por la mitad y no por la otra mitad. Un 30 % no utiliza ninguno de los dos transportes. Si se elige un individuo de la población al azar:

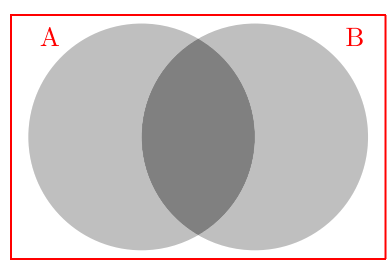
a) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice alguno de los dos transportes?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice los dos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice el tranvía, sabiendo que utiliza el autobús?

selcs Sep 2014 Solución:

Llamamos A al suceso ”utilizar autobús”; $p(A) = 0'35$
Llamamos B al suceso ”utilizar tranvía”; $p(B) = 0'50$
No utilizar ninguno: $p(A^c \cap B^c) = 0'30$



a) Utilizar alguno $A \cup B$ es lo contrario de no utilizar ninguno luego $p(A \cup B) = 1 - p(A^c \cap B^c) = 1 - 0'30 = 0'70$

b) Utilizar ambos $A \cap B$, lo obtenemos a partir de la unión:
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
$0'70 = 0'35 + 0'50 - p(A \cap B)$; $\quad p(A \cap B) = 0'15$

c) $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0'15}{0'35} = 0'43$

- CUESTIÓN B5.

Tomando al azar una muestra de 90 alumnos de una facultad, se encontró que 50 de ellos eran mujeres. Hallar, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo de confianza para estimar la proporción de alumnos de la facultad que son mujeres.

selcs Sep 2014 Solución:

Los datos son: proporción de la muestra $\hat{p} = \dfrac{50}{90} = 0,5556, n = 90$

Para el nivel de confianza del 90 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,65$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,5556 \pm 1,65 \cdot \sqrt{\frac{0,5556 \cdot 0,4444}{90}} = 0,5556 \pm 0,0524 \begin{cases} 0,5032 \\ 0,6079 \end{cases}$$

El intervalo de confianza para la proporción es $(0,5032; 0,6079)$

con probabilidad 90 % μ está en: