Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 10

Año 2011

10.1. Septiembre 2011

- CUESTIÓN A1. Tres familias han comprado naranjas, manzanas y melocotones. La familia A ha comprado 1 kg de cada fruta y ha pagado 10 euros, la familia B ha pagado 24 euros por 2kg de naranjas y 4 kg de melocotones, y la familia C se ha llevado 3 kg de manzanas y 3 kg de melocotones y ha pagado 24 euros. Calcular el precio de 1 kg de cada una de las frutas.

  selcs Sep 2011 Solución:

  Llamemos:

  x: precio del kg de naranjas

  y: precio del kg de manzanas

  z: precio del kg de melocotones

  $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ 2x+4z=24 \\ 3y+3z=24 \end{array}\right.$$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 0 & 4 & 24 \\ 0 & 3 & 3 & 24 \end{pmatrix} \; 2^a + 1^a.(-2) \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 24 \end{pmatrix} 3^a,2 + 2^a,3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 60 \end{pmatrix}$$

  queda $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ -2y+2z=4 \\ 12z=60 \end{array}\right.$ sustituyendo hacia arriba resulta: $z=5, y=3, x=2$

- CUESTIÓN A2. Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 2$ calcular:

  a) El dominio de definición.

  b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Los máximos y los mínimos.

selcs Sep 2011 Solución:

a) El dominio por ser un polinomio es todo R.

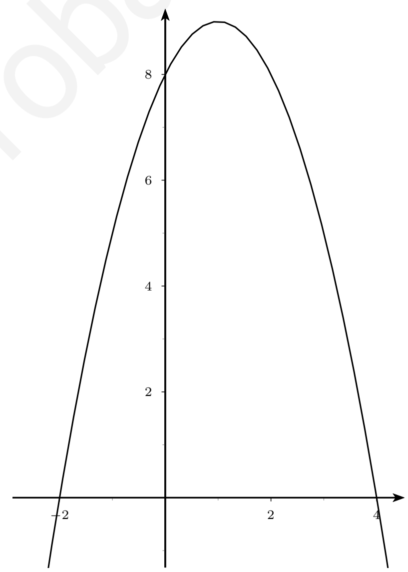
b) Derivando $f'(x) = x^2 - 4x - 5$ que se anula para $x = 5, x = -1$

x		-1		5	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

c) Observamos que hay un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 5$

- CUESTIÓN A3. Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = -x^2 + 2x + 8$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sep 2011 Solución:



Hallamos los puntos de corte con el eje de abcisas $-x^2+2x+8 = 0$, resulta: $x = -2, x = 4$

El área que encierra la parábola con el eje OX viene dada por:

$S = \displaystyle\int_{-2}^{4} (-x^2 + 2x + 8)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8\,x\right]_{-2}^{4} = -\frac{4^3}{3} + 4^2 + 8 \cdot 4 - (\frac{-2^3}{3} + (-2)^2 + 8 \cdot (-2)) = 36 \text{ u}^2$

- CUESTIÓN A4. En un supermercado se juntan tres partidas con el mismo número de latas de conserva procedentes de tres almacenes A, B y C. Se sabe que caducan en 2012 el 10 % de las latas del almacén A, el 8 % del B y el 12 % del C.

a) Calcular la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2012.

b) Se ha elegido una lata aleatoriamente y caduca en 2012, ¿cuál es la probabilidad de que proceda del almacén C?

selcs Sep 2011 Solución:

a) Sea D el suceso caducar en 2012

La tercera parte de los botes proviene de A, caducan el 10 %
La tercera parte de los botes proviene de B, caducan el 8 %$\{A, B, C\}$ forman sistema completo de sucesos.
La tercera parte de los botes proviene de C, caducan el 12 %
Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$p(D) = p(A) \cdot p(D/A) + p(B) \cdot p(D/B) + p(C) \cdot p(D/C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{100} = \frac{1}{3} \cdot \frac{30}{100} = \frac{1}{10}$

b) Por el teorema de Bayes:

$$p(C/D) = \frac{p(D/C)\cdot p(C)}{p(A)\cdot p(D/A)+p(B)\cdot p(D/B)+p(C)\cdot p(D/C)} = \frac{\frac{12}{100}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{10}} = \frac{4}{10}$$

- CUESTIÓN A5. Se sabe que el ingreso anual por hogar en España es una variable normal de media 29400 euros y desviación típica de 17400 euros. Se extrae una muestra aleatoria simple de 400 hogares de la Comunidad de Murcia obteniéndose un ingreso anual medio por hogar de 26600 euros. Suponiendo que el ingreso anual por hogar en la Comunidad de Murcia es una variable normal con la misma desviación típica, decidir con un nivel de significación del 5 % si existe una diferencia significativa entre el ingreso anual medio por hogar en España y el ingreso anual medio por hogar en la Comunidad de Murcia.

  selcs Sep 2011 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 29400$ frente a $H_1 : \mu \neq 29400$,

  La desviación típica es $\sigma = 17400$

  El nivel de significación del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 29400 \pm 1'96\frac{17400}{\sqrt{400}} = 29400 \pm 1705{,}2 = \begin{cases} 27694'8 \\ 31105'2 \end{cases}$

  que da el intervalo $(27694'8, 31105'2)$.

  Como $\bar{x} = 26600$ € queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 29400$ años., cabe pensar que hay una diferencia significativa entre el ingreso anual medio por hogar en España y el ingreso anual medio por hogar en la Comunidad de Murcia.

- CUESTIÓN B1. Un veterinario desea dar a uno de sus animales una dieta que contenga por lo menos 40g de un nutriente A, 60g de un nutriente B y 230g del nutriente C cada día. Existen en el mercado dos productos, P 1 y P 2 que en cada bote contienen los siguientes gramos de esos elementos nutritivos:

	Nutriente A	Nutriente B	Nutriente C
P_1	40	10	60
P_2	10	60	100

  Si el precio de un bote del producto P 1 es de 10 euros y el de un bote del producto P 2 es de 16 euros, determinar:

  a) ¿Qué cantidad de botes de P 1 y de P 2 debe utilizar para obtener la dieta deseada con el mínimo precio?

  b) ¿Qué cantidad de cada elemento nutritivo le dará si decide gastar lo menos posible?

  selcs Sep 2011 Solución:

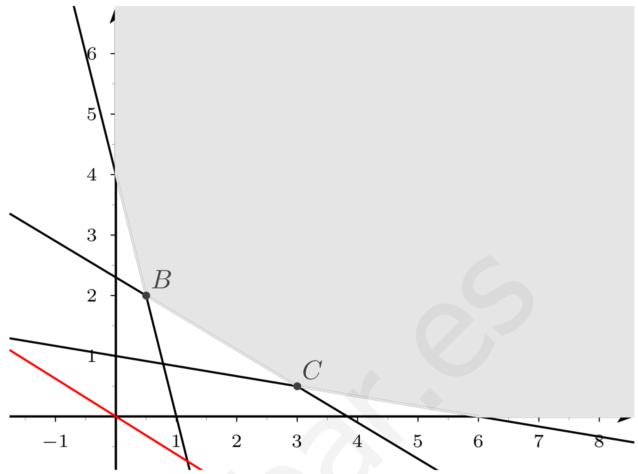
$x =$ número de botes del producto P_1
$y =$ número de botes del producto P_2

$$\begin{cases} 40x + 10y \geq 40 \\ 10x + 60y \geq 60 \\ 60x + 100y \geq 230 \end{cases}$$

Coste: $f(x, y) = 10x + 16y$

Representamos:

$$\begin{cases} 40x + 10y \geq 40 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array} \\ 10x + 60y \geq 60 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 6 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array} \\ 60x + 100y \geq 230 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 3'8 \\ \hline y & 2'3 & 0 \end{array} \end{cases}$$



Ahora la función igualada a 0:

$$f(x, y) = 10x + 16y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1'6 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$$

Para minimizar hallamos y probamos los puntos B y C

$$\begin{cases} 40x + 10y = 40 \\ 60x + 100y = 230 \end{cases} \quad B = (0'5, 2) \quad f(0'5, 2) = 10 \cdot 0'5 + 16 \cdot 2 = 37$$

$$\begin{cases} x + 6y = 6 \\ 6x + 10y = 23 \end{cases} \quad C = (3, 0'5) \quad f(3, 0'5) = 10 \cdot 3 + 16 \cdot 0'5 = 38$$

a) Por tanto para minimizar el coste debe mezclar medio bote de P_1con 2 botes de P_2.

b) Nutriente A: $0'5 \cdot 40 + 2 \cdot 10 = 40$ gr

Nutriente B: $0'5 \cdot 10 + 2 \cdot 60 = 125$ gr

Nutriente C: $0'5 \cdot 60 + 2 \cdot 100 = 230$ gr

- CUESTIÓN B2. Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{3x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2}$ calcular:

  a) El dominio de definición.

  b) Las asíntotas.

selcs Sep 2011 Solución:

a) Como es una función racional el dominio serán todos los números reales excepto los que anulen el denominador: $x^2 - 3x + 2 = 0$, $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$, Dominio$(f) = R - \{1, 2\}$

b) Asíntotas verticales, la función se irá a infinito en los puntos en que se anule el denominador:

Asíntotas verticales

- $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{3x^2 + 4}{(x-1)(x-2)} = \frac{7}{0^- \cdot (-1)} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{3x^2 + 4}{(x-1)(x-2)} = \frac{7}{0^+ \cdot (-1)} = -\infty$$

- $x = 2$

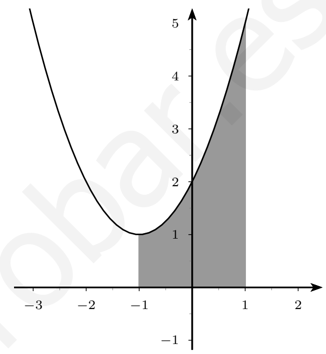
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2 + 4}{(x-1)(x-2)} = \frac{16}{1 \cdot 0^- \cdot} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2+4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2+4}{(x-1)(x-2)} = \frac{7}{1\cdot 0^+} = \infty$$

Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4}{x^2-3x+2} = 3; \quad y = 3$

- CUESTIÓN B3. Calcular el área comprendida entre la curva $y = x^2 + 2x + 2$, el eje $0X$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sep 2011 Solución:



$x^2 + 2x + 2 = 0$, no tiene soluciones reales, por tanto la parábola está siempre por encima del eje de abcisas, el área viene dada directamente por la integral:

$S = \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x + 2)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} = \frac{14}{3}$ u^2

- CUESTIÓN B4. En el desempate de la final del Mundial, cinco futbolistas, A, B, C, D y E lanzan un penalti cada uno. Las probabilidades de marcar de cada uno de ellos son $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$, respectivamente. Calcular:

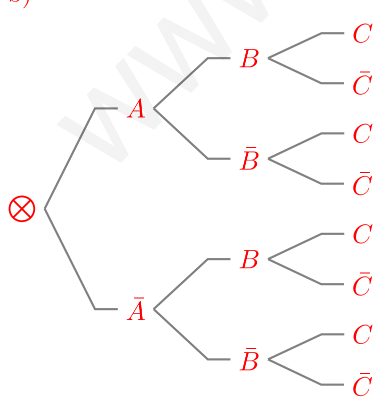
  a) La probabilidad de que todos marquen.

  b) La probabilidad de que en los tres primeros lanzamientos, los de los jugadores A, B y C, al menos uno de ellos marque.

selcs Sep 2011 Solución:

a) Es la intersección de todos y como son independientes la probabilidad de que marquen todos es el producto:
$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{15}$

b)



Que acierte al menos uno es lo contrario de fallar los tres:

$p(\text{fallar los tres}) = p(\bar{A})\cdot p(\bar{B})\cdot p(\bar{C}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

La probabilidad de que acierte al menos uno de los tres es $\frac{23}{24}$

- CUESTIÓN B5. Una muestra aleatoria de 150 viviendas de una población tiene un precio medio por metro cuadrado de 2950 euros. Suponiendo que el precio por metro cuadrado es una variable normal con desviación típica de 600 euros, ¿entre qué límites se encuentra el verdadero precio medio por metro cuadrado de todas las viviendas de la población con un nivel de confianza de 0,99?

selcs Sep 2011 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 2950, \sigma = 600, n = 150$.

Para el nivel de confianza del 99 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2950 \pm 2'58 \cdot \dfrac{600}{\sqrt{150}} = 2950 \pm 126'39 \begin{cases} 2823'61 \\ 3076'39 \end{cases}$

El intervalo de confianza para precio medio por metro cuadrado de todas las viviendas es $(2823'61, 3076'39)$