Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia) 12

Año 2009

12.1. Septiembre 2009

- CUESTIÓN 1.A. Un señor acertó cinco números en la lotería primitiva, dos de los cuales eran el 23 y el 30. Propuso a sus hijos que si averiguaban los otros tres, se podrían quedar con el premio. La suma del primero con el segundo excedía en dos unidades al tercero; el segundo menos el doble del primero era diez unidades menor que el tercero y la suma de los tres era 24. ¿Cuáles son los tres números que faltan?

  selcs Sept 2009 Solución:

  Sean de los tres números que faltan:

  x un número

  y otro número

  z el número restante

  las condiciones se pueden expresar:

  $$\begin{cases} x+y=z+2 \\ y-2x=z-10 \\ x+y+z=24 \end{cases} \qquad \text{reordenando} \begin{cases} x+y-z=2 \\ -2x+y-z=-10 \\ x+y+z=24 \end{cases}$$

  Tiene como matriz asociada:

  $$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & 24 \end{array}$$

  Que triangulando por Gauss resulta:

  $$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -22 \end{array}$$

  que sustituyendo hacia arriba da como soluciones: $z=11, \quad y=9, \quad x=4.$

  Estos son los tres números que faltan.

- CUESTIÓN 1.B. Una escuela prepara una excursión para cuatrocientos alumnos. La empresa de transportes dispone de ocho autocares de cuarenta plazas y diez de cincuenta plazas, pero sólo dispone de nueve conductores. El alquiler de un autocar grande es de ochenta euros y el de uno pequeño de sesenta euros.

  a) Calcular cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.

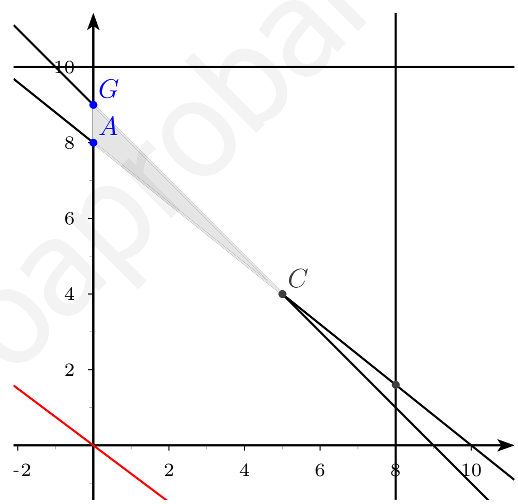
  b) ¿Cuántas plazas sobrarán?

  Identificar en el planteamiento las variables, las restricciones y la función a optimizar.

  selcs Sept 2009 Solución:

  $x =$ número de autobuses de 40 plazas
  $y =$ número de autobuses de 50 plazas
  Precio total: $f(x, y) = 60x + 80y$ € buscamos el mínimo

$$\left\{\begin{array}{l} 40x + 50y \geq 400 \\ x \leq 8 \\ y \leq 10 \\ x + y \leq 9 \end{array}\right.$$



Representamos:

$$\left\{\begin{array}{ll} 40x + 50y \geq 400 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 10 \\ \hline y & 8 & 0 \end{array} \\ x + y \leq 9 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 9 \\ \hline y & 9 & 0 \end{array} \end{array}\right.$$

Ahora la función igualada a 0:

$$f(xy) = 60x + 80y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -4 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$$

Para minimizar el precio tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto $C(5, 4)$, o sea 5 autobuses de 40 plazas y 4 de 50 plazas, entonces el importe sería: $f(5, 4) = 60 \cdot 5 + 80 \cdot 4 = 620$ € .

Con ello el total de plazas contratadas sería de : $5 \cdot 40 + 4 \cdot 50 = 400$, no sobra ninguna.

- CUESTIÓN 2.A. Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{3x^2}{x^2 + 1}$ determinar:

  a) Dominio

  b) Máximos y mínimos

  c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

  d) Asíntotas

  selcs Sept 2009 Solución:

  a) Dominio y regionamiento: El denominador no se anula nunca luego el dominio es R

  El numerador y el denominador son siempre positivos luego la función es siempre positiva.

  b) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

  con $OY : x = 0$, resulta $y = 0$

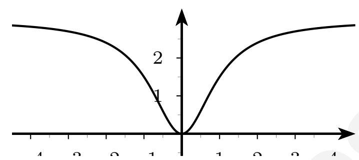
  con $OX : y = 0$, resulta el mismo

c) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales, no podemos anular el denominador, no hay.

Asíntota horizontal $y = n$: $n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = 3; \quad y = 3$



d) Extremos y crecimiento: $f'(x) = \frac{6x}{(x^2+1)^2}$ Se anula para $x = 0$

x		0	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$
		MÍNIMO	

- CUESTIÓN 2.B.

Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 8x + 12$ hallar el punto en el que la recta tangente es paralela al eje de abscisas.

selcs Sept 2009 Solución:

Que la recta tangente a la parábola sea paralela al eje de abcisas supone que su pendiente es cero, por tanto buscamos el punto de la parábola en que se anula su derivada:

$f'(x) = 2x - 8 = 0; \quad x = 4$ la ordenada del punto es $f(4) = 16 - 32 + 12 = -4$

El punto buscado es $(4, -4)$

- CUESTIÓN 3.A.

Hallar dos números cuya suma sea 20, sabiendo que su producto es máximo. Razonar el método utilizado.

selcs Sept 2009 Solución:

Sean los números $x, \quad 20 - x$

El producto $f(x) = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$ ha de ser máximo.

Derivamos y anulamos la derivada: $f'(x) = 20 - 2x = 0$ Tiene de solución $x = 10$, comprobemos que es máximo con el crecimiento:

x		10	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$
		MÁXIMO	

- CUESTIÓN 3.B.

Calcular el área de la región del plano comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 3x^2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sept 2009 Solución:

Buscamos los puntos de corte de las dos funciones, $f: \quad y = 4 - x^2; \quad g: \quad y = 3x^2$:

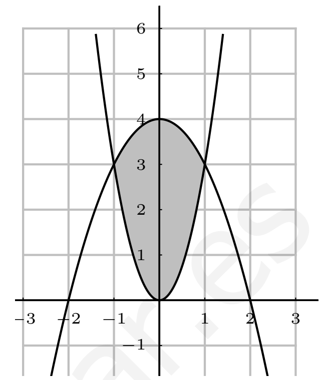
$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x^2 \end{cases}$$

$3x^2 = 4 - x^2; \quad 4x^2 = 4; \quad x = \pm 1$

$\text{Área} = 2 \cdot S_1 \; S_1 = \int_0^1 \text{ f - g} =$

$$S_1 = \int_0^1 (4 - 4x^2) \quad dx = \left[4x - \frac{4x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

$\text{Área} = \frac{16}{3} u^2$



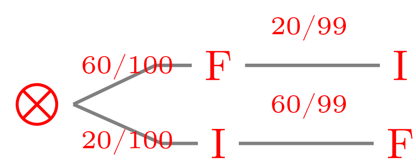
- CUESTIÓN 4.A.

  A un congreso de científicos asisten cien congresistas, de ellos ochenta hablan francés y cuarenta hablan inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que dos congresistas elegidos al azar no puedan entenderse sin intérpretes?

  selcs Sept 2009 Solución:

  Como todos hablan algún idioma por tanto hay 20 que hablan los dos idiomas:
  Llamamos I al suceso ”saber sólo inglés” son 20 de los cien
  Llamamos F al suceso ”saber sólo francés” son 60 de los cien
  Llamamos B al suceso ”saber los dos idiomas” son 20 de los cien

  Sumando las probabilidades de las dos ramas:
  $p(\text{ no entenderse }) = \frac{60}{100} . \frac{20}{99} + \frac{20}{100} . \frac{60}{99} = 0'24$



- CUESTIÓN 4.B.

  En un I.E.S. se realizan dos competiciones deportivas: baloncesto y fútbol. El 20 % de los alumnos participan en la de baloncesto, de los cuáles el 40 % son de primero de bachillerato y el 30 % participan en la de fútbol, de los cuáles el 25 % son de primer curso de bachillerato. Ningún alumno puede participar en dos competiciones.

  Elegido al azar un alumno, ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo de bachillerato?

  selcs Sept 2009 Solución:

  Teorema de la Probabilidad Total

  Sea I ser de 1º de Bachiller, sea II ser de 2º de Bachiller.

  Sea B participar en baloncesto, dicen que $p(B) = 0'2$ y F participar en fútbol, dicen que $p(F) = 0'3$.

  Como $p(I/B) = 0'4$ en consecuencia: $p(II/B) = 0'6$

  Como $p(I/F) = 0'25$ en consecuencia: $p(II/F) = 0'75$

  Entonces por el teorema mencionado:

  $p(II) = p(II/B) \cdot p(B) + p(II/F) \cdot p(F) = 0'6 \cdot 0'2 + 0'75 \cdot 0'3 = 0'27$

- CUESTIÓN 5.A.

  El promedio de las puntuaciones obtenidas en historia por un número elevado de alumnos es de 6,50 puntos. Un determinado curso se examinaron cincuenta alumnos obteniendo una puntuación promedio de 7,25 puntos. Suponiendo que la variable puntuación obtenida en historia es una normal con desviación típica igual a uno, ¿podemos afirmar con un nivel de significación de 0,05 que variaron las calificaciones?

  selcs Sept 2009 Solución:

  Test bilateral

  El nivel de significación $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6'5 \pm 1'96 \dfrac{1}{\sqrt{50}} = 6'5 \pm 0'277 = \begin{cases} 6'7771 \\ 6'2229 \end{cases}$

  que da el intervalo $(6'222, 6'777)$.

  Como $\bar{x} = 7'25$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 6'5$, hay motivo para pensar que han cambiado las calificaciones.

- CUESTIÓN 5.B.

  Una muestra aleatoria simple de veinticinco estudiantes responden a una prueba de inteligencia espacial, obteniendo una media de cien puntos. Se sabe que la variable inteligencia espacial de todos los alumnos es una variable normal con una desviación típica igual a diez, pero se desconoce la media. ¿Entre qué límites se hallará la verdadera inteligencia espacial media de todos los alumnos, con un nivel de confianza de 0,99?

  selcs Sept 2009 Solución:

  Los datos son: $\bar{x} = 100, \sigma = 10, n = 25$.

  Para el nivel de confianza del 99 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 \pm 2'58 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 100 \pm 5'16 \begin{cases} 105'16 \\ 94'84 \end{cases}$

  El intervalo de confianza para la media μ es $(94'84, 105'16)$