Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 8

Año 2013

8.1. Septiembre 2013

- CUESTIÓN A1.

  En un avión viajan un total de 360 pasajeros, el número de hombres duplica al de la suma de las mujeres y los niños. El número de adultos menos el de niños duplica al número de hombres menos el de mujeres. Determinar el número de hombres, mujeres y niños que viajan en el avión.

  selcs Sep 2013 Solución:

  x: número de hombres

  y: número de mujeres

  z: número de niños

  $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=360 \\ x=2(y+z) \\ x+y-z=2(x-y) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y+z=360 \\ x-2y-2z=0 \\ -x+3y-z=0 \end{array}\right.$$

  $$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & +3 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2^a \cdot -1^a \\ 3^a \cdot +1^a \end{array} \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & -3 & -3 & -360 \\ 0 & 4 & 0 & 360 \end{array}\right)$$

  queda $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=360 \\ -3y-3z=-360 \\ 4y=360 \end{array}\right.$ resulta: $x=240, y=90, z=30$

- CUESTIÓN A2.

  Se sabe que la expresión que representa el número de personas $N(t)$ que acude un día a un centro médico, en función del número de horas t que lleva abierto, es $N(t)=a\,t^2+bt, \quad 0 \leq t \leq 8, \quad a,b \in R$. Sabiendo que el número máximo de personas que ha habido ese día ha sido de 128, y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcule a y b .

  selcs Sep 2013 Solución:

  $N'(t)=2at+b; \quad N'(4)=8a+b=0; \quad b=-8a$

$N(4) = 16a + 4b = 128; \quad 16a - 32a = 128; \quad a = -8; \quad b = 64$

$N(t) = -8t^2 + 64$

- CUESTIÓN A3.

a) Calcule la derivada de las funciones $f(x) = e^{x^2-2x}$ y $g(x) = \ln(x^7 + 1)$

b) Calcule $\displaystyle\int_1^3 (x^2 - 3x - 1)dx$

selcs Sep 2013 Solución:

a) $f'(x) = (2x - 2)\, e^{x^2-2x}, \qquad g'(x) = \dfrac{7x^6}{x^7 + 1}$

b) $\displaystyle\int_1^3 (x^2 - 3x - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - x\right]_1^3 = -\frac{16}{3}$

- CUESTIÓN A4.

Un archivador contiene 70 exámenes del grupo 1, 50 del grupo 2, 100 del grupo 3 y 25 del grupo 4. El 5 % de los exámenes del grupo 1, el 3 % de los del grupo 2 y el 8 % del grupo 3 está suspenso. En el grupo 4 no hay ningún suspenso.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir un examen al azar, esté suspenso?

b) Se ha elegido un examen y está suspenso, ¿cuál es la probabilidad de que sea del grupo 2?

selcs Sep 2013 Solución:

S = suspenso, G_1, G_2, G_3, G_4 los grupos, forman un sistema completo de sucesos.

a) Teorema de la probabilidad total:

$p(S) = p(S/G_1) \cdot p(G_1) + p(S/G_2) \cdot p(G_2) + p(S/G_3) \cdot p(G_3) + p(S/G_4) \cdot p(G_4) = 0'05 \cdot \dfrac{70}{245} + 0'03 \cdot \dfrac{50}{245} + 0'08 \cdot \dfrac{100}{245} + 0 \cdot \dfrac{25}{245} = 0'053061$

b) Teorema de Bayes:

$$p(G_2/S) = \frac{p(S/G_2) \cdot p(G_2)}{p(S/G_1) \cdot p(G_1) + p(S/G_2) \cdot p(G_2) + p(S/G_3) \cdot p(G_3) + p(S/G_4) \cdot p(G_4)} = \frac{0'006122}{0'053061} = 0'1153$$

- CUESTIÓN A5.

De una muestra aleatoria de 700 individuos de una población, 100 son mujeres. Hallar un intervalo de confianza al 98 % para la proporción de mujeres de esa población.

selcs Sep 2013 Solución:

Los datos son: $\hat{p} = \dfrac{100}{700} = \dfrac{1}{7}, n = 700$. Para el 98 % corresponde un valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'33$

Los extremos del intervalo de confianza al(98 %)para la proporción p son:

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \frac{1}{7} \pm 2'33 \sqrt{\frac{1/7 \cdot 6/7}{700}} = \begin{cases} = 0'1120 \\ = 0'1736 \end{cases}$$

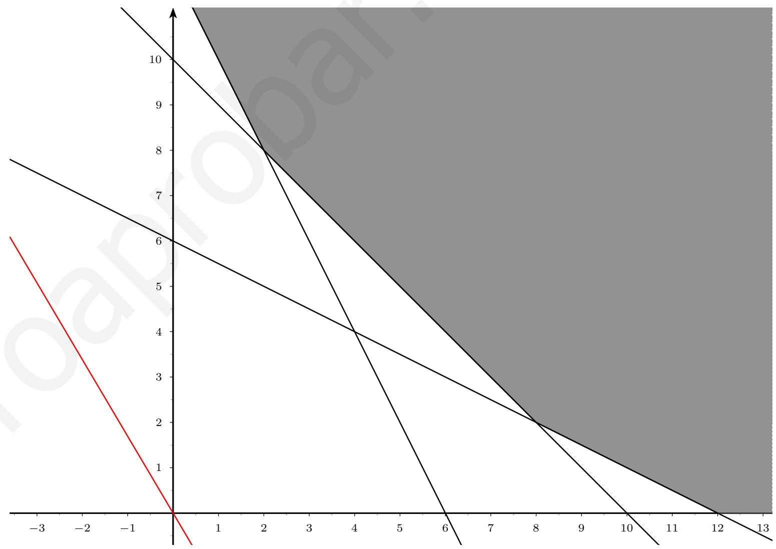
- CUESTIÓN B1.

Para elaborar un menú se dispone de un primer plato y un segundo plato. Una porción del primer plato contiene 6 mg de vitamina C, 2 mg de hierro y 20 mg de calcio, y aporta 110 calorías. Una porción del segundo contiene 3 mg de vitamina C, 2 mg de hierro y 40 mg de calcio, y aporta 65 calorías. ¿Cuántas porciones de cada plato deben utilizarse para que el menú aporte el menor número de calorías, sabiendo que debe contener al menos 36 mg de vitamina C, 20 mg de hierro y 240 mg de calcio?

selcs Sep 2013 Solución:

Sean x = número de porciones del primer plato P_1; y = número de porciones del segundo plato P_2

	C	Fe	Ca	Calorías
P_1	6	2	20	110
P_2	3	2	40	65



Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

Función objetivo a minimizar calorías: $F = 110x + 65y$

Vitamina C: $6x + 3y \geq 36$

x	0	6
y	12	0

Hierro: $2x + 2y \geq 20$

x	0	10
y	10	0

Calcio: $20x + 40y \geq 240$ (3)

x	0	12
y	6	0

además: $x \geq 0 \quad y \geq 0$

El mínimo sería en $F(2, 8) = 110 \cdot 2 + 65 \cdot 8 = 740$, por tanto

El menú que aporta el menor número de calorías se hace con 2 porciones del plato P_1 y 8 del plato P_2 y contiene 740 calorías.

- CUESTIÓN B2.

Los ingresos obtenidos por la fabricación de x unidades diarias de cierto producto vienen dados por $I(x) = -28x^2 + 5256x$, y los costes vienen dados por la función $C(x) = 22x^2 + 4456x + 814$.

a) Determinar la función que expresa los beneficios obtenidos por la fabricación de x unidades diarias del producto (sabiendo que los beneficios se definen como los ingresos menos los costes) y calcular el número de unidades diarias que hay que fabricar para obtener un beneficio máximo.

b) ¿Cuánto vale dicho beneficio máximo?

selcs Sep 2013 Solución:

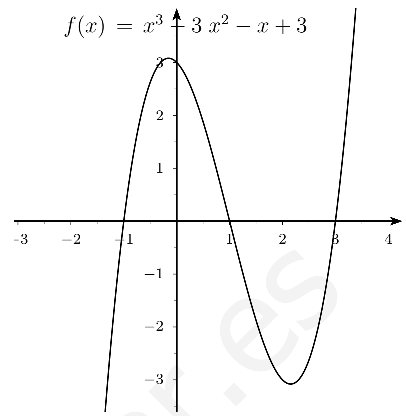
$B(x) = I(x) - C(x) = -50x^2 + 800x - 814$

a) La gráfica es una parábola abierta hacia abajo, basta hallar el máximo,$B'(x) = -100x + 800$; que se anula para $x = 8$, luego el máximo se consigue fabricando 8 unidades diarias.

b) Beneficio máximo es $B(8) = 2386$

- CUESTIÓN B3.

Se da la siguiente gráfica, que corresponde a la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, y se pide calcular el área que encierra la gráfica de la función con el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.



selcs Sep 2013 Solución:

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1} f + \left| \int_{1}^{2} f \right|$$

$$\int (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$$

$$\int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^{1} = 4$$

$$\int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{1}^{2} = -\frac{7}{4}$$

$$\text{Área} = 4 + \frac{7}{4} = \frac{23}{4}$$

- CUESTIÓN B4.

Sean A y B dos sucesos independientes de un mismo experimento aleatorio, tales que $p(A) = 0'2$ y $P(B) = 0'8$.

a) Calcular $p(A \cap B)$ y $p(A \cup B)$

b) Calcular $p(A/B)$

selcs Sep 2013 Solución:

a) Por ser independientes $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0'2 \cdot 0'8 = 0'16$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'2 + 0'8 - 0'16 = 0'84$

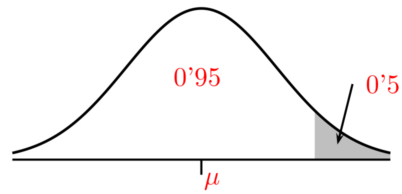
b) $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0'16}{0'8} = 0'2$

- CUESTIÓN B5.

Hace veinte años la edad en que la mujer tenía su primer hijo seguía una distribución normal con media 29 años y desviación típica de 2 años. Recientemente en una muestra aleatoria de 144 mujeres se ha obtenido, para dicha edad, una media de 31 años. Con un nivel de significación de 0,05 ¿se puede afirmar que la edad media en la que la mujer tiene su primer hijo es mayor actualmente que hace veinte años?

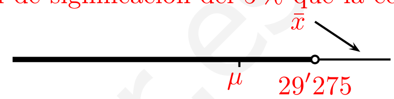
selcs Sep 2013 Solución:

Contrastamos $H_0 : \mu = 29$ frente a $H_1 : \mu > 29$,
es test unilateral.
Desv. tip. $\sigma = 2$ años
$n = 144$
nivel significación $\alpha = 0'05$ corresponde con $z_\alpha = 1'65$.



El extremo de la región de aceptación es $\mu + z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu + 1'65\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 29 + 1'65\dfrac{2}{\sqrt{144}} = 29'275$.

Como la media de la muestra 31 mayor que 29'275, se rechaza al nivel de significación del 5 % que la edad media en la que la mujer tiene su primer hijo sigue siendo 29 años.



8.2. Junio 2013

- CUESTION A1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 3 & c & 1 \end{pmatrix},$$

a) Hallar a, b y c para que se cumpla que $A \cdot B = C^t \cdot$. (C^t denota la traspuesta de C)

b) Para $a = 0$ calcular la inversa de A .

selcs Jun 2013 Solución:

a) $A.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & b+2 \\ -5 & 2 \\ 2a-1 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Resulta igualando elementos $b + 2 = 3; \quad 2 = c; \quad 2a - 1 = 1;; \quad a.b = 1$, en definitiva $a = 1, b = 1, c = 2$

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1^a + 3^a \cdot (-5) \\ 2^a + 3^a \cdot (-6) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 1^a - 2^a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

no hace falta dividir cada fila por su elemento de la diagonal principal por ser 1:

las últimas tres columnas es la matriz inversa.

- CUESTION A2. Las funciones $I(t) = -0'5t^2 + 17t$ y $C(t) = 0'5t^2 - t + 32$ con $0 \leq t \leq 18$ representan, respectivamente, los ingresos y los costes de una empresa en miles de euros en función de los años trascurridos desde su comienzo y en los últimos 18 años.

a) ¿Para que valores de t , desde su inicio, los ingresos coincidieron con los costes?

b) Hallar la función que expresa los beneficios (ingresos menos costes) en función de t y representarla gráficamente.

c) ¿Cuantos años después del comienzo de su actividad la empresa alcanzo el beneficio máximo? Calcular el valor de dicho beneficio.